Wyznaczanie sposobu pakowania palet dla robota

Krzysztof Pieńkosz

Politechnika Warszawska, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, ul. Nowowiejska 15/19, 00-665 Warszawa

Streszczenie: Artykuł dotyczy zagadnienia automatycznego pakowania palet przez robota. W procesach logistycznych branży handlowej towary dostarczane z magazynów do sklepów sprzedaży detalicznej są transportowane na paletach. W artykule analizowane są sposoby układania i rozmieszczenia towarów na palecie pod kątem możliwości realizacji takich upakowań przez robota. Żeby robot mógł umieścić towar w danym miejscu na częściowo załadowanej palecie, musi mieć do tego miejsca swobodny dostęp, tzn. miejsce to nie może być zasłonięte. Zaproponowano grafowy model reprezentacji upakowań i sformalizowaną metodę wyznaczania kolejności ustawiania towarów na palecie przez robota. Pokazano też, że nie każdy wzór upakowania da się ułożyć przy użyciu robota.

Słowa kluczowe: trójwymiarowy problem pakowania pojemników, załadunek palet, pakowanie robotowe, grafy poprzedzania, sortowanie topologiczne

1. Wprowadzenie

Większość towarów dostarczanych do magazynów, a następnie do sklepów sprzedaży detalicznej jest transportowanych na paletach. Paleta to prostokątna platforma, na której umieszczane są produkty w celu ich składowania i przenoszenia. W magazynach na paletach przechowywane są towary jednego typu. Zamówienia ze sklepów dotyczą zwykle zróżnicowanego asortymentu. W związku z tym pojawia się konieczność załadowania palet z wymaganymi towarami przez odbiorców w ilościach zgodnych z ich zamówieniami. Dąży się przy tym, aby realizując poszczególne zamówienia, liczba wykorzystywanych i potem transportowanych palet była jak najmniejsza. Przy dużej różnorodności towarów proces ich układania na paletach może być złożony. Po pierwsze, trzeba określić sposób rozmieszczenia towarów na paletach, a po drugie kolejność ich pakowania przez robota. Artykuł dotyczy tej drugiej kwestii, czyli możliwości realizacji przez roboty pakujące wzorów upakowań wyznaczonych w procesie optymalizacji. *Wzór upakowania* to sposób rozmieszczenia towarów na paletach, czyli opis miejsc ich położenia.

W rozdziale 2 przedstawiono przegląd modeli, metod oraz technik najczęściej stosowanych przy pakowaniu elementów trójwymiarowych. W rozdziale 3 analizowana jest przydatność tych metod w przypadku wykorzystywania robotów pakujących do załadunku palet. Przedstawiono oryginalną metodę, która pozwala sprawdzić czy dany wzór upakowania może być ułożony przez robota i jeżeli jest to możliwe, to wyznacza kolej-

ność układania towarów uwzględniającą uwarunkowania pracy robota. Metoda ta wykorzystuje wprowadzoną przez autora koncepcję zagregowanych grafów poprzedzania oraz zaproponowany w tym rozdziale algorytm multisortowania topologicznego zbioru grafów. Wykazano, że nie wszystkie techniki pakowania przedstawione w rozdziale 2 gwarantują uzyskanie wzorów upakowań, które można potem ułożyć przy użyciu robota. Rozdział 4 zawiera końcowe wnioski i podsumowanie.

2. Modele i metody pakowania w przestrzeni trójwymiarowej

Towary pakowane na paletach są zwykle przewożone w opakowaniach zbiorczych, np. kartonach, zgrzewkach opakowanych folią, tackach itp. W dalszej części artykułu takie opakowania będziemy nazywać *elementami*. W większości mają one kształty zbliżone do prostopadłościanów. Dlatego w klasycznych modelach pakowania zakłada się, że pakowane elementy mają kształt prostopadłościanów i że będą układane na paletach równolegle do jej brzegów. Takie upakowania nazywane są w literaturze *upakowaniami ortogonalnymi*. Czasami mogą być dopuszczalne różne orientacje ułożenia elementów na palecie, tzn. mogą być one kładzione na dowolnych bokach. W praktyce zwykle jednak wymagane jest, żeby elementy były ustawiane pionowo na wyróżnionej spodniej powierzchni i jeżeli spód jest prostokątny, to wtedy możliwe są tylko dwa sposoby ich ustawienia.

Dwa podstawowe modele, które są wykorzystywane w przypadku pakowania na palety elementów o zróżnicowanych wymiarach, to *Trójwymiarowy Problem Pakowania Pojemników* (ang. *Three-dimensional Bin Packing Problem*), który będziemy dalej oznaczać 3D-BPP oraz *Problem Pakowania Pojedynczego Pojemnika* (ang. *Single Container Loading Problem*) oznaczany dalej jako SCLP. W modelu 3D-BPP, mając dany zbiór prostopadłościennych elementów N , należy zapakować wszystkie elementy z tego zbioru do jak najmniejszej liczby prostopadłościennych pojemników o określonych wymiarach. W modelu

Autor korespondujący:

Krzysztof Pieńkosz, K.Pienkosz@ia.pw.edu.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 14.05.2021 r., przyjęty do druku 08.06.2021 r.

Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

SCLP trzeba zapakować tylko jeden pojemnik elementami ze zbioru N , ale w taki sposób, żeby suma objętości zapakowanych elementów była jak największa. W tym przypadku nie wszystkie elementy ze zbioru N muszą być załadowane. Obszerny przegląd różnych metod stosowanych zarówno do pakowania pojedynczego pojemnika w problemie SCLP oraz wielu pojemników w modelu 3D-BPP zawiera praca [8]. Z punktu widzenia złożoności obliczeniowej oba problemy są NP-trudne. Techniki stosowane do umieszczania poszczególnych elementów w pojemnikach są podobne.

Typowe podejście do problemu pakowania wielu pojemników polega bowiem na zaadaptowaniu algorytmu pakowania dla pojedynczego pojemnika. Można wyróżnić trzy główne strategie stosowane w przypadku problemu 3D-BPP:

- sekwencyjna – pakowanie elementów po kolei, najpierw do pierwszego pojemnika, potem pozostałe elementy do drugiego itd.,
- równoczesna – oszacowanie liczby potrzebnych pojemników i jednocześnie ich zapakowywanie,
- hierarchiczna – w warstwie nadrzędnej elementy są przydzielane do poszczególnych pojemników bez określania ich pozycji, w warstwie podrzędnej rozpatruje już się tylko jeden pojemnik i stosuje model SCLP.

Dwie podstawowe decyzje i operacje wykonywane w algorytmach pakowania to wybór kolejnego elementu, który będzie pakowany oraz wybór miejsca jego umieszczenia. Te operacje są wykonywane sekwencyjnie, aż do zapełnienia pojemnika lub zapakowania wszystkich elementów. Poszczególne algorytmy różnią się kolejnością wykonywania tych dwóch operacji oraz stosowanymi regułami decyzyjnymi, przy czym proponowane są też algorytmy, w których jednocześnie dokonuje się wyboru elementu oraz miejsca jego położenia w pojemniku [9]. Zbiór miejsc, w których może być wstawiony następny element jest zwykle ograniczony i sposób wyznaczania tych miejsc oraz reguły wyboru najlepszego z nich też różni te algorytmy.

W literaturze opisywane są różne metody określania zbioru potencjalnych miejsc wstawienia następnego elementu. W pracy [6] zastosowano koncepcję *punktów narożnych* (ang. *Corner Points*). W proponowanym tam algorytmie pierwszy element jest pakowany w dolnym, tylnym, lewym rogu pojemnika, a następnie są dostawiane w nowo powstałych rogach częściowego upakowania. W rezultacie upakowanie jest rozbudowywane od jednego rogu palety. Narożne punkty wstawiania charakteryzują się tym, że powyżej nich, z przodu oraz z prawej strony nie ma innych elementów, ale linie poprowadzone w górę, do przodu i w prawą stronę od tych punktów stykają się z pewnymi już zapakowanymi elementami lub bokami pojemnika. Są to punkty, w których umieszcza się dolny, tylny, lewy róg wstawianego elementu. Na rys. 1 pokazano, jak wyglądałyby narożne punkty wstawiania w przypadku dwuwymiarowego pakowania. Są one oznaczone kropkami.

Rys. 1. Narożne punkty wstawiania dla przypadku dwuwymiarowego
Fig. 1. Corner Points for 2D packing problem

W pracy [2] zaproponowano zbiór punktów wstawienia nazywanych *punktami krańcowymi* (ang. *Extreme Points*), który obejmuje również punkty we wgłębieniach konturu dotychczasowego upakowania. Są to punkty na zewnętrznych powierzchniach ułożonych już elementów lub bokach pojemnika, które leżą na przedłużeniu rogów dostawianych elementów. Podobnie, lecz nieco inaczej określono punkty wstawienia w artykule [4] – jako punkty styku trzech zewnętrznych powierzchni różnych elementów uwzględniając w tym boki pojemnika. Stanowią one rogi *aktywnych przestrzeni* (ang. *action space*), w których mogą być umieszczane następne elementy.

W pracy [10] opisano dwie inne koncepcje określania potencjalnych miejsc umieszczania kolejnych elementów. Puste miejsce na palecie jest reprezentowane jako suma teorii-nogociowa zbioru (listy) prostopadłościanów przylegających do zapakowanych elementów. Każdy następny element jest umieszczany tylko w jednym z tych prostopadłościanów, na jego dolnej powierzchni.

Technika *partycji wolnej przestrzeni* (ang. *partition*) charakteryzuje się tym, że poszczególne prostopadłościany w utworzonej liście są zawsze wzajemnie rozłączne. Na początku, gdy pojemnik jest pusty, w liście mamy tylko jeden prostopadłościan wielkości tego pojemnika. Po zapakowaniu pierwszego elementu w rogu na dole pojemnika, w miejsce dotychczasowego prostopadłościanu pojawiają się trzy nowe – jeden górny i dwa boczne. Taki podział wolnej przestrzeni ma charakter gilotynowy, tzn. jest dokonywany przez sekwencję cięć wzdłuż boków wstawionego elementu. W zależności od kolejności przeprowadzania tych cięć uzyskuje się różne warianty podziału. W sumie jest 6 takich wariantów.

Rysunek 2 przedstawia widok z góry palety po zapakowaniu elementu o podstawie $[A, B, E, D]$. Górny prostopadłościan partycji przylega od dołu do górnej powierzchni zapakowanego elementu i w zależności od wariantu podziału może mieć podstawę $[A, B, D, E]$, $[A, C, F, D]$, $[A, B, H, G]$ lub $[A, C, I, G]$. W górę sięga do wysokości pojemnika. Boczna wolna przestrzeń może być podzielona na dwa sposoby. W pierwszym wariantcie jeden prostopadłościan ma podstawę $[B, C, F, E]$, a drugi – podstawę $[D, F, I, G]$. W drugim wariantcie jeden prostopadłościan ma podstawę $[B, C, I, H]$, zaś drugi $[D, E, H, G]$. Wysokość bocznych prostopadłościanów zależy od kształtu górnego prostopadłościanu. Gdy wymaga się, żeby spód każdego wstawianego elementu opierał się w całości na innym elemencie, to rozpatruje się tylko dwa warianty partycji wolnej przestrzeni. Górny prostopadłościan ma wtedy zawsze podstawę $[A, B, E, D]$, czyli taką jak wstawiony element. Stosując technikę partycji wolnej przestrzeni trzeba zawsze po zapakowaniu nowego elementu dokonać jednoznacznego wyboru sposobu podziału wolnej przestrzeni spośród powyższych wariantów, co może ograniczać zbiór dopuszczalnych miejsc wstawień dla następnych elementów.

Rys. 2. Reprezentacja wolnej przestrzeni (widok z góry)
Fig. 2. Empty space representation (top view)

W technice *pokrycia* (ang. *cover*) wolna przestrzeń jest reprezentowana przez zbiór nachodzących na siebie prostopadłościów. Po wstawieniu elementu jest tylko jeden sposób wyznaczenia tych prostopadłościów. Na rys. 2 górny prostopadłościów przylegałby do górnej powierzchni wstawionego elementu i miałby podstawę $[A, C, I, G]$. Dwa boczne prostopadłościów miałyby zaś podstawę $[B, C, I, H]$ oraz $[D, F, I, G]$. Górne ściany wszystkich trzech prostopadłościów byłyby na wysokości górnego boku pojemnika.

Wstawianie elementów w punktach narożnych daje więcej możliwych konfiguracji ułożenia elementów niż technika partycji wolnej przestrzeni. W szczególności umożliwia utworzenie wzorów upakowań, które nie są gilotynowe. Jeszcze więcej swobody w wyborze miejsca wstawienia elementów stwarzają punkty krańcowe. Podobnie jak w przypadku punktów narożnych, upakowanie jest wtedy rozbudowywane od dolnego, tylnego, lewego rogu palety. W pracy [4] zaproponowano metodę pakowania dopuszczającą możliwość wstawiania elementów również w innych rogach wolnej przestrzeni (przestrzeni aktywnej) – nawet tych górnych. Elementy są wtedy umieszczane najpierw w różnych rogach pojemnika, potem wzdłuż jego brzegów i boków, a na końcu w środku. Ten sposób wstawiania elementów oczywiście nie może być zastosowany do pakowania palet, bo ładowane towary nie mogą „wisieć w powietrzu”. Najwięcej swobody w wyborze miejsca wstawienia elementów daje technika pokrycia wolnej przestrzeni. Na przykład upakowanie przedstawione na rys. 3 da się uzyskać przy jej zastosowaniu. Inne wymienione wyżej sposoby wstawiania elementów nigdy nie doprowadzą do takiego wzoru upakowania. Gdyby jednak był jeszcze jeden element wypełniający lewy róg między elementami 3 i 5, to takie powiększone upakowanie dałoby się uzyskać stosując nie tylko technikę pokrycia wolnej przestrzeni, ale również przez wstawianie elementów w punkty krańcowe, a także w rogi aktywnej przestrzeni. Nie byłoby jednak wciąż osiągalne przy zastosowaniu partycji wolnej przestrzeni oraz punktów narożnych.

Problem pakowania znacznie się upraszcza, jeżeli układane elementy mają identyczne wymiary. Z taką sytuacją mamy zazwyczaj do czynienia, gdy towary są pakowane na palety przez producentów do magazynów. W literaturze ten problem optymalizacji jest nazywany Pallet Loading Problem (PLP) lub Manufacturer's Pallet Loading Problem (MPLP). Artykuł [7] stanowi obszerny przegląd różnych podejść do rozwiązywania problemu MPLP. Stosuje się tu zupełnie inne techniki wyznaczania wzorów pakowania niż w przypadku problemów SCLP i 3D-BPP. Są one jednak tam też niekiedy wykorzystywane, gdy ze względu na występowanie znacznej liczby elementów o jednakowych wymiarach, korzystne jest tworzenie z nich jednolitych warstw [5].

3. Upakowania robotowe

W przypadku automatyzacji procesu pakowania palet, oprócz problemu wyznaczania wzorów upakowania, ważna jest też kwestia możliwości ich realizacji przez robota. Żeby umieścić element na palecie, robot musi mieć swobodę dostępu do miejsca jego wstawienia. W zależności od konstrukcji robota można różnie te wymagania dostępu definiować.

3.1. Jednostronne upakowanie robotowe

W pracy [3] wprowadzono pojęcie upakowania robotowego (ang. *robot packing*). Jest to upakowanie, które można ułożyć startując z dolnego, tylnego, lewego rogu palety i wstawiając kolejne elementy tak, żeby były one zawsze nad, przed i z prawej strony poprzednio ułożonych elementów. W niniejszym artykule takie upakowanie będziemy nazywać *jednostronnym upakowaniem robotowym*.

Definicja 1 *Jednostronne upakowanie robotowe to wzór upakowania, który powstaje, gdy elementy podczas wstawiania nie są zasłonięte od góry, od przodu palety oraz z jej prawej strony.*

Jednostronne upakowanie robotowe zakłada, że robot żeby ułożyć na palecie kolejny element, musi mieć swobodny dostęp, czyli pustą przestrzeń od góry, od przodu palety i z prawej strony tego elementu. Okazuje się, że nie dla każdego upakowania jest to możliwe. Na rys. 3 jest przedstawiony przykład, który nie jest jednostronnym upakowaniem robotowym. W dalszej części tego rozdziału przedstawimy metodę, która pozwala w sposób sformalizowany stwierdzić czy dane upakowanie jest jednostronnym upakowaniem robotowym. Ponadto jeżeli nim jest, to metoda ta wyznacza dla robota kolejność pakowania elementów przy takich uwarunkowaniach.

Rys. 3. Przykład, który nie jest jednostronnym upakowaniem robotowym (elementy 1 i 2 oraz 3 i 4 są identyczne)

Fig. 3. An example which is not a one-sided robot packing (items 1 and 2 are identical as well as 3 and 4)

Niech N będzie zbiorem elementów zapakowanych na palecie. Położenie tych elementów $i \in N$ będziemy identyfikować przez współrzędne (x_i, y_i, z_i) ich dolnego, tylnego, lewego rogu w układzie współrzędnych X, Y, Z , gdzie oś X jest skierowana w prawo, oś Y do przodu, a oś Z do góry (jak na rys. 3). Punkt $(0, 0, 0)$ to dolny, tylny, lewy róg palety. Dla danego upakowania zdefiniujemy podobnie jak w [11] *graf poprzedzania* $G_X = (V_X, E_X)$ dla osi X . Jest to graf skierowany, w którym:

- każdemu elementowi $i \in N$ odpowiada jeden wierzchołek $v_i \in V_X$,
- istnieje łuk od wierzchołka v_i do v_j wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i + l_i \leq x_j$, gdzie l_i jest wymiarem elementu i wzdłuż osi X .

Rys. 4. Grafy poprzedzania dla przykładu z rys. 3

Fig. 4. Comparability graphs for the example presented in Fig. 3

Graf G_X opisuje wzajemne położenie zapakowanych elementów wzdłuż osi X . Łuk od wierzchołka v_i do v_j w tym grafie oznacza, że element j znajduje się całkowicie po prawej stronie elementu i . Analogicznie definiujemy grafy poprzedzania G_Y oraz G_Z dla osi Y oraz Z . Na rys. 4 są przedstawione grafy poprzedzania dla upakowania z rys. 3.

Grafy G_X , G_Y i G_Z są grafami skierowanymi, mają taki sam zbiór wierzchołków, ale mogą różnić się łukami. Zauważmy, że każdy z nich zawsze będzie grafem acyklicznym. Dla tych grafów wprowadzimy jeszcze pojęcie *zagregowanego grafu poprzedzania*,

który będziemy oznaczać symbolem $G_X + G_Y + G_Z$. Jest to graf skierowany, w którym:

- zbiór wierzchołków jest taki sam jak w G_X , G_Y oraz G_Z
- istnieje łuk od wierzchołka v_i do v_j wtedy i tylko wtedy, gdy w jednym z grafów G_X , G_Y bądź G_Z istnieje łuk od v_i do v_j i w żadnym z tych grafów nie ma łuku przeciwnie skierowanego, tzn. od v_j do v_i .

Zagregowany graf poprzedzania określa wymaganą wzajemną kolejność pakowania przez robota poszczególnych par elementów. Zauważmy, że jeżeli w grafie $G_X + G_Y + G_Z$ występuje łuk od wierzchołka v_i do v_j to element j jest powyżej, bądź z przodu, albo z prawej strony elementu i , a zatem musi być później zapakowany niż i . Z drugiej strony, jeżeli w żadnym z grafów G_X , G_Y oraz G_Z wierzchołki v_i i v_j nie są połączone łukiem, to elementy i oraz j nie zasłaniają się nawzajem i mogą być pakowane w dowolnej kolejności. Jeśli w jednym z grafów G_X , G_Y lub G_Z jest łuk od wierzchołka v_i do v_j , a w innym łuk przeciwnie skierowany, to elementy i oraz j nie kolidują ze sobą i w związku z tym w zagregowanym grafie poprzedzania nie będzie między nimi żadnego łuku. Na przykład dla upakowania przedstawionego na rys. 1, w grafie G_X byłby łuk od v_4 do v_5 , a w grafie G_Y łuk przeciwny od v_5 do v_4 . Zauważmy, że elementy 4 i 5 nie zasłaniają się wzajemnie wzdłuż osi X i Y .

Graf $G_X + G_Y + G_Z$ nie zawsze będzie grafem acyklicznym. Jeżeli jest grafem acyklicznym, to można tak ponumerować wierzchołki, że wierzchołek v_i będzie miał przypisany mniejszy numer niż v_j wtedy i tylko wtedy, gdy w tym grafie istnieje łuk od v_i do v_j . Numery wierzchołków określają nam wtedy kolejność pakowania przez robota poszczególnych elementów. Jeżeli graf $G_X + G_Y + G_Z$ nie jest acykliczny i zawiera cykl, to upakowanie reprezentowane przez ten graf nie jest jednostronnym upakowaniem robotowym.

Wniosek 1 Wzór jest jednostronnym upakowaniem robotowym wtedy i tylko wtedy, gdy zagregowany graf poprzedzania $G_X + G_Y + G_Z$ dla tego wzoru jest acykliczny.

Procedura sprawdzania czy graf skierowany jest acykliczny i jednocześnie numerowania wierzchołków zgodnego z orientacją łuków jest nazywana w literaturze *sortowaniem topologicznym* i znane są efektywne algorytmy jej realizacji [1]. Graf można posortować topologicznie wtedy i tylko wtedy, gdy jest acykliczny.

Na rys. 5 jest zamieszczony zagregowany graf poprzedzania $G_X + G_Y + G_Z$ dla upakowania z rys. 3 i grafów poprzedzania G_X , G_Y i G_Z przedstawionych na rys. 4. Zauważmy, że w tym grafie wierzchołki 2, 5, 4 tworzą cykl. Element 5 musi być wstawiony po elemencie 2, bo na nim leży, a jednocześnie przed elementem 4, który go zasłania od przodu, z czego wynika, że element 4 musiałby być ułożony po elemencie 2. Jest to jednak niemożliwe, bo element 2 zasłania element 4 z prawej strony. Zatem wzór z rys. 3 nie jest jednostronnym upakowaniem robotowym.

Rys. 5. Graf $G_X + G_Y + G_Z$ dla przykładu z rys. 3

Fig. 5. Graph $G_X + G_Y + G_Z$ for the example presented in Fig. 3

Gdyby jednak w upakowaniu z rys. 3 nie było elementu 4, to w zagregowanym grafie poprzedzania na rys. 5 nie byłoby wierzchołka 4 i graf ten dałoby się posortować topologicznie przypisując kolejne numery wierzchołkom 1, 3, 2, 5. Byłoby to więc jednostronne upakowanie robotowe, a taka numeracja wierzchołków określałaby kolejność pakowania elementów przez robota.

Spśród technik wstawiania elementów wymienionych w rozdziale 2 tylko punkty narożne [6] oraz partycja wolnej przestrzeni [10] zawsze prowadzą do jednostronnego upakowania robotowego. Podejścia oparte na krańcowych punktach wstawiania [2], pokrycia wolnej przestrzeni [10] lub aktywnych przestrzeni [4] nie gwarantują uzyskania takiego upakowania.

3.2. Wielostronne upakowanie robotowe

Układając jednostronne upakowanie robotowe zakładamy, że ramię robota pakującego jest na sztywno zamontowane przed przednią stroną palety i do wstawienia elementu w określone miejsce, musi być wolny dostęp od góry, od przodu i z prawej strony. Istnieją bardziej elastyczne konstrukcje robotów umożliwiające pakowanie z dowolnej strony palety. Uwzględniając możliwości takich robotów wprowadzamy pojęcie *wielostronnego upakowania robotowego*.

Definicja 2 Wielostronne upakowanie robotowe to wzór upakowania, który powstaje, gdy elementy podczas wstawiania nie są zasłonięte od góry i od dowolnych dwóch sąsiednich boków palety.

Przy układaniu wielostronnego upakowania robotowego zakłada się, że robot może wstawić element z dowolnej strony palety. Musi mieć jednak pustą przestrzeń od tej strony palety, a także od góry i od jednego z boków elementu, żeby nie musiał go wciskać między inne elementy. Okazuje się, że grafowe modele upakowania proponowane w poprzednim rozdziale, można również wykorzystać do analizy wielostronnych upakowań robotowych. Niech G_X będzie grafem, który różni się od grafu poprzedzania G_X tym, że wszystkie łuki są przeciwnie skierowane. Graf ten jest więc też grafem poprzedzania, ale w kierunku przeciwnym do osi X i opisuje dopuszczalną kolejność pakowania elementów od tej strony. W analogiczny sposób zdefiniujemy graf poprzedzania $\bar{G}_Y$. Żeby uwzględnić możliwości pakowania robota od każdego z czterech boków palety utworzymy następujące cztery zagregowane grafy poprzedzania: $G_X + G_Y + G_Z$, $G_X + \bar{G}_Y + G_Z$, $\bar{G}_X + G_Y + G_Z$, $\bar{G}_X + \bar{G}_Y + G_Z$. Każdy z tych grafów opisuje wtedy ograniczenia dotyczące kolejności pakowania elementów z poszczególnych stron palety.

Dla zbioru grafów skierowanych $\mathcal{G}$ posiadających taki sam zbiór wierzchołków V zdefiniujemy procedurę *multisortowania topologicznego*.

Multisortowanie topologiczne zbioru grafów skierowanych $\mathcal{G}$

- 1) $k := |V|$;
- 2) Dopóki $k > 0$
 - Znajdź wierzchołek v , z którego nie wychodzi łuk przynajmniej w jednym z grafów $G \in \mathcal{G}$. Jeżeli taki wierzchołek istnieje, to przypisz mu numer k , w przeciwnym przypadku KONIEC (cykle w każdym grafie i nie da się ponumerować wszystkich wierzchołków);
 - Usuń wierzchołek v ze wszystkich grafów $G \in \mathcal{G}$ oraz wszystkie łuki dochodzące, bądź wychodzące z niego;
 - $k = k - 1$;

Algorytm multisortowania topologicznego ma złożoność obliczeniową $O(|V|^2)$, bo składa się z operacji przeglądania wierzchołków oraz usuwania łuków, których jest nie więcej niż $|V|^2$. Utworzenie zagregowanych grafów poprzedzania wymaga określenia relacji między poszczególnymi parami wierzchołków,

a więc też ma złożoność $O(|V|^2)$. Zatem cała procedura wyznaczania kolejności układania elementów na palecie przez robota ma złożoność $O(|V|^2)$.

Zauważmy, że multisortowanie topologiczne tylko jednego grafu sprowadza się do zwykłego sortowania topologicznego i sprawdzenia acykliczności tego grafu. Ponadto można stwierdzić, że gdy jeden z grafów $G \in \mathcal{G}$ jest acykliczny, to topologiczna numeracja jego wierzchołków będzie też jednym z wariantów numeracji multisortowania topologicznego.

Przeprowadzając multisortowanie topologiczne dla grafów $G_X + G_Y + G_Z$, $G_X + \overline{G}_Y + G_Z$, $\overline{G}_X + G_Y + G_Z$, $\overline{G}_X + \overline{G}_Y + G_Z$ dokonujemy w istocie rozpakowywania palety, zdejmując w każdym kroku jeden element, który nie jest zasłonięty od góry i od dwóch stron palety. Przypisane wierzchołkom numery określają więc kolejność wielostronnego upakowania robotowego. Zapamiętując typ grafu zagregowanego, w którym znaleziono wierzchołek bez następników, mamy też informację, od której strony palety należy wstawić element odpowiadający temu wierzchołkowi. Można więc sformułować poniższy wniosek.

Wniosek 2 *Wzór jest wielostronnym upakowaniem robotowym wtedy i tylko wtedy, gdy da się ponumerować wszystkie wierzchołki przeprowadzając multisortowanie topologiczne zbioru grafów $G_X + G_Y + G_Z$, $G_X + \overline{G}_Y + G_Z$, $\overline{G}_X + G_Y + G_Z$, $\overline{G}_X + \overline{G}_Y + G_Z$.*

Analizując upakowanie z rys. 3 można stwierdzić, że nie jest ono wielostronnym upakowaniem robotowym. Z wierzchołka 1 i 2 w każdym z czterech zagregowanych grafów wychodzi łuk do wierzchołka 5. Z wierzchołków 3 i 4 wychodzi łuk albo do wierzchołka 1, albo do 2. Natomiast z wierzchołka 5 mamy łuk albo do wierzchołka 3, albo do 4. Nie da się więc przeprowadzić multisortowania topologicznego.

Gdyby jednak w upakowaniu z rys. 3 nie było elementu 3, to takie upakowanie nie byłoby jednostronnym upakowaniem robotowym, bo w grafie $G_X + G_Y + G_Z$ wierzchołki 2, 5, 4 nadal tworzyłyby cykl (rys. 5). Byłoby to natomiast wielostronne upakowanie robotowe, gdyż bez wierzchołka 3 graf $\overline{G}_X + \overline{G}_Y + G_Z$ byłby acykliczny. Na podstawie tego grafu otrzymalibyśmy kolejność pakowania (2, 4, 1, 5) do zastosowania zarówno od lewej, jak i od tylnej strony palety. Były też możliwe inne sekwencje wielostronnego pakowania.

Zaproponowaną technikę analizy upakowań pod kątem możliwości ich realizacji przez robota można też zastosować do różnych innych uwarunkowań dostępu przy wstawianiu elementów. Rozważmy przypadek, gdy robot musi mieć dostęp od góry i tylko od przedniej strony palety (osi Y), ale potrafi ułożyć (wcisnąć) element między inne zapakowane elementy. Żeby określić kolejność pakowania w takiej sytuacji wystarczy posortować topologicznie graf zagregowany $G_Y + G_Z$. Dla upakowania z rys. 3 ma on postać taką jak na rys. 6. W tym grafie wierzchołki 1, 2 i 3 można ponumerować topologicznie w dowolnej kolejności, potem wierzchołek 5, a na końcu 4, a zatem to upakowanie byłoby realizowalne przez takiego robota. Gdyby robot potrafił pakować

Rys. 6. Graf $G_Y + G_Z$ dla przykładu z rys. 3
Fig. 6. Graph $G_Y + G_Z$ for the example presented in Fig. 3

elementy z każdej strony palety mając tylko swobodny dostęp od tej strony i od góry, to należałoby przeprowadzić multisortowanie topologiczne grafów $G_X + G_Z$, $\overline{G}_X + G_Z$, $G_Y + G_Z$ oraz $\overline{G}_Y + G_Z$.

Na rys. 7 jest przedstawiony przykład, który pokazuje, że nawet dla tak zręcznego robota nie wszystkie upakowania są realizowalne. W tym przykładzie na elementach 1 i 2 leżą elementy 3 i 4, a na nich wyżej elementy 5 i 6, na których z kolei opiera się jeszcze element 7. Elementy 8, 9, 10 i 11 stoją na dole palety, ale wystają w górę wyżej niż element 7. Zatem, żeby wstawić element 7 z jakiegokolwiek strony palety, trzeba to zrobić przed umieszczeniem przynajmniej jednego spośród wystających elementów 8, 9, 10 i 11. Ale elementów tych nie da się wstawić z boku po załadowaniu elementu 7, bo ich miejsce wstawienia zasłaniają elementy 1, 2, 3 i 4, które muszą być ułożone przed elementem 7. Mamy więc cykl, który zostanie wykryty w trakcie multisortowania topologicznego.

Rys. 7. Przykład, który nie jest wielostronnym upakowaniem robotowym (widok z góry)
Fig. 7. An example which is not a multi-sided robot packing (top view)

4. Podsumowanie

W artykule zaproponowano sformalizowaną metodę analizy wzorów upakowań palet pod kątem możliwości ich realizacji przez robota. Pozwala ona określić, czy dane upakowanie można ułożyć przy użyciu robota i jeżeli odpowiedź jest pozytywna, to wyznacza kolejność pakowania elementów uwzględniającą uwarunkowania pracy robota. Metoda ta wykorzystuje grafową reprezentację upakowania, która jest na tyle elastyczna, że można w niej uwzględnić zróżnicowane zdolności manipulacyjne robota pakującego. W rezultacie może być w jednolity sposób zastosowana do dowolnie definiowanego pojęcia pakowania robotowego, określającego wymaganą swobodę dostępu robota podczas układania kolejnych towarów na palecie.

Bibliografia

1. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT, Warszawa 1997.
2. Crainic T., Perboli G., Tadei R., *Extreme pointbased heuristics for three-dimensional bin packing*, "INFORMS Journal on Computing", Vol. 20, No. 3, 2008, 368–384, DOI: 10.1287/ijoc.1070.0250.
3. den Boef E., Korst J., Martello S., Pisinger D., Vigo D., *Erratum to "The three-dimensional bin packing problem": Robot-packable and orthogonal variants of packing problems*, "Operations Research", Vol. 53, No. 4, 2005, 735–736, DOI: 10.1287/opre.1050.0210.
4. He K., Huang W., *An efficient placement heuristic for three-dimensional rectangular packing*, "Computers & Operations Research", Vol. 38, No. 1, 2011, 227–233, DOI: 10.1016/j.cor.2010.04.015.
5. Lim A., Ma H., Xu J., Zang X., *An iterated construction approach with dynamic prioritization for solving the conta-*

- iner loading problem, "Expert Systems with Applications", Vol. 39, No. 4, 2012, 4292–4305, DOI: 10.1016/j.eswa.2011.09.103.
6. Martello S., Pisinger D., Vigo D., *The three-dimensional bin packing problem*, "Operations Research", Vol. 48, No. 2, 2000, 256–267, DOI: 10.1287/opre.48.2.256.12386.
7. Silva E., Oliveira J., Wascher G., *The pallet loading problem: a review of solution methods and computational experiments*, "International Transactions in Operational Research", Vol. 23, 2016, 147–172, DOI: 10.1111/itor.12099.
8. Zhao X., Bennell J., Bektas T., Dowsland K., *Comparative review of 3D container loading algorithms*, "International Transactions in Operational Research", Vol. 23, No. 1-2, 2016, 287–320, DOI: 10.1111/itor.12094.
9. Zhu W., Lim A., *A new iterative-doubling Greedy-Lookahead algorithm for the single container loading problem*, "European Journal of Operational Research", Vol. 222, No. 3, 2012, 408–417, DOI: 10.1016/j.ejor.2012.04.036.
10. Zhu W., Oon W., Lim A., Weng Y., *The six elements to block-building approaches for the single container loading problem*, "Applied Intelligence", Vol. 37, 2012, 431–445, DOI: 10.1007/s10489-012-0337-0.
11. Zhu W., Zhang Z., Oon W., Lim A., *Space defragmentation for packing problems*, "European Journal of Operational Research", Vol. 222, No. 3, 2012, 452–463, DOI: 10.1016/j.ejor.2012.05.031.

Sequencing of Robot Packing

Abstract: In the paper the problem of an automatic pallet loading with the usage of a robot is considered. In the logistic processes of trade business commodities are distributed from stores to retailers on pallets. In the paper the methods of pallet loading are analyzed in terms of the robot packing abilities. In order to put an item in a given place in a partially loaded pallet, robot needs to have free access to this place, so it cannot be blocked. A graph model is proposed to represent the relative positions of items on pallets and a method for sequencing of robot packing operations is formulated. It is also shown that not all patterns of pallet packing can be realized by a robot.

Keywords: three-dimensional bin packing, container loading problem, robot packing, comparability graphs, topological sort

dr hab. inż. Krzysztof Pieńkosz

K.Pienkosz@ia.pw.edu.pl

ORCID: 0000-0001-9437-7594

Absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej (1984). W latach 1984–1986 pracował w Instytucie Górnictwa Naftowego i Gazownictwa, a od roku 1986 jest zatrudniony w Instytucie Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. Uzyskał stopień doktora nauk technicznych w 1992 r. i w roku 2011 doktora habilitowanego. Jego zainteresowania naukowe dotyczą badań operacyjnych, w szczególności metod optymalizacji dyskretnej, algorytmów rozwiązywania problemów kombinatorycznych oraz zagadnień planowania i harmonogramowania.