

Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych

Część 2. Przykłady pomiarów wielkości skorelowanych

Zygmunt Lech Warsza

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elekoralna 2, 00-001 Warszawa

Streszczenie: Dwuczęściowa publikacja przedstawia rozszerzoną wersję oceny niepewności pomiarów wieloparametrowych podanej w Suplemencie 2 do Przewodnika GUM. Uwzględnia ona wpływ skorelowania między danymi pomiarowymi wielkości będących elementami mierzonego bezpośrednio menzurandu. W części 1. omówiono podstawy teoretyczne. Wyznaczono wzory ogólne dla macierzy kowariancji, niepewności i ich składowych typu A lub/i typu B oraz współczynników korelacji obu menzurandów wejściowego i szacowanego pośrednio menzurandu wyjściowego. Rozważania zilustrowano wykresami dla przypadków charakterystycznych pomiarów dwuparametrowych. W części 2. omówiono przykłady estymacji macierzy kowariancji w pomiarach pośrednich 2D o liniowej funkcji przetwarzania na przykładzie sumy i różnicy oraz o przetwarzaniu nieliniowym wg funkcji kwadratowej – pomiary mocy i dla ilorazu – pomiar rezystancji i modułu impedancji. Wykazano, że uwzględnianie korelacji typu A i B danych pomiarowych, zwiększa wiarygodność oceny dokładności pomiarów pośrednich wieloparametrowych.

Słowa kluczowe: pomiary wielowymiarowe, menzurand 2D, skorelowanie niepewności składowych typów A oraz B, propagacja wektorowa wariancji, wypadkowy współczynnik korelacji

1. Wprowadzenie

W części 1. przedstawiono rozszerzoną metodę szacowania niepewności w pośrednich pomiarach wieloparametrowych. Uwzględnia ona skorelowanie dwu rodzajów: typu A – wyznaczone podobnie, jak składowe niepewności z danych pomiarowych oraz typu B – szacowane heurystycznie. W części 2. omówi się przykłady zastosowania tej metody do wyznaczanie niepewności pomiarów dwuparametrowych (2D) o kilku podstawowych funkcjach przetwarzania: liniowej, kwadratowej, iloczynu i ilorazu. Dla wygody Czytelnika zestawiono podstawowe wzory stosowane w przykładach omawianych w tej części.

W pomiarach wieloparametrowych mierzy się bezpośrednio n wielkości ze sobą skojarzonych, które stanowią menzurand

wejściowy modelowany n -parametrowym wektorem losowym \mathbf{X} . Z otrzymanych danych pomiarowych wyznacza się badany pośrednio menzurand wyjściowy opisany m -parametrowym wektorem losowym \mathbf{Y} . Oba menzurandy związane są funkcją wielowymiarową $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$. W przypadku ogólnym elementy mierzonego menzurandu \mathbf{X} są ze sobą skojarzone i skorelowane. Do oceny dokładności menzurandu \mathbf{Y} wyznacza się jego macierz kowariancji \mathbf{U}_Y opisaną wzorem

$$\mathbf{U}_Y = \mathbf{S} \mathbf{U}_X \mathbf{S}^T \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{S} – macierz wrażliwości, \mathbf{U}_X , \mathbf{U}_Y – macierze kowariancji wektorów \mathbf{X} i \mathbf{Y} , opisane następującymi wzorami:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (1a)$$

Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warsza, zlw1936@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 19.02.2019 r., przyjęty do druku 28.03.2019 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

$$U_X = \begin{bmatrix} u_{x1}^2 & \dots & \rho_{x1n} u_{x1} u_{xn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{x1n} u_{xn} u_{x1} & \dots & u_{xn}^2 \end{bmatrix}, \quad (1b)$$

$$U_Y = \begin{bmatrix} u_{y1}^2 & \dots & \rho_{y1m} u_{y1} u_{ym} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{y1m} u_{ym} u_{y1} & \dots & u_{ym}^2 \end{bmatrix}, \quad (1c)$$

Podstawą oceny dokładności pomiarów każdej wielkości są niepewności bezwzględne u_{xi} i u_{yi} , tj. standardowe odchylenia skorygowanych danych pomiarowych. Według GUM są to sumy geometryczne niepewności składowych typów A i B:

$$u_{xi}^2 = u_{xiA}^2 + u_{xiB}^2, \quad (2a)$$

$$u_{yi}^2 = u_{yiA}^2 + u_{yiB}^2. \quad (2b)$$

Wzory (2a, b) mają takie same postacie, jak wariancje spłotu dwu zmiennych losowych o rozkładach nieskorelowanych. Niepewności typu A wyznacza się metodami statystycznymi dla rozrzutu danych pomiarowych, a niepewność typu B estymuje się heurystycznie. Jest ona odchyleniem standardowym zrandomizowanych wpływów wielu różnego rodzaju oddziaływań o wartościach nieznanach w trakcie eksperymentu pomiarowego. Oddziaływania te powodują, że w danych pomiarowych zbieranych w przeprowadzanym eksperymencie mogą wystąpić stałe lub wolnozmiennie (np. dryft) dodatkowe, o nieznanach wartościach odchylenia od estymatora wielkości, czyli błędy systematyczne. Mogą one pojawiać się w długim znamionowym okresie ważności kalibracji przyrządów. Stąd, podobnie jak dla składowych niepewności, można wyróżnić dwa rodzaje skorelowania – typu A oraz typu B. Współczynniki korelacji typu A wyznacza się z danych pomiarowych. Jest to możliwe, gdy wielkości mierzy się synchronicznie i przy równomiernym lub innym znanym rodzaju próbkowania. Dane pomiarowe otrzymuje się wówczas jako szeregi statystyczne, z których wyznacza się niepewności typu A (z uwzględnieniem autokorelacji [3]) oraz współczynniki korelacji ρ_{ijA} . Zaś współczynniki korelacji ρ_{ijB} , czyli typu B, podobnie jak niepewności typu B, są szacowane heurystycznie. Skorelowanie wielkości mierzonych jest łącznym wynikiem skorelowania danych opisanych oboma współczynnikami typu A i B. W pomiarach wieloparametrowych dla obu macierzy kowariancji otrzymuje się zależność

$$U_X = U_{XA} + U_{XB} \quad (3a)$$

$$U_Y = U_{YA} + U_{YB} \quad (3b)$$

$$U_X = S U_X S^T = S (U_{XA} + U_{XB}) S^T \quad (4a)$$

$$U_Y = S U_{YA} S^T + S U_{YB} S^T \quad (4b)$$

Jeśli wyznacza się tylko samą macierz U_Y , to z obu wzorów (4a) i (4b) otrzymuje się takie same wyniki. Natomiast niepewności składowe typów A i B elementów mierzonych wyjściowego Y i współczynniki korelacji ρ_{ijA} , ρ_{ijB} każdego z tych typów występują w macierzach składowych U_{YA} , U_{YB} jako składnikach wzoru (4b) [12].

2. Parametry mierzonych dwuelementowych (2D)

Wartości x_1 , x_2 i elementy macierzy kowariancji U_{XA} dwuelementowego (2D) mierzonych $X = [x_1, x_2]^T$ otrzymuje się z bezpośrednich jego pomiarów. Macierz kowariancji U_X można przedstawić w dwu postaciach: zwartej i rozwiniętej z wyróżnieniem parametrów typu A oraz B, tj.:

$$U_X \equiv \begin{bmatrix} u_{x1}^2 & \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} \\ \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} & u_{x2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 + u_{1B}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2A}^2 + u_{2B}^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie: u_{x1} , u_{1A} , u_{1B} i u_{x2} , u_{2A} , u_{2B} – niepewności bezwzględne wielkości x_1 i x_2 i ich składowe.

Macierz U_X ma następujące macierze składowe:

$$U_{XA} = \begin{bmatrix} u_{x1A}^2 & \rho_A u_{x1A} u_{x2A} \\ \rho_A u_{x1A} u_{x2A} & u_{x2A}^2 \end{bmatrix}, \quad (5a)$$

$$U_{XB} = \begin{bmatrix} u_{x1B}^2 & \rho_B u_{x1B} u_{x2B} \\ \rho_B u_{x1B} u_{x2B} & u_{x2B}^2 \end{bmatrix}. \quad (5b)$$

Niepewności u_{x1} , u_{x2} dwuelementowego mierzonych X opisane są równaniami:

$$u_{x1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2, \quad (6a)$$

$$u_{x2}^2 = u_{2A}^2 + u_{2B}^2. \quad (6b)$$

Współczynnik korelacji $\rho_{x1,2}$ między x_1 i x_2 oraz między odchyleniami od ich estymatorów wartości wynosi:

$$\rho_{x1,2} = \frac{\rho_A u_{x1A} u_{x2A} + \rho_B u_{x1B} u_{x2B}}{\sqrt{u_{x1A}^2 + u_{x1B}^2} \sqrt{u_{x2A}^2 + u_{x2B}^2}}, \quad (6c)$$

gdzie: ρ_A i ρ_B – współczynniki korelacji pomiędzy odchyleniami x_1 i x_2 o niepewnościach u_{x1A} , u_{x2A} oraz u_{x1B} , u_{x2B} .

Podobne zależności zachodzą dla macierzy U_Y dwuelementowego (2D) mierzonych wyjściowego Y .

3. Wzory dla niepewności względnych

Wzory opisujące niepewności dla zakresów wielkości mierzonych i multiplikatywnych funkcji przetwarzania są prostsze przy stosowaniu niepewności względnych $u_{rel\ i} \equiv \delta_i = u_i/x_i$. Równanie propagacji ich wariancji ma podobną postać jak (1) dla niepewności bezwzględnych [7]:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{aY}} = \mathbf{S}_{\boldsymbol{\delta}} \cdot \mathbf{U}_{\boldsymbol{\delta X}} \cdot \mathbf{S}_{\boldsymbol{\delta}}^T \quad (7)$$

gdzie: $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\delta X}}$ i $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\delta Y}}$ – macierze kowariancji wektorów \mathbf{X} i \mathbf{Y} oraz $\mathbf{S}_{\boldsymbol{\delta}}$ – macierz wrażliwości dla niepewności względnych.

Dla obu menzurandów 2D macierze te są następujące:

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\delta X}} = \begin{bmatrix} \delta_{x1}^2 & \rho_{x1,2} \delta_{x1} \delta_{x2} \\ \rho_{x1,2} \delta_{x1} \delta_{x2} & \delta_{x2}^2 \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\delta Y}} = \begin{bmatrix} \delta_{y1}^2 & \rho_{y1,2} \delta_{y1} \delta_{y2} \\ \rho_{y1,2} \delta_{y1} \delta_{y2} & \delta_{y2}^2 \end{bmatrix}, \quad (8b)$$

$$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{x_2}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{x_1}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{x_2}{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (8c)$$

Standardowe niepewności względne też sumują się geometrycznie, tj.:

$$\delta_{x1}^2 = \delta_{1A}^2 + \delta_{1B}^2, \quad (9a)$$

$$\delta_{x2}^2 = \delta_{2A}^2 + \delta_{2B}^2. \quad (9b)$$

Współczynnik korelacji $\rho_{x1,2}$ o takiej samej wartości dla niepewności bezwzględnych i względnych, opisuje wzór:

$$\begin{aligned} \rho_{x1,2} &= \frac{\rho_{xA} u_{x1A} u_{x2A} + \rho_{xB} u_{x1B} u_{x2B}}{u_{x1} u_{x2}} = \\ &= \rho_{xA} \frac{\delta_{x1A}}{\delta_{x1}} \frac{\delta_{x2A}}{\delta_{x2}} + \rho_{xB} \frac{\delta_{x1B}}{\delta_{x1}} \frac{\delta_{x2B}}{\delta_{x2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie niepewności względne: $\delta_{x1} = u_{x1}/x_1$, $\delta_{x1A} = u_{x1A}/x_1$, $\delta_{x1B} = u_{x1B}/x_1$ i $\delta_{x2} = u_{x2}/x_2$, $\delta_{x2A} = u_{x2A}/x_2$, $\delta_{x2B} = u_{x2B}/x_2$.

Wzory dla niepewności i współczynnika korelacji menzurandu \mathbf{Y} mają podobne postacie.

4. Niepewności menzurandu 2D przetwarzanego wg funkcji $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X})$

Wzory dla dwuelementowego menzurandu $\mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T$ wynikają pośrednio z przetwarzania danych menzurandu $\mathbf{X} = [x_1, x_2]^T$ za pomocą funkcji $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X})$. Wartości x_1 , x_2 i elementy macierzy kowariancji $\mathbf{U}_{\mathbf{X}}$ menzurandu \mathbf{X} otrzymuje się z bezpośrednich jego pomiarów. Wartości y_1 , y_2 wyjściowego menzurandu \mathbf{Y} będą miały niepewności u_{y1} , u_{y2} i współczynnik korelacji $\rho_{y1,2}$. Do wyznaczenia niepewności korzysta się z ogólnego macierzowego równania propagacji niepewności (1). Funkcję przetwarzania \mathbf{G} linearyzuje się do postaci macierzy wrażliwości $\mathbf{S}_{\mathbf{G}}$ o wymiarze $[2 \times 2]$ i otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\mathbf{Y}} &\equiv \begin{bmatrix} u_{y1}^2 & \rho_{y1,2} u_{y1} u_{y2} \\ \rho_{y1,2} u_{y1} u_{y2} & u_{y2}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1}^2 & \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} \\ \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} & u_{x2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: macierz funkcjonału

$$\mathbf{S}_{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – współczynniki.

Po wykonaniu działań wg wzorów (4a) lub (4b) dla zmiennych y_1, y_2 otrzymuje się niepewności

$$u_{y1}^2 = \alpha_1^2 u_{x1}^2 + \alpha_2^2 u_{x2}^2 + 2\rho_{x1,2} \alpha_1 \alpha_2 u_{x1} u_{x2} \quad (13)$$

$$u_{y2}^2 = \beta_1^2 u_{x1}^2 + \beta_2^2 u_{x2}^2 + 2\rho_{x1,2} \beta_1 \beta_2 u_{x1} u_{x2} \quad (14)$$

oraz współczynnik korelacji $\rho_{y1,2}$:

$$\rho_{y1,2} = \frac{\alpha_1 \beta_1 u_{x1}^2 + \alpha_2 \beta_2 u_{x2}^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2}}{u_{x1} u_{x2}} \quad (15)$$

Z (10a) wynika, że $\rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} = \rho_{xA} u_{x1A} u_{x2A} + \rho_{xB} u_{x1B} u_{x2B}$ i tę zależność można wykorzystać w dalszej analizie.

5. Niepewność pomiarów sumy i różnicy wielkości wyjściowych

Wyznaczymy niepewności składowych menzurandu $\mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T$ wynikające z przetworzenia danych pomiarowych $\mathbf{X} = [x_1, x_2]^T$ uzyskanych w dwu eksperymentach o różnych warunkach wpływających ($u_{1B} \neq u_{2B}$). Dla $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X})$ $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X})$.

macierz wrażliwości $\mathbf{S}_{\mathbf{G}} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$ ma następujące współczynniki:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = -1. \quad (16)$$

Niepewności otrzymane z (13) i (14) przy uproszczonych indeksach $u_{xiA} \equiv u_{iA}$ (dla $i = 1, 2$) zależą od ρ_A, ρ_B , tj.:

$$u_{y1}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2 + u_{2A}^2 + u_{2B}^2 + 2(\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}) \quad (17a)$$

$$u_{y2}^2 = u_{1A}^2 + u_{1B}^2 + u_{2A}^2 + u_{2B}^2 - 2(\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B}) \quad (17b)$$

Oznaczając wariancję sumy i różnicy nieskorelowanych wielkości wyjściowych przez $u_0^2 \equiv u_{1A}^2 + u_{1B}^2 + u_{2A}^2 + u_{2B}^2$ z równań (17a, b) otrzymuje się proste wzory:

$$u_{(x_1+x_2)} = \sqrt{u_0^2 + 2(\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B})}; \quad (18a)$$

$$u_{(x_1-x_2)} = \sqrt{u_0^2 - 2(\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B})} \quad (18b)$$

Przy $\rho_A > 0$ i $\rho_B > 0$ niepewność sumy zwiększa się, a dla różnicy – zmniejsza się w porównaniu z wartościami dla modelu bez korelacji.

Wielkości wyjściowe $y_1 = x_1 + x_2$ i $y_2 = x_1 - x_2$ są skorelowane ze współczynnikiem korelacji

$$\rho_{(x_1+x_2, x_1-x_2)} = \frac{u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2}{u_{(x_1+x_2)} u_{(x_1-x_2)}}. \quad (19)$$

Jeśli nie ma skorelowania typu B, tj. $\rho_B = 0$, to niepewności są następujące

$$u_{(x_1+x_2)} = \sqrt{u_0^2 + 2\rho_A u_{1A} u_{2A}}, \quad (20a)$$

$$u_{(x_1-x_2)} = \sqrt{u_0^2 - 2\rho_A u_{1A} u_{2A}}. \quad (20b)$$

Niepewność sumy dwu wielkości jest mniejsza niż w (17a), a niepewności ich różnicy – większa niż w (17b).

Gdy dla dwu wielkości mierzonych łączny współczynnik korelacji $\rho_{x1,2} = 1$ (np. dla pomiarów tym samym przyrządem w identycznych warunkach $\rho_B = 1$ i nieskorelowanych danych eksperymentalnych $\rho_A = 0$), to

$$u_{(x_1+x_2)} = \sqrt{u_0^2 + 2u_1 u_2} = u_{x_1} + u_{x_2} \quad (21a)$$

$$u_{(x_1-x_2)} = \sqrt{u_0^2 - 2u_1 u_2} = |u_{x_1} - u_{x_2}| \quad (21b)$$

Niepewność sumy dwu wielkości jest więc sumą algebraiczną ich niepewności, a niepewność różnicy – modulem różnicy niepewności tych wielkości. Przykładem z praktyki przemysłowej jest niepewność pomiarów wartości średniej i różnicy dwóch temperatur na wlocie i wylocie wymiennika ciepła [5, 8].

6. Niepewność pomiarów mierzandów 2D o funkcji kwadratowej

Różniczkowanie kwadratowej funkcji przetwarzania $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X}) = [x_1^2, x_2^2]^T$ mierzandów \mathbf{X} daje następujące współczynniki w macierzy wrażliwości \mathbf{S}_G tej funkcji:

$$\alpha_1 = 2x_1, \quad \beta_2 = 2x_2, \quad \alpha_2 = \beta_1 = 0. \quad (22)$$

Jeśli dla uproszczenia rozważań przyjmie się, że dla \mathbf{X} występują tylko niepewności względne typu B, jednakowe przy pomiarze obu wielkości (składnik addytywny niepewności jest pomijalny), to niepewności bezwzględne \mathbf{Y} są odpowiednio równe:

$$u_{y1} = 2x_1 u_{B1} \sqrt{1 + \eta_1^2} = 2x_1 u_{x1} \quad (23a)$$

$$u_{y2} = 2x_2 u_{B2} \sqrt{1 + \eta_2^2} = 2x_2 u_{x2} \quad (23b)$$

gdzie: $\eta_i = u_{iA}/u_{Bi}$ dla $i = 1, 2$.

Dla niepewności względnych δ_{yi} otrzymuje się znane formuły podawające niepewności względne δ_{xi} :

$$\delta_{yi} = \frac{u_{yi}}{x_i^2} = \frac{2u_{xi}}{x_i} = 2\delta_{xi}, \quad \text{gdzie } i = 1, 2. \quad (24)$$

Współczynnik korelacji jest określony następująco:

$$\rho_{y1,2} = \frac{\alpha_1 \beta_2 (\rho_A u_{1A} u_{2A} + \rho_B u_{1B} u_{2B})}{u_{y1} u_{y2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_1^2} \sqrt{1 + \eta_2^2}} \quad (25)$$

Wzór (25) pokrywa się z (6c), tj. kwadraty zmiennych wyjściowych są skorelowane tak samo, jak zmienne wyjściowe.

Powyżej przyjęto, że z danych pomiarowych wynikł brak skorelowania typu A mierzandów, tj. $\rho_A = 0$, oraz że skorelowanie typu B, tj. $\rho_B = 1$ i niepewności względne w obu pomiarach są jednakowe. Korelacja kwadratów zmiennych jest taka sama, jak dla wartości zmiennych i wyjściowe niepewności względne, zgodnie z oczekiwaniami, są dwukrotnie większe niż dla wielkości wejściowych.

7. Niepewności pomiarów różnych funkcji mocy

7.1. Niepewność pomiaru mocy

Moc P wydzielaną na rezystancji (lub impedancji Z) opisuje równanie

$$P = I^2 R \quad (26)$$

Dla dwu serii obserwacji pomiarowych z (26) uzyskuje się niepewności względne w postaci:

$$\delta_{Pi} = 2\delta_{Ii} = \frac{2\sqrt{u_{IAi}^2 + u_{IBi}^2}}{I_i}, \quad \text{gdzie } i = 1, 2. \quad (27)$$

gdzie: u_{IAi} , u_{IBi} są niepewnościami bezwzględnymi odpowiednio typu A i B dla pomiarów prądu I_i ($i=1, 2$).

Z (25) wynika taki sam współczynnik korelacji, jak dla wielkości wejściowych, tj. dla pomiarów prądu:

$$\rho_{P1,2} = \rho_{I1,2} = \frac{\rho_{IA} u_{IA1} u_{IA2} + \rho_{IB} u_{IB1} u_{IB2}}{\sqrt{u_{IA1}^2 + u_{IB1}^2} \sqrt{u_{IA2}^2 + u_{IB2}^2}} \quad (28)$$

7.2. Niepewność ilorazu oraz różnicy mocy

Dla ilorazu mocy $P_1/P_2 = I_1^2/I_2^2$ oraz różnicy mocy $P_1 - P_2 = R(I_1^2 - I_2^2)$ jako wielkości wyjściowych funkcja $Y = G(X)$ ma postać:

$$Y = \left[I_1^2/I_2^2, R(I_1^2 - I_2^2) \right]^T \quad (29)$$

gdzie: elementy $x = [I_1, I_2]^T$ są skorelowanymi prądami. Ich macierz kowariancji ma postać:

$$U_I = \begin{bmatrix} u_{I_1}^2 & \rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} \\ \rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} & u_{I_2}^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Z (1), (29) i (30) otrzymuje się wielkości wyjściowe określone następująco:

$$U_Y = \begin{bmatrix} 2I_1/I_2^2 & -2I_1^2/I_2^3 \\ 2RI_1 & -2RI_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{I_1}^2 & \rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} \\ \rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} & u_{I_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2I_1/I_2^2 & 2RI_1 \\ -2I_1^2/I_2^3 & -2RI_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Z (31) wynika, że niepewność bezwzględna stosunku mocy P_1/P_2 (wielkość bezwymiarowa) wynosi:

$$u_{P_1/P_2} = 2 \frac{I_1}{I_2^2} \sqrt{u_{I_1}^2 - 2\rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} I_1/I_2 + u_{I_2}^2 I_1^2/I_2^2} \quad (32)$$

Z (32) otrzymuje się niepewność względną stosunku mocy, która wynosi:

$$\delta_{P_1/P_2} = u_{P_1/P_2} / (I_1^2/I_2^2) = 2 \sqrt{\delta_{I_1}^2 - 2\rho_{I_1,2} \delta_{I_1} \delta_{I_2} + \delta_{I_2}^2} \quad (33)$$

gdzie niepewności względne oznaczono przez $\delta_{I_i} = u_{I_i}/I_i$ dla $i = 1, 2$.

Na rysunku 1 przedstawiono zależność względnej niepewności stosunku mocy δ_{P_1/P_2} w funkcji niepewności względnych $\delta_{I_1}, \delta_{I_2}$ pomiarów prądów dla różnych współczynników ich skorelowania. Z rysunku 1 wynika, że najmniejsze względne niepewności stosunku mocy występują dla największego skorelowania prądów ze znakiem dodatnim, podczas gdy największe wartości tych niepewności pojawiają się dla ujemnych współczynników korelacji i osiągają maksimum przy pełnej korelacji ze znakiem ujemnym.

Z równania (31) otrzymuje się niepewność różnicy mocy:

$$u_{P_1-P_2} = 2R \sqrt{I_1^2 u_{I_1}^2 - 2\rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} I_1 I_2 + u_{I_2}^2 I_2^2} \quad (34)$$

Po prostych przekształceniach (34) wyznacza się niepewność względną różnicy mocy:

$$\delta_{P_1-P_2} = \frac{u_{P_1-P_2}}{R(I_1^2 - I_2^2)} = 2 \frac{\sqrt{\delta_{I_1}^2 - 2\rho_{I_1,2} \delta_{I_1} \delta_{I_2} \varepsilon^2 + \delta_{I_2}^2 \varepsilon^4}}{1 - \varepsilon^2} \quad (35)$$

gdzie przez ε oznaczono $\varepsilon = I_2/I_1$.

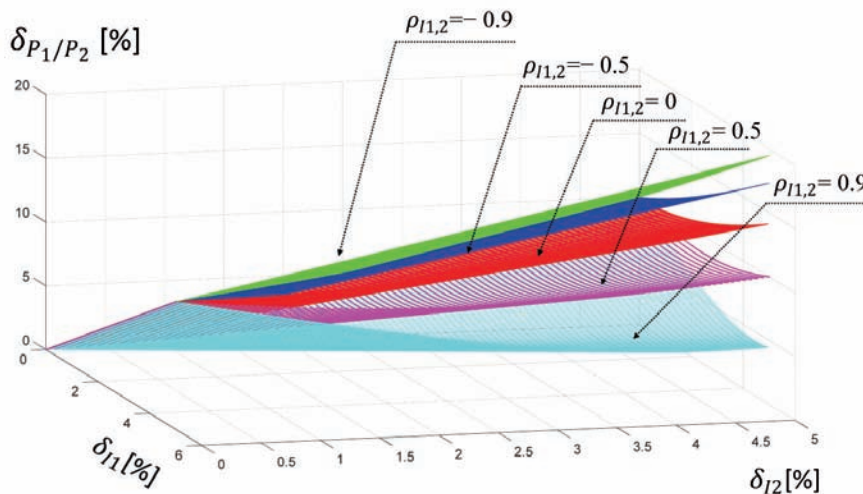
Na rysunku 2 przedstawiono niepewność względną różnicy mocy (35) jako funkcję błędów względnych obu prądów.

Współczynnik korelacji między wielkościami wyjściowymi można wyznaczyć z (31):

$$\rho_{P_1/P_2, P_1-P_2} = \frac{\varepsilon(u_{I_1}^2 + u_{I_2}^2) - (1 + \varepsilon^2)\rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2}}{\sqrt{\varepsilon^2 u_{I_1}^2 - 2\varepsilon \rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} + u_{I_2}^2} \sqrt{u_{I_1}^2 - 2\varepsilon \rho_{I_1,2} u_{I_1} u_{I_2} + \varepsilon^2 u_{I_2}^2}} \quad (36)$$

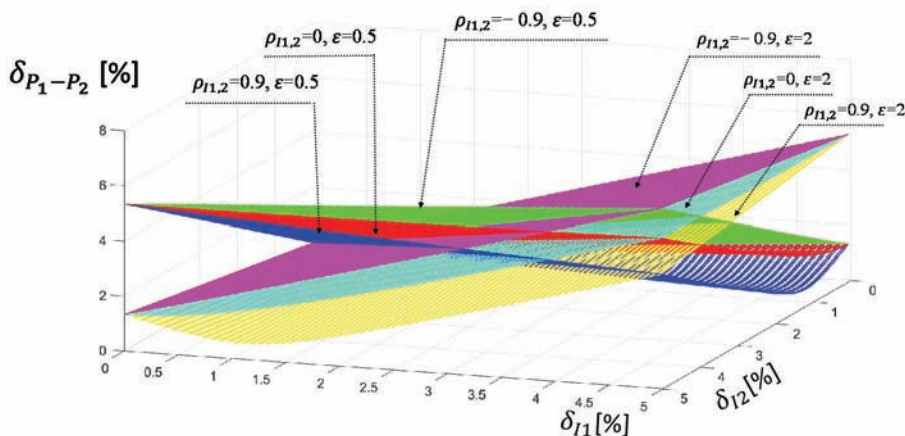
Wyrażając współczynnik korelacji przez niepewności względne otrzymuje się:

$$\rho_{P_1/P_2, P_1-P_2} = \frac{\delta_{I_1}^2 - (1 + \varepsilon^2)\rho_{I_1,2} \delta_{I_1} \delta_{I_2} + \varepsilon^2 \delta_{I_2}^2}{\sqrt{\delta_{I_1}^2 - 2\rho_{I_1,2} \delta_{I_1} \delta_{I_2} + \delta_{I_2}^2} \sqrt{\delta_{I_1}^2 - 2\rho_{I_1,2} \delta_{I_1} \delta_{I_2} \varepsilon^2 + \delta_{I_2}^2 \varepsilon^4}} \quad (37)$$



Rys. 1. Zależność niepewności względnej stosunku mocy w funkcji niepewności względnych pomiarów prądów dla różnych współczynników ich skorelowania

Fig. 1. Dependence of relative uncertainty of power ratio as function of currents relative uncertainties for different correlation coefficients between these currents



Rys 2. Zależność niepewności względnej różnicy mocy w funkcji niepewności względnych pomiarów prądów dla różnych współczynników skorelowania między tymi prądami ρ_{I_1, I_2} i parametru ϵ

Fig. 2. Dependence of relative uncertainty of power difference as function of currents relative uncertainties for different correlation coefficients between currents ρ_{I_1, I_2} and parameter ϵ

Dla $\epsilon \rightarrow 1$, gdy występuje zbieżność prądów $I_1 \rightarrow I_2$, współczynnik korelacji $\rho_{P_1/P_2, P_1-P_2} \rightarrow 1$. Wówczas stosunek mocy i różnica mocy są wielkościami w pełni skorelowanymi. W przypadku, gdy niepewności względne pomiarów obu prądów są identyczne, tj. $\delta_{I_1} = \delta_{I_2}$, to

$$\rho_{P_1/P_2, P_1-P_2} = \frac{1 - (1 + \epsilon^2) \rho_{I_1, I_2} + \epsilon^2}{\sqrt{2 - 2\rho_{I_1, I_2}} \sqrt{1 - 2\rho_{I_1, I_2}\epsilon^2 + \epsilon^4}} \quad (38)$$

Na rysunku 3 przedstawiono zależność współczynnika korelacji $\rho_{P_1/P_2, P_1-P_2}$ ze wzoru (38) w funkcji współczynnika korelacji ρ_{I_1, I_2} i stosunku prądów ϵ . Z analizy wynika, że największe wartości współczynnika korelacji występują dla obszarów w pobliżu $\epsilon \approx 1$ i ujemnych współczynników korelacji $\rho_{I_1, I_2} \approx -1$.

8. Niepewność ilorazu na przykładzie pomiarów rezystancji

Niepewność dwuparametrowych pomiarów ilorazu dwu wielkości o skojarzonych niepewnościach składowych. rozpatrzy się na przykładzie pomiarów rezystancji lub modułu impedancji wykonywanych w tych samych warunkach otoczenia. Niezależnymi przyrządami mierzy się wartości prądu i napięcia przy prądzie stałym (DC) lub ich wartości skuteczne dla

prądu przemiennego (AC). Niepewności pomiaru składowych impedancji i admitancji dwójnika omówione są w innych publikacjach autorów [9, 10].

Podstawowe równanie jest następujące:

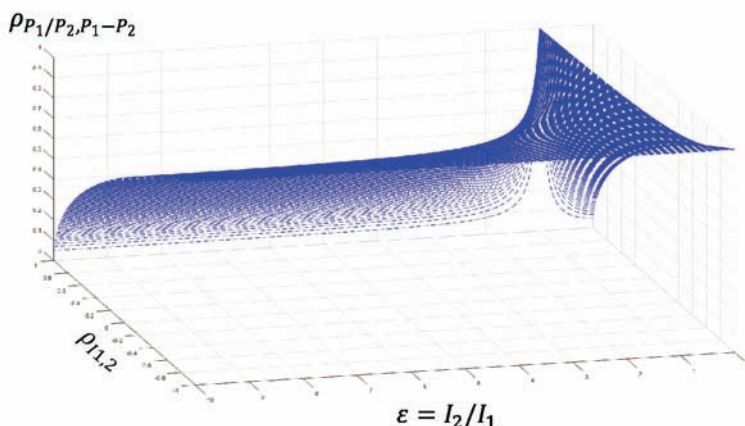
$$V = I \cdot Z, \text{ stąd } Z = V/I \quad (39)$$

gdzie: Z – moduł impedancji (lub rezystancja R dla prądu DC); V, I – odpowiednio wartości napięcia i prądu (wartości skuteczne dla prądu przemiennego AC).

Przy zasilaniu obwodu pomiarowego prądem stałym ze źródła stabilizowanego, wyniki obserwacji w pomiarach technicznych często bywają powtarzalne. Natomiast przy prądzie przemiennym rozrzut wyników powoduje na przykład zasilanie układu z niestabilizowanej sieci lub oddziaływanie pól elektromagnetycznych przy słabych sygnałach. Współczynnik skorelowania typu A można wyznaczyć przy synchronicznych pomiarach U i I . Przy uwzględnianiu skorelowania w pomiarach $|Z|$ uzyska się też większa dokładność, gdyż niepewność pomiarów $|Z|$ będzie mniejsza.

Wyznaczenie niepewności pomiaru modułu impedancji (rezystancji R dla DC) będzie tu prostsze dla niepewności względnych z użyciem zmodyfikowanego macierzowego równania propagacji wariacji wg wzoru (7) [6, 7]:

$$U_{\hat{a}Z} = S_{\delta} \cdot U_{\delta VI} \cdot S_{\delta}^T \quad (40)$$



Rys. 3. Współczynnik korelacji jako funkcja współczynnika korelacji i stosunku prądów

Fig. 3. Dependence of correlation coefficients on of correlation coefficient and ratio of currents

gdzie: $U_{\delta VI}$ i $U_{\delta Z}$ to macierze kowariancji wielkości wejściowych i wyjściowych oraz S_{δ} – macierz wrażliwości. Są one następujące:

$$U_{\delta Z} = \begin{bmatrix} \delta_{Z1}^2 & \rho_{Z1,2} \delta_{Z1} \delta_{Z2} \\ \rho_{Z1,2} \delta_{Z1} \delta_{Z2} & \delta_{Z2}^2 \end{bmatrix}, \quad (40a)$$

$$U_{\delta VI} = \begin{bmatrix} \delta_{V1}^2 & \rho_V \delta_{V1} \delta_{V2} & 0 & 0 \\ \rho_V \delta_{V1} \delta_{V2} & \delta_{V2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{I1}^2 & \rho_I \delta_{I1} \delta_{I2} \\ 0 & 0 & \rho_I \delta_{I1} \delta_{I2} & \delta_{I2}^2 \end{bmatrix}, \quad (40b)$$

$$S_{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial V_1} & \frac{V_2}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial V_2} & \frac{I_1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial I_1} & \frac{I_2}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial I_2} \\ \frac{V_1}{Z_1} \frac{\partial Z_2}{\partial V_1} & \frac{V_2}{Z_1} \frac{\partial Z_2}{\partial V_2} & \frac{I_1}{Z_1} \frac{\partial Z_2}{\partial I_1} & \frac{I_2}{Z_1} \frac{\partial Z_2}{\partial I_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (40c)$$

Po rozwiązaniu równania (40) otrzymuje się niepewności względne w postaciach:

$$\delta_{Z1}^2 = \delta_{V1}^2 + \delta_{I1}^2, \quad (41a)$$

$$\delta_{Z2}^2 = \delta_{V2}^2 + \delta_{I2}^2. \quad (41b)$$

i współczynnik korelacji

$$\rho_{Z1,2} = \frac{\rho_V \delta_{V1} \delta_{V2} + \rho_I \delta_{I1} \delta_{I2}}{\delta_{Z1} \delta_{Z2}}. \quad (42)$$

Aby dla (41a, b) wyznaczyć formuły jako jawne funkcje niepewności typu A i B, odpowiednio dla prądu i napięcia, korzysta się z propagacji macierzy kowariancji dla napięcia V i prądu I ze sobą korelujących w dwu eksperymentach pomiarowych. Niepewności względne dla dwóch napięć i dwóch prądów wyrażają się przez składowe względne typu A i B:

$$\delta_{Vi}^2 = \delta_{ViA}^2 + \delta_{ViB}^2, \quad (43a)$$

$$\delta_{Ii}^2 = \delta_{IiA}^2 + \delta_{IiB}^2. \quad (43b)$$

Współczynniki korelacji między dwoma pomiarami napięć i prądów określone przez (8c) wynoszą:

$$\rho_W = \frac{\rho_{WA} \delta_{W1A} \delta_{W2A} + \rho_{WB} \delta_{W1B} \delta_{W2B}}{\delta_{W1} \delta_{W2}}, \quad (44)$$

gdzie $W = A$ dla współczynnika korelacji prądów i $W = V$ dla współczynnika korelacji napięć.

Niepewności względne pomiaru impedancji (43a, b) można przedstawić za pomocą względnych niepewności składowych napięć i prądów (43a, b) w następującej postaci:

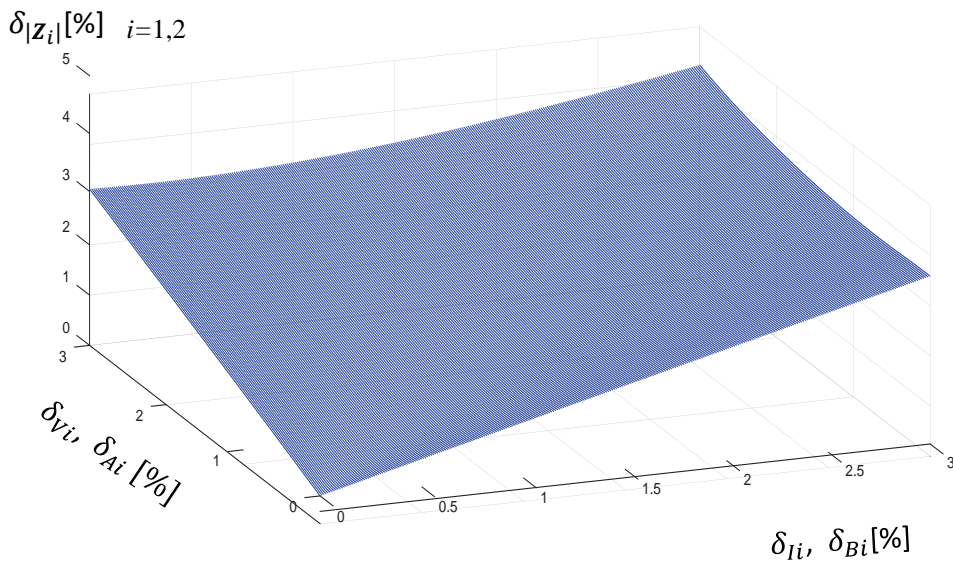
$$\delta_{|Z_i|}^2 = \delta_{V1A}^2 + \delta_{V1B}^2 + \delta_{I1A}^2 + \delta_{I1B}^2, \quad (45a)$$

$$\delta_{|Z_2|}^2 = \delta_{V2A}^2 + \delta_{V2B}^2 + \delta_{I2A}^2 + \delta_{I2B}^2. \quad (45b)$$

Stąd niepewności bezwzględne wynoszą odpowiednio:

$$u_{Zi}^2 = |Z_i|^2 \delta_{Zi}^2, \quad i = 1, 2 \quad (46)$$

Jeśli wszystkie niepewności są sobie równe $\delta_{ViA} = \delta_{ViB} = \delta_{IiA} = \delta_{IiB} = \delta$, to $\delta_{|Z_i|} = 2\delta$ i $i = 1, 2$.



Rys.4. Zależność względnej niepewności pomiaru modułu impedancji w funkcji niepewności względnych: napięcia i prądu albo składowych niepewności względnych typu A i B

Fig.4. Dependence of relative uncertainty impedance measurements as a function of relative uncertainties of voltage and current or components relative uncertainties type A and B

W ogólnym przypadku niepewności względne pomiaru impedancji można analizować jako sumę względnych niepewności złożonych pomiarów prądów i napięć lub jako sumę geometryczną względnych niepewności składowych typu A i typu B, łącznie dla ilorazu napięcia i prądu.

Wypadkowy współczynnik korelacji (44) jako funkcja współczynników korelacji dla prądów i napięć ma postać:

$$\rho_{|z_{12}|} = \frac{\frac{\rho_{VA}\delta_{V1A}\delta_{V2A} + \rho_{VB}\delta_{V1B}\delta_{V2B}}{\delta_{V1}\delta_{V2}}\delta_{I1}\delta_{I2} + \frac{\rho_{IA}\delta_{I1A}\delta_{I2A} + \rho_{IB}\delta_{I1B}\delta_{I2B}}{\delta_{I1}\delta_{I2}}\delta_{V1}\delta_{V2}}{\delta_{|z1|}\delta_{|z2|}}. \quad (47)$$

Po uproszczeniu (47) otrzymuje się:

$$\rho_{|z_{12}|} = \frac{\rho_{VA}\delta_{V1A}\delta_{V2A} + \rho_{VB}\delta_{V1B}\delta_{V2B} + \rho_{IA}\delta_{I1A}\delta_{I2A} + \rho_{IB}\delta_{I1B}\delta_{I2B}}{\delta_{z1}\delta_{z2}}. \quad (48)$$

Zależność (48) znacznie upraszcza się, gdy $\delta_{V1A} = \delta_{V2A} = \delta_{V1B} = \delta_{V2B} = \delta_V$ oraz $\delta_{I1A} = \delta_{I2A} = \delta_{I1B} = \delta_{I2B} = \delta_I$ albo, gdy jest to równość dowolnych dwóch par niepewności względnych w liczniku formuły (49). Wówczas otrzymuje się wyrażenie

$$\rho_{|z_{12}|} = \frac{(\rho_{VA} + \rho_{VB})\delta_V^2 + (\rho_{IA} + \rho_{IB})\delta_I^2}{\delta_V^2 + \delta_I^2}, \quad (49)$$

które wyznacza w układzie 3D stałe płaszczyzny współczynnika korelacji $\rho_{|z_{12}|} = 1; 0,5; 0; -0,5; -1$ dla dwuwymiarowej zmienności niepewności względnych δ_V, δ_I i stałych współczynników korelacji napięć i prądów, np. $(\rho_{VA}, \rho_{VB}, \rho_{IA}, \rho_{IB}) = (1, 1, 1, 1); (0, 1, 0, 1); (1, 0, 1, 0); (1, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1); (0, 0, 0, 0); -1, -1, -1, -1); (-1, 0, -1, 0); (0, -1, 0, -1); (-1, -1, 0, 0); (0, 0, -1, -1)$.

9. Podsumowanie części 1 i 2

W części 1. tej pracy przedstawiono model niepewności pomiarów wieloparametrowych stanowiący rozwinięcie modelu zalecanego do stosowania przez BIPM, ISO i sześć innych organizacji międzynarodowych i przedstawionego w Suplemencie 2 [2] do przewodnika GUM [1]. Rozszerzony model omówiono na przykładzie pomiarów dwuparametrowych (2D). Wykazano, że korelacja wielkości mierzonych bezpośrednio, czyli wejściowych, może występować tylko między ich danymi opisanymi przez niepewności każdego z typów A lub/i B. Wyznaczono wzory dla współczynnika korelacji wielkości wyjściowych w przypadku ogólnym oraz dla kilku różnych relacji między danymi wejściowymi, w szczególności przy pełnej korelacji odchyłń danych opisanych szacowanymi heurystycznie niepewnościami typu B i przy jej braku.

W części 2. wyznaczono niepewności wielkości wyjściowych i współczynniki korelacji dla przykładów pomiarów pośrednich dwuparametrowych o różnych funkcjach przetwarzania, w tym dla liniowej funkcji 2D w postaci sumy i różnicy oraz podstawowych funkcji nieliniowych, kwadratowej i ilorazu. Zbadano zależność współczynnika korelacji wielkości wyjściowych od wartości parametrów wejściowych. W pracy podano też wykresy badanych zależności i szereg wniosków szczegółowych.

W przypadkach, gdy pomiary obu wielkości wejściowych odbywają się w jednakowych lub zbliżonych warunkach wpływających na ich wyniki, to można przewidywać, że zbiory odchyłń tych wielkości oszacowane niepewnościami typu B mogą być ze sobą skorelowane. Również może pojawić się skorelowanie między ich niepewnościami typu A, jeżeli są wspólne przyczyny rozrzutu danych pomiarowych wielkości mierzonych. Oba te rodzaje sko-

relowania należy uwzględnić w szacowaniu niepewności wielkości wyjściowych. Na przykład dla sumy wielkości wyjściowych i dodatniego współczynnika korelacji, niepewność wypadkowa będzie większa niż to wynika z sumowania geometrycznego obu typów niepewności wg GUM, a dla różnicy – mniejsza.

Rozważania i wnioski szczegółowe można uogólnić na pomiary dowolnie wielu wielkości skojarzonych. Według modelu matematycznego przyjętego dla niepewności pomiarów w GUM, korelacja wielkości mierzonych może wystąpić tylko osobno dla odchyłń od estymatorów wartości opisanych każdą ze składowych typu A oraz typu B. W pracy wykazano też, że uwzględnianie korelacji istotnie zwiększa wiarygodność oceny niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio lub wyznaczanych pośrednio.

Problemy występujące przy publikowaniu i zaokrąglaniu danych pomiarów wieloparametrowych omówiono w pracach [4, 5]. Wyznaczanie niepewności kilku podstawowych elektrycznych układów do pomiarów 2D i 3D oraz niepewność pomiarów składowych napięć i impedancji dla prądu przemiennego (AC) przedstawiono w pracach [6–12].

Zaproponowane rozszerzenie wektorowej metody zawartej w Suplemencie 2 Przewodnika GUM warto wdrożyć i z pożytkiem stosować w praktyce pomiarowej.

Bibliografia

1. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections.
2. Supplement 2 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement – Extension to any number of output quantities’. JCGM 102:2011 BIPM.
3. Warsza Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia, Oficyna Wydawnicza PIAP, 2016, ISBN 978-83-61278-31-3
4. Warsza Z.L., Ezhela V.V., O wyrażaniu i publikowaniu danych pomiarów wieloparametrowych – stan aktualny a potrzeby. “Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 10, 2011, 68–76.
5. Warsza Z.L.: *Evaluation and Numerical Presentation of the Results of Indirect Multivariate Measurements. Outline of Some Problems to be Solved*. [in:] Advanced Mathematical & Computational Tools in Metrology and Testing IX, ed. by Franco Pavese, Markus Bär et al, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol. 84, World Scientific Books 2012, Singapore, 418–425, DOI: 10.1142/9789814397957_0052.
6. Warsza Z., Idźkowski A., *O dokładności układów z czujnikami Pt do równoczesnych pomiarów różnicy temperatur i ich wartości średniej*, „Przemysł Chemiczny”, Vol. 96, Nr 2, 2017, 278–283, DOI: 10.15199/62.2017.2.20.
7. Warsza Z.L. Part 1, and Warsza Z.L., Puchalski J. Part 2: Estimation of uncertainty of indirect measurement in multi-parametric systems with few examples. PPT: in CD Proceedings of conference: Problems and Progress of Metrology ppm’18 Szczyrk 04-06. June 2018. Series: Conferences No. 22, Metrology Commission of Katowice Branch of the Polish Academy of Science
8. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estimation of vector uncertainties of multivariable indirect instrumental measurement systems on the star circuit example*, “Journal of Physics: Conference Series”, Vol. 1065, 2018, DOI: 10.1088/1742-6596/1065/5/052026.
9. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estymacja macierzowa niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich z przykładami*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 2, 2018, 31–40, DOI: 1014311/PAR_228/31-40.

10. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Ocena niepewności prostokątnych składowych impedancji wyznaczanych pośrednio z pomiarów składowych biegunowych i vice versa*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 3, 2018, 61–67, DOI: 10.14313/PAR_229/61.
11. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estymacja niepewności w pośrednich pomiarach wieloparametrowych na przykładzie dwu układów rezystancyjnych 3D*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 22, Nr 4, 2018, 31–38, DOI: 10.14313/PAR_230/31.
12. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estymacja niepewności wartości funkcji z pomiarów w punktach kontrolnych*, „Pomiary Automatyka Robotyka” R. 22, Nr 4, 2018, 39–50, DOI: 10.14313/PAR_230/39.
13. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Udoskonalona metoda wyznaczania niepewności w pomiarach wieloparametrowych. Część 1. Podstawy teoretyczne dla skorelowanych wielkości mierzonych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 23, Nr 1, 2019, 47–57, DOI: 10.14313/PAR_231/47.

Upgraded Method of the Estimation of Uncertainties in Multiparameter Measurements.

Part 2. Examples of Measurements of Correlated Quantities

Abstract: The two-part work presents an extended version of the vector method of uncertainty evaluation of multivariate measurements given in Supplement 2 to the GUM guide. The novelty is to consider correlations between data with individual uncertainty constituents of type A and/or type B of directly measured parameters. The first part of work discusses the theoretical basis of this method. General formulas for the covariance matrixes, input and output uncertainties and correlation coefficients were determined, and the formulas for several characteristic specific cases of 2D measurements. These considerations are illustrated by diagrams. This part discusses examples of covariance matrix estimation, including uncertainty and resultant correlation coefficient in indirect measurements of two correlated quantities. Measurements 2D with a linear processing function were analyzed on the example of sum and difference, and of nonlinear processing by quadratic functions of power measurements and quotient function – measurement of resistance and module of impedance. General conclusions were also given. The work shows that the inclusion of correlations of data with uncertainty components of the input measurand may significantly increase the reliability of the uncertainty assessment of indirectly determined output values.

Keywords: multivariate measurements, uncertainty and correlations components of the type A and type B, matrix propagation of variance, resultant correlation coefficient

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyzacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

