

# Optymalizacja parametryczna regulatora niecałkowitego rzędu typu $PD^\alpha$

Marta Zagórska

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków

**Streszczenie:** W artykule przeanalizowano zachowanie układu całkowitego rzędu ze sprzężeniem zwrotnym niecałkowitego rzędu. Przedstawiono nową metodę doboru optymalnych parametrów dla regulatorów typu  $PD^\alpha$  we wspomnianych układach z nieskończonym horyzontem. Zaprezentowano wykorzystaną metodę aproksymacji układów niecałkowitego rzędu z wykorzystaniem funkcji Laguerre'a oraz sformułowano problem w postaci zagadnienia minmax. Pokazano również przykładowy przebieg optymalizacji ze względu na parametry związane z typem aproksymacji.

**Słowa kluczowe:** układ niecałkowitego rzędu, sterowanie niecałkowitego rzędu, sprzężenie zwrotne, optymalizacja,  $PD^\alpha$ , funkcje Laguerre'a

## 1. Wstęp

Układy niecałkowitego rzędu są jedną z nowych gałęzi teorii sterowania. Ich analiza ma na celu nie tyle wyparcie klasycznych teorii, co pewne ich rozszerzenie i uzupełnienie.

W artykule przeanalizowano metodę optymalizacji parametrów regulatora  $PD^\alpha$ . Głównym zadaniem było znalezienie sposobu doboru parametrów, który pozwoli zminimalizować normę w  $L^2[0, +\infty)$  odpowiedzi impulsowej układu zamkniętego. W tym celu zastosowano aproksymację normy za pomocą funkcji Laguerre'a, ilustrując wyniki za pomocą 4 systemów niecałkowitego rzędu o różnej dynamice.

Przykładami prac zajmujących się tematyką układów niecałkowitego rzędu, są na przykład [1–4]. Większość publikacji skupia się na właściwościach, np. [5] oraz zastosowaniach, np. [6–8]. Wcześniejsze informacje nt. optymalizacji parametrycznej, zarówno pod kątem symulacji, jak i eksperymentów, można znaleźć m.in. w [1, 8–11]. Ciekawe podejście zaproponowano w [12–14], gdzie autorzy analizowali ideę odpornego regulatora niecałkowitego rzędu.

Głównym elementem artykułu jest zastosowanie metody aproksymacji, opisanej w [15, 5, 16], do opracowania nowego sposobu strojenia regulatorów niecałkowitego rzędu.

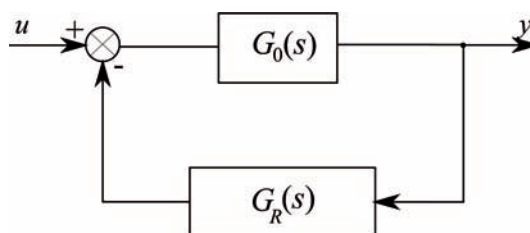
Artykuł stanowi wstęp do badań nad optymalizacją układów niecałkowitego rzędu. Został podzielony na kilka części. Najpierw przedstawiono zarys problemu i propozycję eksperymentów do przeprowadzenia. Następnie zaprezentowano wybraną metodę aproksymacji z uwzględnieniem przyjętego wskaźnika jakości. Kolejna część jest poświęcona algorytmowi optymalizacji – przed-

stawiono wyniki symulacyjne oraz częściową analizę zbieżności. Na zakończenie przedstawiono wnioski i zarys dalszych prac.

## 2. Opis problemu

### 2.1. Analizowany układ

Przeanalizowano układ z rys. 1, gdzie



Rys. 1. Zamknięty układ regulacji  
Fig. 1. Closed-loop system

$$G_0(s) = \frac{1}{s^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e} \quad (1)$$

z regulatorem niecałkowitego rzędu typu  $PD^\alpha$

$$G_R(s) = K_P + K_D s^\alpha \quad (2)$$

Transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + bs^3 + cs^2 + ds + K_D s^\alpha + e + K_P} \quad (3)$$

W przypadku zerowej wartości zadanej umiejscowienie regulatora w torze sprzężenia zwrotnego jest równoważne umieszczeniu w torze głównym.

Wybrano cztery typy układów (1), których zachowanie determinują bieguny z tabeli 1.

#### Autor korespondujący:

Marta Zagórska, zagor@agh.edu.pl

#### Artykuł recenzowany

nadesłany 5.06.2015 r., przyjęty do druku 30.10.2015 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

Wybór takiego układu pozwala np. zaobserwować destabilizację układu ze wzrostem wzmocnienia (niemożliwe w układzie rzędu 2). Efekt wrażliwości osiągnięto również dla układów z opóźnieniem (zob. [17]).

Tabela 1. Cztery typy zachowań układu (1)  
Table 1. Four types of system (1)

Bieguny (1)	b	c	d	e	ID wielomianu
-1, -2, -3, -4	10	35	50	24	1
-1	4	6	4	1	2
-2-i, -2+i, -1-i, -1+i	6	15	18	10	3
-2, -1, -1-i, 1+i	5	10	10	4	4

2.2. Optymalizacja

Głównym celem prowadzonych badań było znalezienie optymalnych wartości parametrów:  $\alpha$ ,  $K_D$  oraz  $K_P$ . W tym celu wybrano następującą funkcję celu

$$J(\alpha, K_D, K_P) = \int_0^\infty g^2(t) dt \tag{4}$$

gdzie  $g(t)$  oznacza odpowiedź impulsową układu (3).

3. Metoda aproksymacji

Metoda aproksymacji odpowiedzi impulsowej może zostać zastosowana do równań typu (opisanego np. w [1]):

$$\begin{aligned} & {}^C_0D^{\sigma_n}_t x(t) + \left[ \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-j} {}^C_0D^{\sigma_{n-j}}_t x(t) \right] + p_0 x(t) = \\ & q_m {}^C_0D^{\gamma_m}_t u(t) + \left[ \sum_{j=1}^{m-1} q_{m-j} {}^C_0D^{\gamma_{m-j}}_t u(t) \right] + q_0 u(t) \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie  $j \leq \sigma_j \leq j+1, j = 1, 2, \dots, n, j \leq \gamma_j \leq j+1, j = 1, 2, \dots, m, p_j, q_j \in \mathbb{R}$ .

Warunki początkowe są zerowe. Zakłada się również, że  $|u(t)| \leq u_{max}$  dla  $t \geq 0$  oraz  $u(t) = 0$  dla  $t < 0$  [5]. Z uwagi na przyjęte wartości warunków początkowych, operator różniczkowania może być zarówno typu Caputo, jak i Riemanna-Liouville’a. Można zauważyć, że przy powyższych założeniach rozważa się układy rzędu co najmniej 1.

Transmitancja równania (5) ma postać

$$\hat{g}(s) = \frac{q_m s^{\gamma_m} + q_{m-1} s^{\gamma_{m-1}} + \dots + q_0}{s^{\sigma_n} + p_{n-1} s^{\sigma_{n-1}} + \dots + p_0} \tag{6}$$

którego rozwiązanie jest dane splotem

$$x(t) = u * g = \int_0^t u(t-\theta) g(\theta) d\theta \tag{7}$$

Tabela 2. Wyniki dla ustalonego  $\alpha$   
Table 2. Results for fixed  $\alpha$

$\alpha$	$K_P$	$K_D$	$\mu$	wskaźnik jakości	ID wielomianu
0,5	10,601	152,38	1,7547	1,6164	1
0,6	-3,1367	157,44	1,8281	0,7516	1
0,7	34,555	249,15	1,4391	0,29579	1
0,8	47,138	307,78	3,9306	0,10515	1
0,9	64,501	390,14	3,4072	0,035171	1
1,1	373,39	225,66	5	0,017421	1
1,2	592,3	356,88	1,7884	0,014513	1
1,3	887,05	286,58	1,7894	0,01641	1
1,4	3794,8	342,67	3,8473	0,0028629	1
1,5	4311,7	291,9	3,8693	0,002199	1
0,5	-4,3727	17,078	0,95104	24,605	2
0,6	-2,0258	13,995	0,95303	10,037	2
0,7	-30,52	91,364	2,7187	1,7253	2
0,8	0,27642	13,98	1,4922	1,5157	2
0,9	1,5166	19,058	1,2956	0,58241	2
1,1	506,31	2313,4	4,1255	0,00011033	2
1,2	117,63	148,79	3,4084	0,0094293	2
1,4	112,49	104,44	5	0,012071	2
1,5	120,11	74,376	1,145	0,019376	2
0,5	-9,5579	66,916	0,99571	3,4021	3
0,6	-6,7391	57,279	0,93829	1,7691	3
0,7	-5,0591	40,414	1,4347	0,86502	3
0,8	-5,8715	93,316	1,1451	0,30837	3
0,9	0,35245	78,326	1,2546	0,14081	3
1,1	288,16	475,46	2,1471	0,0048739	3
1,2	125,87	155,15	5	0,024456	3
1,3	977,79	248,05	2,0518	0,01098	3
1,4	258,86	79,355	5	0,032846	3
1,5	295,84	84,453	5	0,0163	3
0,5	71,287	21,833	2,9241	16,426	4
0,6	20,005	25,392	1,9548	3,9668	4
0,7	0,71273	29,175	0,7794	1,5688	4
0,8	3,9467	25,824	1,902	0,62471	4
0,9	-5,3143	73,452	2,0709	0,19688	4
1,1	24,498	27,853	4,0727	0,18316	4
1,2	38,406	28,62	4,1612	0,18331	4
1,3	124,79	109,05	5	0,021496	4
1,4	125,06	98,213	5	0,01964	4
1,5	51,857	22,898	3,583	0,14819	4

Można pokazać, że rozwiązanie (7) równania (5) może zostać aproksymowane układem  $n$  liniowych równań różniczkowych zwyczajnych [5].

Twierdzenie 1 (zob. [5]) podaje warunki, jakie muszą być spełnione aby znaleźć aproksymację o minimalnym błędzie.

**Twierdzenie 1.** *Jeśli  $g \in \mathcal{L}_1(0, \infty) \cup \mathcal{L}_2(0, \infty)$  oraz  $|u(t)| \leq u_{max}$  wtedy:*

1. *Rozwiązanie równania (5) może być aproksymowane przez*

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k \xi_k(t) \quad (8)$$

gdzie funkcje  $\xi_k(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  są rozwiązaniem układu

$$\dot{\xi}_k = -\mu \xi_k - 2\mu \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i + \sqrt{2\mu} u \quad (9)$$

$$\xi_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

oraz

$$\beta_k = \int_0^\infty g(\theta) e_k(\theta, \mu) d\theta. \quad (10)$$

2. *Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $n_0$  zależna od  $g, \varepsilon$  oraz  $u_{max}$  taka, że błąd aproksymacji  $\epsilon_n(t) = x(t) - x_n(t)$  spełnia nierówność*

$$|\epsilon_n(t)| < \varepsilon \quad (11)$$

dla każdego  $n \geq n_0$  oraz  $t \geq 0$ .

*Dowód.* Dowód znajduje się np. w [5].  $\square$

Funkcje  $e_k(\theta, \mu)$  tworzą ortonormalny zbiór funkcji Laguerre'a parametryzowany przez  $\mu > 0$ , określony wzorem:

$$e_k(\theta, \mu) = \sqrt{2\mu} L_k(2\mu\theta) \quad (12)$$

gdzie  $L_k$  są wielomianami Lagerre'a, oraz  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Dodatkowo, zob. [5], wykorzystując fakt, że  $g \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$  oraz na podstawie przemienności operacji spłotu dostaje się zależność między  $\xi_k$  oraz  $e_k$

$$\xi_k(t) = \int_0^t e_k(t - \theta, \mu) u(\theta) d\theta \quad (13)$$

Wzór (10) nie nadaje się do implementacji numerycznej. W [5] autorzy zaprezentowali formułę rekurencyjną, która pozwala efektywnie obliczyć wartości współczynników. Została ona także zastosowana w niniejszym artykule.

Jednym z aspektów, na jaki należy zwrócić uwagę, jest dobór parametru  $\mu$ . Jego wybór determinuje funkcja celu określona wzorem

$$I(\mu) = \sum_{k=0}^n \beta_k^2(\mu) \quad (14)$$

maksymalizowana ze względu na  $\mu$  (szczegóły w [5]).

Celem doboru regulatora jest minimalizacja normy odpowiedzi impulsowej  $g(t)$ . Korzystając z wybranej metody aproksymacji oraz właściwości szeregów ortonormalnych można znaleźć analityczną postać wskaźnika jakości.

Bezpośrednio ze wzoru (10) można zauważyć, że

$$g(\mu) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i(t, \mu) \quad (15)$$

Biorąc pod uwagę, że  $e_k(\theta, \mu)$  są ortonormalne w  $\mathcal{L}^2[0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0, & i &\neq j \\ \langle e_i, e_j \rangle &= 1, & i &= j \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie

$$\langle a, b \rangle = \int_0^\infty a(\theta) b(\theta) d\theta \quad (17)$$

Można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g^2(t) dt &= \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^n \beta_i e_i(t, \mu) \right]^2 dt = \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \langle e_i, e_i \rangle + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \beta_i \beta_j \langle e_i, e_j \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Łatwo zauważyć, że

$$J(\alpha, K_D, K_P) = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \quad (19)$$

Wówczas zależności (14) oraz (19) są sobie równe, a optymalizacja odpowiedzi impulsowej jest problemem typu minmax. W pierwszym kroku następuje maksymalizacja wskaźnika jakości ze względu na  $\mu$ , a następnie poszukuje się minimalnej wartości ze względu na parametry regulatora.

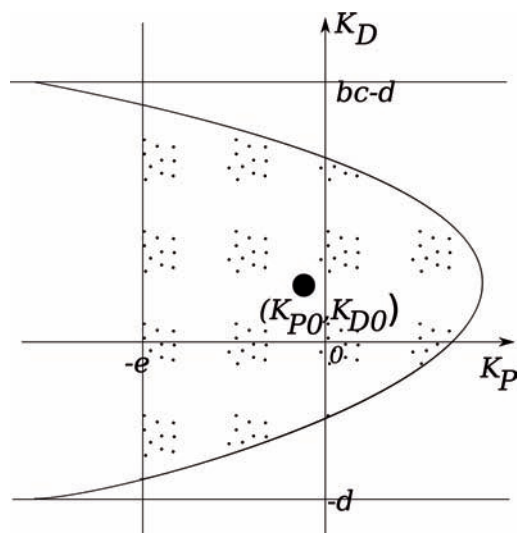
## 4. Algorytm optymalizacji

Optymalizacja może być przeprowadzona z wykorzystaniem dowolnego algorytmu optymalizacji. W tym przypadku zastosowano algorytm Nelder-Mead, zaimplementowany w środowisku MATLAB/Optimization Toolbox.

1. Wybrać wartości początkowe  $\alpha, K_D$  oraz  $K_P$ .
2. Przeprowadzić wstępną maksymalizację wskaźnika jakości (14) ze względu na  $\mu$ .
3. Wykonać jeden krok optymalizacji.
4. Przed obliczeniem (19) wykonać maksymalizację ze względu na  $\mu$ .
5. Zaktualizować wartości  $\alpha, K_D$  oraz  $K_P$  zgodnie z wybraną metodą optymalizacji.
6. Powtarzać kroki 2–5 aż do osiągnięcia zadanej dokładności.

## 5. Wyniki

Rozważono dwa sposoby postępowania. W pierwszym ustalono wartość  $\alpha$  i przeprowadzono optymalizację wyłącznie dla parametrów  $K_D$  i  $K_P$ . Zdecydowano się na przetestowanie wartości  $\alpha$



Rys. 2. Zakres stabilności układu całkowitego rzędu. Zakropkowany obszar oznacza dopuszczalne wartości parametrów  $K_p$  oraz  $K_D$   
Fig. 2. Stability region for integer order system. Dotted region denotes admissible values of  $K_p$  and  $K_D$

z zakresu 0,5–1,5. Dla każdej wartości minimalizowano cztery transmitancje o parametrach określonych w tabeli 1. Wyniki pierwszego podejścia zostały wykorzystane jako punkty startowe w drugim etapie, gdzie optymalizowano również wartość  $\alpha$ .

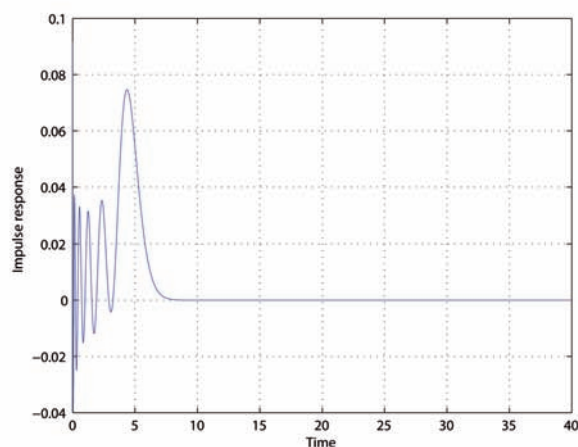
## 5.1. Optymalizacja ze względu na $K_p$ oraz $K_D$

### 5.1.1. Punkty startowe

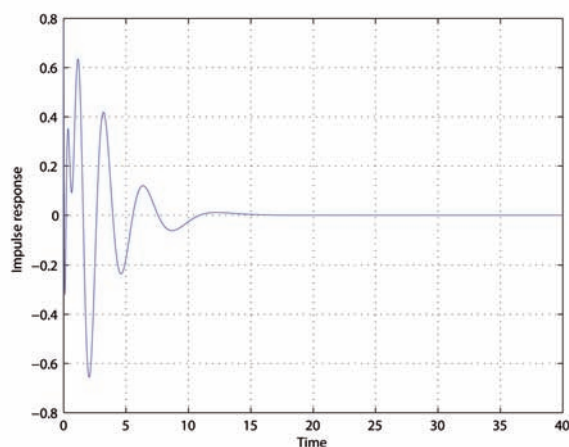
Założono, że układ niecałkowitego rzędu (3) dla  $\alpha$  bliskiego 1 będzie się zachowywał podobnie do układu całkowitego rzędu z klasycznym regulatorem PD. W ten sposób został zidentyfikowany zakres parametrów, dla których układ zamknięty jest stabilny. W dalszych pracach zostaną wykorzystane kryteria stabilności podane w [18].

Na podstawie kryterium Hurwitza określono zakres parametrów dla układu całkowitego rzędu (rys. 2). Jako warunek początkowy optymalizacji ( $K_{P0}, K_{D0}$ ) wybrano centralne punkty zakropkowanego obszaru

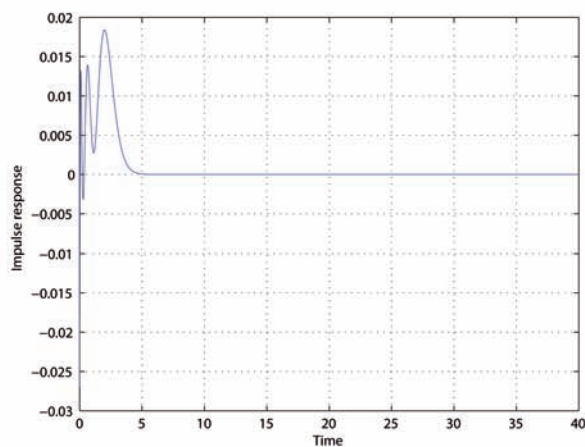
$$\begin{aligned} K_{P0} &= -e + \frac{bc^2}{2} - be - \frac{(db + bc - 2d)^2}{2b^2} \\ K_{D0} &= \frac{bc - 2d}{2} \end{aligned} \quad (20)$$



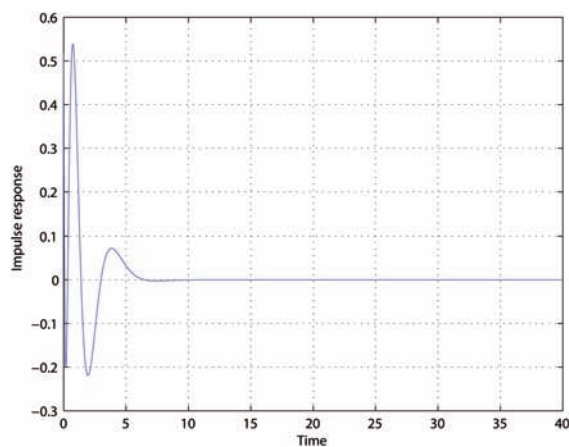
(a) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,5$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 1  
(a) Impulse response for  $\alpha = 1.5$  and  $n = 10$  for polynomial 1



(b) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 1  
(b) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 10$  for polynomial 1



(c) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,5$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 1  
(c) Impulse response for  $\alpha = 1.5$  and  $n = 5$  for polynomial 1



(d) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 1  
(d) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 5$  for polynomial 1

Rys. 3. Odpowiedzi impulsowe dla różnych parametrów dla wielomianów typu 1

Fig. 3. Impulse responses for different parameters for polynomial 1

Uwzględniając fakt, że analizowano wyłącznie stabilne systemy, takie podejście jest uzasadnione.

### 5.1.2. Optymalizacja

Wyniki symulacji zostały zebrane w tabeli 2. Najlepsze wyniki otrzymano dla

- $\alpha = 1,5$  dla transmitancji o czterech biegunach rzeczywistych (1),
- $\alpha = 1,1$  dla poczwórnego pierwiastka rzeczywistego oraz dwóch pierwiastków zespolonych sprzężonych (1),
- $\alpha = 1,4$  dla pierwiastków rzeczywistych i zespolonych (1).

Najgorszy wynik miał miejsce (w każdym przypadku) dla  $\alpha = 0,5$ .

Można zauważyć, że w tabeli brakuje niektórych wartości  $\alpha$ , np.  $\alpha = 1,3$ . Prawdopodobnie niektóre wartości  $K_p$  i  $K_D$  leżą poza dopuszczalnym zakresem, powodując nieoczekiwane zachowania układu. Warto również zauważyć, że dla niektórych zestawów parametrów pojawia się  $\mu = 5$ . To oznacza, że osiągnięta została górna granica zakresu (0, 5), w jakim poszukiwana była optymalna wartość  $\mu$ . Zwiększanie zakresu powodowało numeryczne problemy wynikające z postaci funkcji celu (funkcja niewypukła).

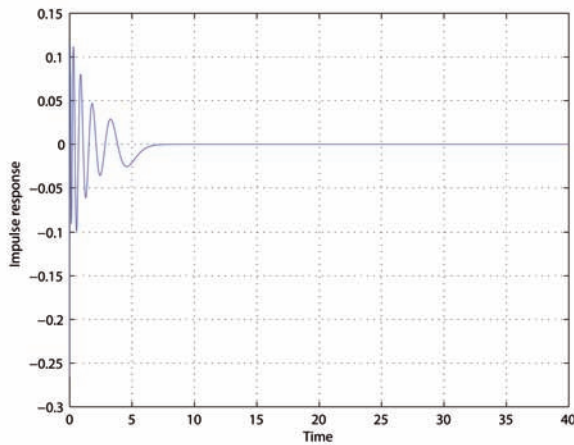
Na wykresach 3, 4, 5, 6 przedstawiono najlepsze i najgorsze wyniki dla każdego typu transmitancji (rysunki odpowiednio 3a, 4a, 5a, 6a, 3b, 4b, 5b, 6b). Dodatkowo pokazano zmianę przebiegów w przypadku zmiany stopnia aproksymacji (rysunki odpowiednio 3c, 4c, 5c, 6c, 3d, 4d, 5d, 6d). Dla wszystkich nowych przypadków przeprowadzono optymalizację ze względu na  $\mu$ .

Można zauważyć, że zmiana rzędu aproksymacji wpływa na odpowiedź impulsową, a tym samym na wartość wskaźnika jakości. Na podstawie wykresów można również stwierdzić, że charakter odpowiedzi impulsowej jest determinowany przez wartości parametrów  $\alpha$ ,  $K_p$ ,  $K_D$  oraz  $\mu$ , natomiast dokładność odwzorowania zależy od stopnia aproksymacji  $n$ .

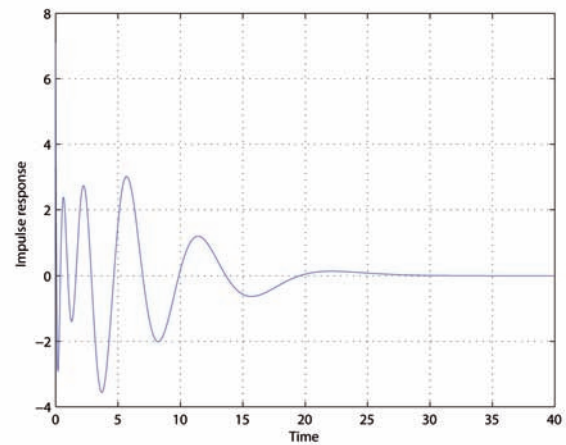
### 5.2. Optymalizacja ze względu na $\alpha$ , $K_p$ oraz $K_D$

Drugie podejście polegało na optymalizacji trzech parametrów  $\alpha$ ,  $K_p$ ,  $K_D$ . Z uwagi na fakt, że funkcja celu jest silnie nieliniowa ze względu na  $\alpha$ , można oczekiwać, że pojawią się pewne komplikacje numeryczne, np. związane ze zbiorem wartości dopuszczalnych.

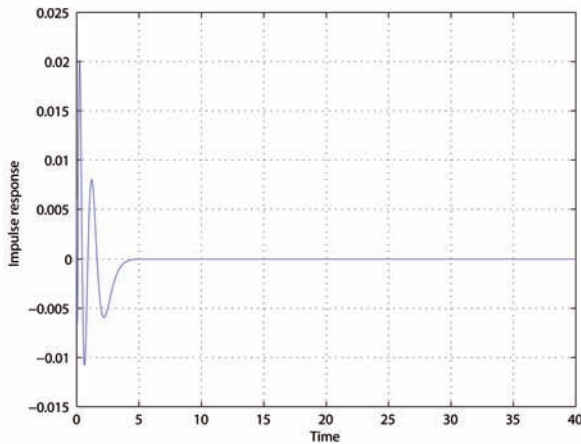
Jako wartości początkowe przyjęto wyniki  $\alpha$ ,  $K_p$ ,  $K_D$  z poprzedniego podejścia. W ten sposób optymalizacja wystartowała ze zbioru dopuszczalnego. Wyniki optymalizacji przedstawiono w tabeli 3.



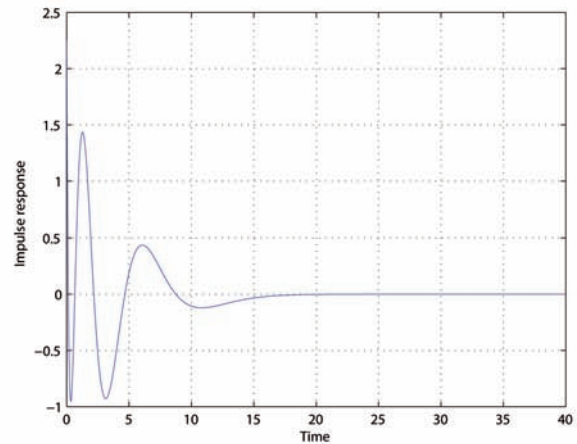
(a) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,1$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 2  
(a) Impulse response for  $\alpha = 1.1$  and  $n = 10$  for polynomial 2



(b) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 2  
(b) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 10$  for polynomial 2



(c) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,1$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 2  
(c) Impulse response for  $\alpha = 1.1$  and  $n = 5$  for polynomial 2



(d) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 2  
(d) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 5$  for polynomial 2

**Rys. 4: Odpowiedzi impulsowe dla różnych parametrów dla wielomianów typu 2**

Fig. 4. Impulse responses for different parameters for polynomial 2



Niektóre wyniki zostały przedstawione na rysunkach 7. We wszystkich przykładach przyjęto  $n = 10$ .

Najlepsze wyniki zostały osiągnięte dla  $\alpha = 0,9817$  dla czwartego typu wielomianu. Można również zauważyć, że w tym przypadku w tabeli 3 brakuje większej liczby wartości. Wynika to z faktu, że funkcja celu jest silnie nieliniowa ze względu na  $\alpha$ .

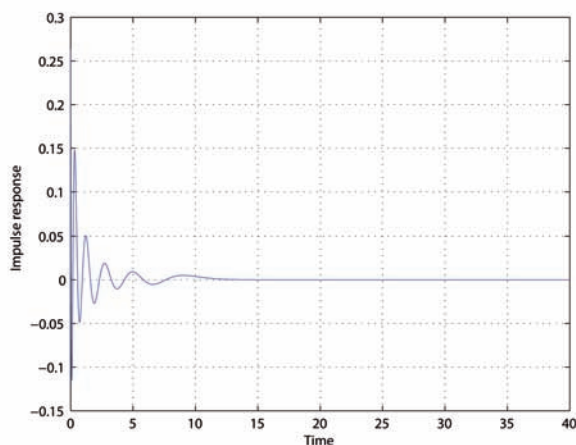
### 5.3. Zbieżność $\mu$

Jednym z interesujących aspektów tej metody jest analiza zachowania parametru  $\mu$  podczas optymalizacji. Trudność polega na wyborze odpowiedniej metody, w celu znalezienia optymalnych wartości parametrów, które minimalizują wskaźnik jakości (zależny od  $\mu$ ). Na rys. 8 zostały przedstawione zmiany  $\mu$  w trakcie kolejnych iteracji metody. Jak widać, wartości dosyć szybko zbiegają do optymalnej wielkości. Etapy, które wymagałyby znaczącej zmiany  $\mu$ , a tym samym zmiany odpowiedzi impulsowej, zostały odrzucone w trakcie optymalizacji, ponieważ nie poprawiały wskaźnika jakości.

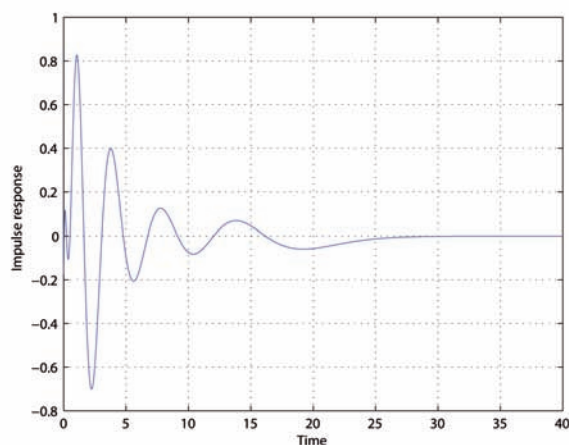
## 6. Podsumowanie i wnioski

Podejście zaproponowane w tym artykule prezentuje optymalizację regulatorów niecałkowitego rzędu z nieskończonym horyzontem. W dalszej części badań zostaną przeanalizowane np. modele liniowe z opóźnieniem, o wiele bardziej użyteczne, jako że są szeroko stosowane w strojeniu regulatorów.

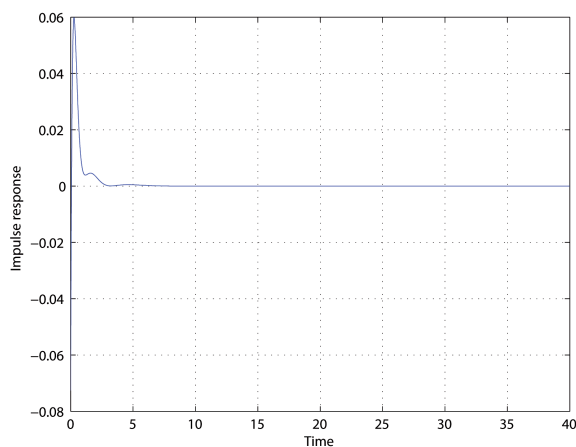
Ważnym elementem jest także określenie zakresu parametrów, przy których obiekt pozostaje stabilny. Dodatkowo można rozważać inne typy regulatorów oraz różne wskaźniki jakości. Zasadniczo wszystkie całkowite wskaźniki z nieskończonym horyzontem mogą zostać zastosowane, ich określenie będzie jednak wymagało działania na aproksymowanym układzie (8)–(9). Także zastosowanie innego zestawu funkcji aproksymujących może dać interesujące rezultaty. Istotnym elementem będzie także porównanie regulatora niecałkowitego rzędu z klasycznym przypadkiem regulatora PD, m.in. w celu zbadania, jaki wpływ ma zwiększenie liczby stopni swobody regulatora.



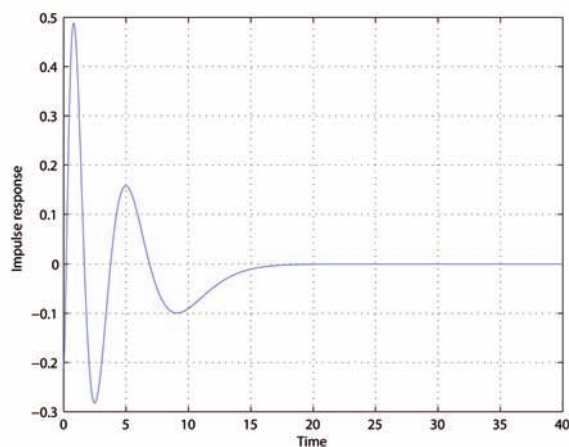
(a) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,1$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 3  
(a) Impulse response for  $\alpha = 1.1$  and  $n = 10$  for polynomial 3



(b) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 3  
(b) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 10$  for polynomial 3



(c) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,1$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 3  
(c) Impulse response for  $\alpha = 1.1$  and  $n = 5$  for polynomial 3



(d) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 3  
(d) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 5$  for polynomial 3

Rys. 5. Odpowiedzi impulsowe dla różnych parametrów dla wielomianów typu 3

Fig. 5. Impulse responses for different parameters for polynomial 3

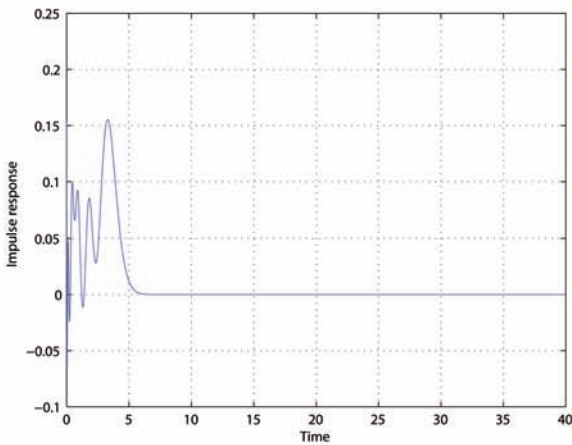
Poszukiwanie odpowiedniej metody optymalizacji, która pozwoli na szybkie znajdowanie optymalnej wartości  $\mu$  w trakcie minimalizacji wskaźnika ze względu na parametry regulatora będzie ważną częścią prowadzonych badań. Warto również będzie zwrócić uwagę na wrażliwość optymalizacji ze względu na parametr  $\alpha$  – zwłaszcza analityczne wyliczenia pochodnych po  $\alpha$  mogą dać obiecujące wyniki.

Podziękowania

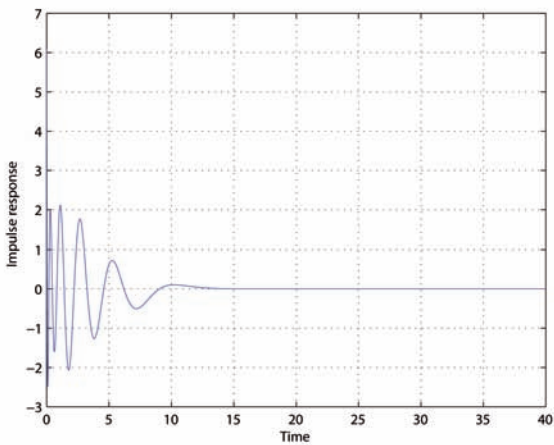
Praca została zrealizowana w ramach projektu *Projektowanie i zastosowanie podsystemów niecałkowitego rzędu w układach sterowania* finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki na podstawie umowy nr DEC-2013/09/D/ST7/03960.

Bibliografia

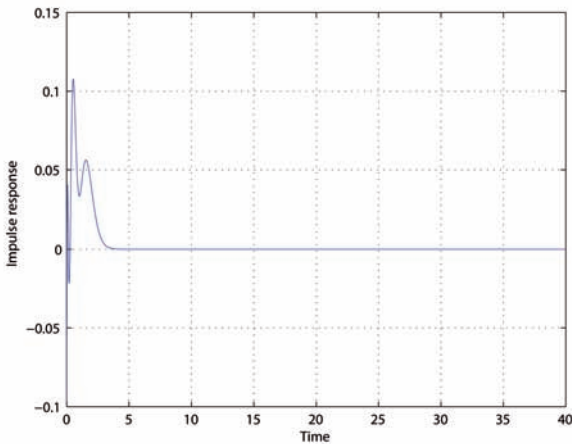
- 1. Podlubny I., *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, ser. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1998.
- 2. Petráš I., *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, ser. Nonlinear Physical Science. Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-18101-6.
- 3. Diethelm K., *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, ser. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2010, [Online]. <https://books.google.pl/books?id=K4vKvX98SM8C>. DOI: 10.1007/978-3-642-14574-2.



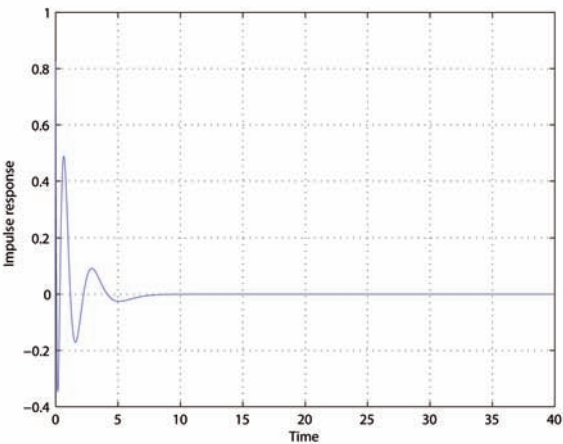
(a) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,4$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 4  
(a) Impulse response for  $\alpha = 1.4$  and  $n = 10$  for polynomial 4



(b) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 10$  dla wielomianu typu 4  
(b) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 10$  for polynomial 4



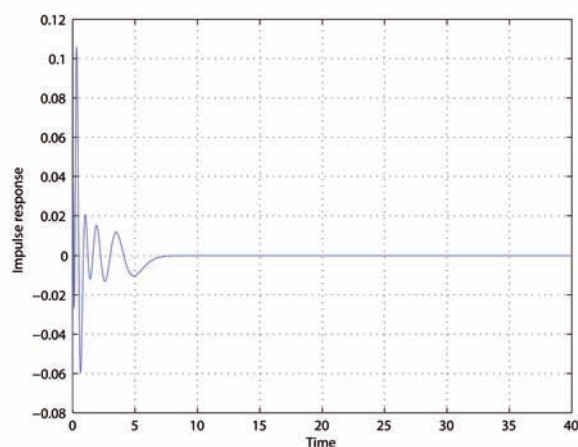
(c) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 1,4$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 4  
(c) Impulse response for  $\alpha = 1.4$  and  $n = 5$  for polynomial 4



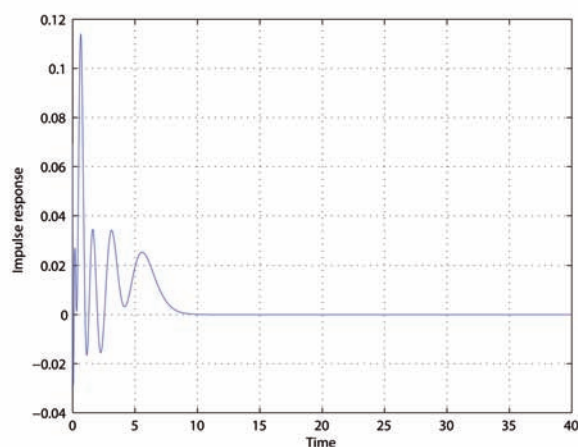
(d) Odpowiedź impulsowa  $\alpha = 0,5$  oraz  $n = 5$  dla wielomianu typu 4  
(d) Impulse response for  $\alpha = 0.5$  and  $n = 5$  for polynomial 4

Rys. 6. Odpowiedzi impulsowe dla różnych parametrów dla wielomianów typu 4  
Fig. 6. Impulse responses for different parameters for polynomial 4

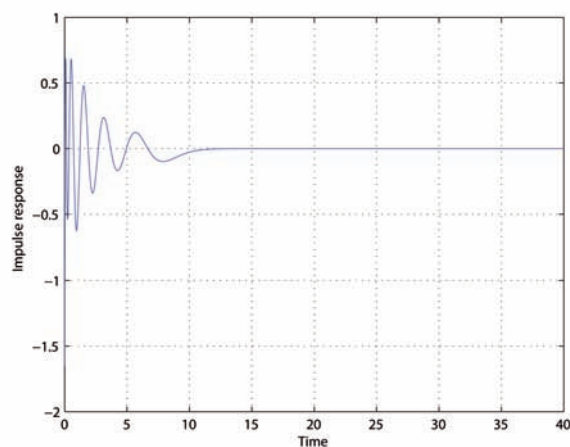
4. Kaczorek T., *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-20502-6.
5. Bania P., Baranowski J., *Laguerre polynomial approximation of fractional order linear systems*, [in:] *Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems: 5th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications, Cracow, Poland*, Mitkowski W., Kacprzyk J., Baranowski J., Eds. Springer, 171–182, 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00933-9\_15.
6. Piątek P., Baranowski J., *Investigation of Fixed-Point Computation Influence on Numerical Solutions of Fractional Differential Equations*, "Acta Mechanica et Automatica", vol. 5, no. 2, 101–107, 2011.
7. Bauer W., Baranowski J., Mitkowski W., *Non-integer order  $PD^\alpha$  control ICU-MM*, [in:] *Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems: 5th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications, Cracow, Poland*, Mitkowski W., Kacprzyk J., Baranowski J., Eds. Springer, 295–303, 2013. DOI: 10.1007/978-3-319-00933-9\_27.
8. Dziwiński T., Bauer W., Baranowski J., Piątek P., Zagórska M., *Robust non-integer order controller for air heater*, [in:] *19th International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, IEEE, 434–438, 2014. DOI: 10.1109/MMAR.2014.6957393.
9. Kawala-Janik A., Podpora M., Baranowski J., Bauer W., Pelc M., *Innovative approach in analysis of EEG and EMG signals – Comparison of the two novel methods*, [in:] *19th International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, IEEE, 804–807, 2014. DOI: 10.1109/MMAR.2014.6957459.
10. Bauer W., Dziwiński T., Baranowski J., Piątek P., Zagórska M., *Comparison of performance indices for tuning of  $PI^2D^\mu$  controller for magnetic levitation system*, [in:] *Advances in Modelling and Control of Non-integer-Order Systems – 6th Conference on Non-Integer Order Calculus and its Applications*, Latawiec K.J., Łukaniszyn M., Stanisławski R., Eds. Springer, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-09900-2\_12.
11. Meng L., Xue D., *Design of an optimal fractional-order PID controller using multi-objective GA optimization*, [in:] *Con-*



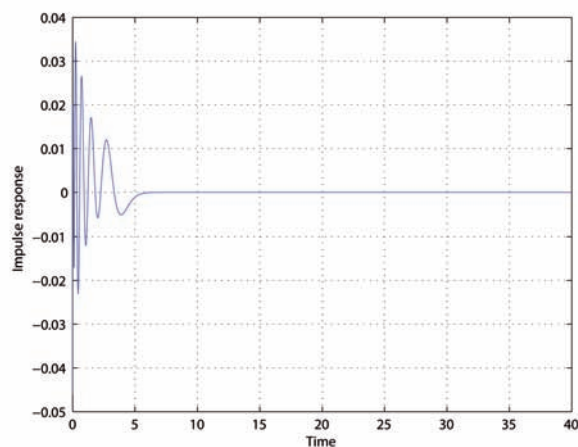
(a) Odpowiedź impulsowa dla  $\alpha = 1,401$  dla wielomianu typu 1  
(a) Impulse response for  $\alpha = 1.401$  for the ID 1 characteristic polynomial



(b) Odpowiedź impulsowa dla  $\alpha = 1,3443$  dla wielomianu typu 2  
(b) Impulse response for  $\alpha = 1.3443$  for the ID 2 characteristic polynomial



(c) Odpowiedź impulsowa dla  $\alpha = 1,0389$  dla wielomianu typu 3  
(c) Impulse response for  $\alpha = 1.0389$  for the ID 3 characteristic polynomial



(d) Odpowiedź impulsowa dla  $\alpha = 0,9817$  dla wielomianu typu 4  
(d) Impulse response for  $\alpha = 0.9817$  for the ID 4 characteristic polynomial

**Rys. 7. Odpowiedzi impulsowe dla różnych parametrów dla przypadku optymalizacji trzech parametrów**

Fig. 7. Impulse responses for various parameters – optimization with respect to three parameters



trol and Decision Conference, CCDC'09. Chinese. IEEE, 3849–3853, 2009. DOI: 10.1109/CCDC.2009.5191796.

12. Kesarkar A.A., Selvaganesan N., *Design of fractional order robust controller for universal plant structure*, [in:] *Engineering (NUICONE), 2011 Nirma University International Conference on*. IEEE, 1–4, 2011. DOI: 10.1109/NUIConE.2011.6153305.

13. Kesarkar A.A., Selvaganesan N., *Novel tuning expressions for fractional order ( $PD^\delta$  and  $PI^\delta$ ) controllers using a generalized plant structure*, “*Journal of Control Engineering and Applied Informatics*”, vol. 17, no. 1, 2015, 70–80.

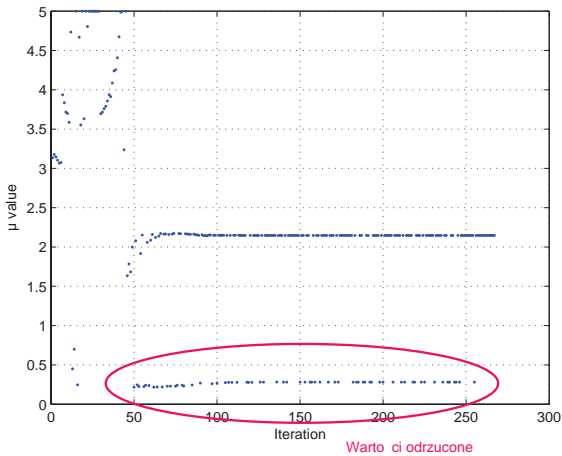
14. Kesarkar A.A., Selvaganesan N., *Tuning of optimal fractional-order PID controller using an artificial bee colony algorithm*, “*Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal*”, vol. 3, no. 1, 2015, 99–105.

15. Baranowski J., Zagórska M., Bania P., Bauer W., Dziwiński T., Piątek P., *Impulse response approximation method for bi-fractional filter*, [in:] *19th International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, IEEE, 2014, 379–383. DOI: 10.1109/MMAR.2014.6957383.

16. Zagórska M., Baranowski J., Bania P., Piątek P., Bauer W., Dziwiński T., *Impulse response approximation method for "fractional order lag"*, [in:] *Advances in Modelling and Control of Noninteger-order Systems – 6th Conference on Non-Integer Orfer Caculus and its Applications*, Latawiec K.J., Łukaniszyn M., Stanisławski R., Eds. Springer, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-09900-2\_11.

17. Zagórska M., *Parametric optimization of non-integer order  $PD_\mu$  controller for delayed system*, [in:] *Theoretical Developments and Applications of Non-Integer Order Systems*, ser. Lecture Notes in Electrical Engineering, Domek S., Dworak P., Eds. Springer International Publishing, vol. 357, 2016, 259–270.

18. Matignon D., *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*, [in:] *Computational engineering in systems applications*, vol. 2. Lille France, 1996, 963–968.



Rys. 8. Wartości  $\mu$  podczas optymalizacji dla  $\alpha = 1,1$  dla pierwszego typu (1)  
Fig. 8. The values of  $\mu$  during optimization for  $\alpha = 1.1$  for polynomial 1

Tabela 3. Wyniki optymalizacji z uwzględnieniem  $\alpha$   
Table 3. Results of optimization with respect to  $\alpha$

$\alpha$	$K_p$	$K_D$	$\mu$	wskaźnik jakości	ID wielomianu
0,65609	4,5285	193,91	2,0802	0,48221	1
0,65218	−2,5845	191,33	2,0533	0,49555	1
1,0395	332,82	694,38	2,1274	0,0048554	1
0,99487	152,59	1390,6	1,1545	0,0023715	1
1,0572	329,74	289,19	4,9999	0,015266	1
1,0478	544,63	611,49	2,0614	0,0048195	1
1,7454	866,9	294,17	1,2265	0,0056207	1
1,4019	3799,1	342,66	1,0661	0,0028121	1
1,5	4311,7	291,9	3,8693	0,002199	1
0,74756	−1,5135	21,256	1,2303	2,3375	2
0,99951	−1,0989	66,833	2,0982	0,15648	2
0,70674	−30,064	92,263	2,7411	1,6017	2
0,83388	0,21636	17,669	1,2142	1,0668	2
1,0323	1,6228	68,788	2,1627	0,13333	2
1,3443	119	97,038	3,1715	0,0060493	2
1,4216	112,4	104,37	5	0,011978	2
1,7686	150,29	124,05	0,71287	0,0041165	2
0,57258	−9,3111	60,668	0,0051455	2,0956	3
0,6	−6,7391	57,279	0,028491	1,7691	3
0,91747	−88,718	1267,2	4,2165	0,0046598	3
0,94566	0,36519	1291,7	0,0044146	0,0035341	3
1,0389	132,22	684,76	2,3471	0,0030971	3
1,1635	130,61	157,35	5	0,014763	3
0,9817	50,702	2109,8	5	0,00017628	4
0,90732	−5,3453	73,45	2,072	0,18798	4
1,501	54,088	23,74	5	0,14049	4
1,3863	124,91	100,88	5	0,019628	4
1,3915	124,94	98,476	5	0,019615	4

## Parametric optimization of non-integer order controller $PD^\alpha$

**Abstract:** In this paper we analysed the behaviour of an integer order system with non-integer control function. We presented a new method for tuning the non-integer order controllers  $PD^\alpha$  for use in systems with infinite horizon. An approximation method for non-integer order systems was presented (using Laguerre functions) along with the definition of the issue in form of minmax problem. Finally some examples were analysed with respect to parameters specific for this approximation.

**Keywords:** non-integer order systems,  $PD^\alpha$  controller, feedback, optimization, Laguerre functions

mgr inż. Marta Zagórska

zagor@agh.edu.pl

Doktorantka na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej w Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Absolwentka Automatyki i Robotyki oraz Matematyki Stosowanej w AGH. Zainteresowania naukowe: industrial mathematics, teoria sterowania, układy niecałkowitego rzędu.

