Dr inż. Rafał Kociszewski
Politechnika Białostocka

WYJŚCIOWA OSIĄGALNOŚĆ I WYJŚCIOWA STEROWALNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH UŁAMKOWEGO RZĘDU

W pracy rozpatrzono problem wyjściowej osiągalności oraz wyjściowej sterowalności dodatnich dyskretnych układów ułamkowego rzędu. Sformułowano warunki konieczne i wystarczające wyjściowej osiągalności oraz wyjściowej sterowalności (w tym wyjściowej sterowalności do zera). Podano wzory do wyznaczania nieujemnych sterowań, które przeprowadzają wektor wyjścia rozpatrywanych układów z zerowego i niezerowego stanu początkowego do nieujemnego wektora końcowego. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

OUTPUT REACHABILITY AND OUTPUT CONTOLLABILITY OF POSITIVE FRACTIONAL DISCRETE-TIME SYSTEMS

Necessary and sufficient conditions for the output reachability and output controllability for linear positive fractional discrete-time systems are formulated and proved. Simple methods for computation of the control sequences steering the output of the fractional system from zero and nonzero initial state to the desired value of the output are presented. Considerations are illustrated by numerical examples.

1. WSTĘP

Wyjściowa sterowalność układu standardowego (niedodatniego całkowitego rzędu) została zdefiniowana po raz pierwszy w pracy [7]. Kryteria wyjściowej osiągalności i sterowalności dyskretnych układów niedodatnich oraz dodatnich ciągłych i dyskretnych (całkowitego rzędu) bez opóźnień jak i z opóźnieniami można znaleźć np. w pracach [2, 3, 5, 6]. Problematyka wyjściowej osiągalności lub sterowalności układu dodatniego ogólnie oznacza, że dla tego układu będącego w zerowym stanie początkowym lub dowolnym nieujemnym stanie początkowym należy osiągnąć zadany nieujemny wektor wyjścia $y_f \in \Re_+^p$.

W ostatnim okresie można zaobserwować wzrost zainteresowania układami ułamkowego rzędu. Podstawy rachunku ułamkowego rzędu oraz wybrane zastosowania rachunku ułamkowego można znaleźć np. w pracach [8-13] oraz cytowanej tam literaturze. W pracy [1] podano warunki sterowalności i obserwowalności dyskretnych układów ułamkowego rzędu. Problemowi osiągalności i sterowalności do zera układów dodatnich ułamkowego rzędu jest poświęcona praca [4] natomiast w publikacji [14] rozpatrywano problem osiągalności i sterowalności układu dodatniego ułamkowego rzędu z jednym opóźnieniem w wektorze stanu.

W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem wyjściowej osiągalności oraz wyjściowej sterowalności dodatnich układów dyskretnych ułamkowego rzędu bez opóźnień. Zostaną sformułowane warunki konieczne i wystarczające odpowiednio wyjściowej osiągalności i wyjściowej sterowalności. Zostaną także podane proste wzory do wyznaczenia sterowania przeprowadzającego wektor wyjścia rozpatrywanego układu z zerowego oraz niezerowego stanu początkowego x_0 do dowolnego nieujemnego stanu końcowego y_f.

2. WPROWADZENIE

W pracy będą stosowane następujące oznaczenia: $\Re^{N\times m}$ ($\Re_+^{N\times m}$) - zbiór macierzy rozmiaru $N\times m$ o elementach rzeczywistych (nieujemnych) oraz $\Re^N = \Re^{N\times 1}$ ($\Re_+^N = \Re_+^{N\times 1}$); Z_+ - zbiór liczba całkowitych dodatnich; I_N - macierz jednostkowa rozmiaru $N\times N$.

Przyjmiemy w dalszych rozważaniach definicję różniczko-całki ułamkowego rzędu podaną przez Grünwalda-Letnikova w postaci (np. [4])

$$\Delta^n x_k = \frac{1}{h^n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{n}{j} x_{k-j}, \tag{1}$$

gdzie $n\in R$ jest ułamkowym rzędem, h jest okresem próbkowania, $k\in Z_+$ jest numerem próbki, dla której jest obliczana różniczko-całka. Symbol Newtona w (1) ma postać

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} 1 \quad \text{dla} \quad j=0 \\ \dfrac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} \quad \text{dla} \quad j=1,2,... \end{cases} \tag{2}$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy $h=1$.

Weźmy pod uwagę liniowy układ dyskretny opisany w przestrzeni stanu równaniami

$$\begin{aligned} \Delta^n x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \quad k\in Z_+, \\ y_k &= Cx_k + Du_k, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $x_k\in\Re^N$, $u_k\in\Re^m$, $y_k\in\Re^p$ są wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi oraz $A\in\Re^{N\times N}$, $B\in\Re^{N\times m}$, $C\in\Re^{p\times N}$, $D\in\Re^{p\times m}$.

Korzystając z definicji (1) możemy równania (3) napisać w poniższej postaci

$$x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\binom{n}{j}x_{k-j+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k\in Z_+, \tag{4}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k. \tag{5}$$

Twierdzenie 1. [4] Rozwiązanie równania stanu (4) ma postać

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\Phi_{k-i-1}Bu_i, \tag{6}$$

przy czym Φ_k jest określone zależnością

$$\Phi_{k+1} = (A + I_N n)\Phi_k + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \Phi_{k-i+1}, \tag{7}$$

dla $\Phi_0 = I_n$.

■

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Układ ułamkowego rzędu (4), (5) nazywamy wewnętrznie dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy $x_k \in \Re_+^n$ i $y_k \in \Re_+^p$, $k \in Z_+$ dla dowolnych warunków początkowych $x_0 \in \Re_+^n$ oraz wszystkich ciągów wymuszeń $u_k \in \Re_+^m$, $k \in Z_+$ [4].

Twierdzenie 2. [4] Jeżeli $0 < n \le 1$, to

$$(-1)^{i+1} \binom{n}{i} > 0 \text{ dla } i = 1, 2, ... \tag{8}$$

■

Jeżeli $1 < n < 2$ to $(-1)^{i+1} \binom{n}{i} < 0$ dla $i = 2, 3, ...$

Twierdzenie 3. [4] Jeżeli $0 < n \le 1$ oraz $A + I_N n \in \Re_+^{N \times N}$, to

$$\Phi_k \in \Re_+^{N \times N} \text{ dla } k = 1, 2, ... \tag{9}$$

■

Twierdzenie 4. [4] Jeżeli $0 < n \le 1$, to układ (4), (5) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A + I_N n \in \Re_+^{N \times N}, \ B \in \Re_+^{N \times m}, \ C \in \Re_+^{p \times N}, \ D \in \Re_+^{p \times m}. \tag{10}$$

■

Definicja 1. Układ ułamkowego rzędu (4), (5) nazywamy wyjściowo osiągalnym w q krokach jeżeli dla każdego $y_f \in \Re_+^p$ istnieje liczba naturalna $q \in Z_+$ i ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0, 1, ..., q-1$ taki, że $y_{q-1} = y_f \in \Re_+^p$ dla $x_0 = 0$.

Definicja 2. Układ ułamkowego rzędu (4), (5) nazywamy wyjściowo sterowalnym do zera w q krokach, jeżeli dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych $x_0 \in \Re_+^N$ oraz $y_f = 0$ istnieje ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0, 1, ..., q-1$, który przeprowadza wyjście tego układu do zera ($y_f = 0$).

Definicja 3. Układ ułamkowego rzędu (4), (5) nazywamy wyjściowo sterowalnym w q krokach, jeżeli dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych $x_0 \in \Re_+^N$ istnieje ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,q-1$ taki, że $y_{q-1} = y_f \in \Re_+^p$.

Celem pracy jest sformułowanie analitycznych kryteriów wyjściowej osiągalności oraz wyjściowej sterowalności liniowego dodatniego układu dyskretnego ułamkowego rzędu (4), (5). Zostanie podany prosty wzór do wyznaczania nieujemnego ciągu sterującego, który przeprowadza wektor wyjścia rozpatrywanego układu do dowolnego $y_f \in \Re_+^p$.

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

4.1. Wyjściowa osiągalność

Podstawiając wzór (6) przy zerowym warunku początkowym ($x_0 = 0$) do równania wyjścia (4) przy $k = q-1$ otrzymamy

$$y_{q-1} = y_f = C\sum_{i=0}^{q-2} \Phi_{q-i-2} B u_i + D u_{q-1} = R_q u_0^q, \tag{11}$$

gdzie macierz R_q (wyjściowej osiągalności) oraz wektor u_0^q (wymuszeń) mają postaci

$$R_q = \left[C\Phi_{q-2}B, C\Phi_{q-3}B, ..., CB, D \right] \in \Re_+^{p \times qm}, \quad u_0^q = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{q-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{qm}. \tag{12}$$

Twierdzenie 5. Układ ułamkowego rzędu (4), (5) jest wyjściowo osiągalny w q krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $R_q \in \Re_+^{p \times qm}$ (12) zawiera p liniowo niezależnych kolumn monomialnych.

Dowód. Z definicji 1 oraz (11) wynika, że dla każdego nieujemnego $y_f \in \Re_+^p$ istnieje nieujemny ciąg wymuszeń $u_0^q \in \Re_+^{qm}$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $R_q \in \Re_+^{p \times qm}$ (12) zawiera monomialną macierz (w każdym wierszu i w każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, pozostałe są równe zero) rozmiaru $p \times p$. ■

Z twierdzenia 5 oraz definicji 1 wynika, że jeżeli rząd $D = p$ oraz macierz $D \in \Re_+^{p \times m}$ zawiera p liniowo niezależnych kolumn monomialnych, wówczas układ ułamkowego rzędu (4), (5) jest wyjściowo osiągalny w $q = 1$ kroku. Liczba q nie zależy od macierzy $(A + I_N n) \in \Re_+^{n \times n}$, $B \in \Re_+^{n \times m}$, $C \in \Re_+^{p \times m}$.

Twierdzenie 6. Jeżeli $\text{rząd}\, C < p$ oraz $D = 0$, to układ ułamkowego rzędu (4), (5) nie jest wyjściowo osiągalny.

Dowód. Jeżeli $D = 0$, wówczas macierz $R_q \in \Re_+^{p\times qm}$ (12) możemy zapisać w postaci

$$R_q = C\left[\Phi_{q-2}B, \Phi_{q-3}B, ..., B, 0\right] \in \Re_+^{p\times Nm}. \tag{13}$$

Wynika z tego, że jeżeli $\text{rząd}\, C < p$, to warunek twierdzenia 5 nie jest spełniony, ponieważ $\text{rząd}\, R_q < p$. ■

Twierdzenie 7. Jeżeli układ ułamkowego rzędu (4), (5) jest wyjściowo osiągalny oraz $R_q^T [R_q R_q^T]^{-1} \in \Re_+^{qm\times p}$ to ciąg wymuszeń u_i, $i = 0,1,..., q-1$, który przeprowadza wyjście tego układu ze stanu określonego przez zerowy warunek początkowy do zadanego $y_{q-1} = y_f \in \Re_+^p$ można wyznaczać ze wzoru

$$u_0^q = R_q^T \left[R_q R_q^T\right]^{-1} y_f. \tag{14}$$

gdzie wektor u_0^q ma postać podaną w (12).

Dowód. Jeżeli istnieje taka liczba naturalna $q \in Z_+$, że $\text{rząd}\, R_q = p$ to $\det[R_q R_q^T]^{-1} \neq 0$ i macierz $R_q^T [R_q R_q^T]^{-1}$ jest dobrze określona. Jeżeli $R_q^T [R_q R_q^T]^{-1} \in \Re_+^{qm\times p}$ oraz $y_f \in \Re_+^p$ to $u_0^q \in \Re_+^{qm}$. Podstawiając (14) do (11) otrzymamy $y_{q-1} = R_q R_q^T [R_q R_q^T]^{-1} y_f = y_f$. ■

4.2. Przykład 1

Dany jest dodatni układ ułamkowego rzędu opisany równaniami (4), (5) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Należy wyznaczyć sterowanie, które przeprowadza wyjście tego układu do $y_{q-1} = y_f = [4 \;\; 5]^T$.

W rozpatrywanym układzie $N = 3$, $m = 1$, $p = 2$. Niech rząd ułamkowy $n = 0.2$. Zgodnie z twierdzeniem 4 mamy

$$A + I_N n = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \in \Re_+^{3\times 3}. \tag{16}$$

Obliczając macierz osiągalności R_q ze wzoru (12) przy $q=4$ otrzymamy

$$R_4 = [C\Phi_2 B, C\Phi_1 B, CB, D] = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 4}, \tag{17}$$

przy czym $\Phi_1 = (A + I_N n)$, $\Phi_2 = (A + I_N n)\Phi_1 - I_N \binom{n}{2}$.

Macierz (17) zawiera $p=2$ liniowo niezależne kolumny monomialne, więc zgodnie z twierdzeniem 5 rozpatrywany układ jest wyjściowo osiągalny w $q=4$ krokach. Łatwo sprawdzić, że $R_4^T[R_4 R_4^T]^{-1} \in \Re_+^{4\times 2}$. Można zatem poszukiwane sterowanie obliczyć ze wzoru (14). Dokonując podstawień w (14) otrzymamy

$$u_0^4 = R_4^T \left[R_4 R_4^T \right]^{-1} y_f = \begin{bmatrix} 1.88 & 2.68 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T \in \Re_+^4. \tag{18}$$

Wobec tego $u_0 = 1.88$, $u_1 = 2.68$, $u_2 = 0$, $u_3 = 5$.

Celem sprawdzenia otrzymanych rezultatów, wyznaczymy najpierw wektory stanu x_k z równania (4). Podstawiając $k = 0,1,2,3$ w równaniu (4) otrzymamy

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.88 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.88 \\ 3.44 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1.37 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

Podstawiając (19) do równania wyjścia (5) otrzymamy

$$y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.88 \end{bmatrix}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.68 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1.88 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Ciąg sterowań (18) dla $q=4$ został wyznaczony poprawnie, ponieważ $y_{q-1} = y_f = [4 \ \ 5]^T$.

4.3. Wyjściowa sterowalność

Rozpatrzmy najpierw problem wyjściowej sterowalności do zera. W tym przypadku mamy $x_0 \neq 0$, $y_f = 0$.

Twierdzenie 8. Układ ułamkowego rzędu (4), (5) jest wyjściowo sterowalny do zera w q krokach wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_q = 0$. Wtedy $u_i = 0$ dla $i = 0,1,...,q-1$.

Dowód. Z równania wyjścia (5) wynika, że $y_f = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f = 0$ oraz $u_i = 0$ dla $i = 0,1,...,q-1$. Wobec tego dowód twierdzenia przebiega podobnie jak w pracy [4], w której rozpatrywano problem sterowalności do zera ($x_f = 0$) układu ułamkowego rzędu o równaniach (4), (5). ■

Wniosek 1. Sterowalność do zera (względem stanu) układu ułamkowego rzędu (4), (5) implikuje jego wyjściową sterowalnosc do zera.

W pracy [4] wykazano, że warunek, który został podany w twierdzeniu 8 może być spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $q=2$ oraz $\Phi_1=(A+I_N n)=0.$ Zatem zgodnie z wnioskiem 1, jeżeli w układzie (4), (5) zachodzi $\Phi_1=(A+I_N n)=0$, to układ ten jest wyjściowo sterowalny do zera w $q=2$ krokach.

Jeżeli $x_0 \neq 0$ i $y_f \neq 0$ wówczas podstawiając wzór (6) do równania wyjścia (5) przy $k=q-1$ otrzymamy

$$y_{q-1}=y_f=\Phi_{q-1}x_0+C\sum_{i=0}^{q-2}\Phi_{q-i-2}Bu_i+Du_{q-1}=P_q+R_q u_0^q, \tag{21}$$

gdzie

$$P_q=\Phi_{q-1}x_0, \tag{22}$$

zaś R_q, u_0^q mają postać podaną w (12).

Twierdzenie 9. Układ ułamkowego rzędu (4), (5) jest wyjściowo sterowalny w q krokach wtedy i tylko wtedy, gdy jest on wyjściowo sterowalny do zera oraz wyjściowo osiągalny.

Dowód. Przeprowadzenie wektora wyjścia układu (4), (5) do zadanego $y_f \in \Re_+^p$ można w ogólnym przypadku zrealizować w dwóch etapach: sprowadzenie wyjścia z $x_0 \neq 0$ do zera ($y_f=0$) – spełnione warunki twierdzenia 8 i następnie przeprowadzenie wyjścia z $x_0=0$ do dowolnego y_f – spełnione warunki twierdzenia 5. ■

Z podanych wyżej rozważań wiadomo, że jeżeli $q=2$ oraz $\Phi_1=(A+I_N n)=0$ to układ (4), (5) jest wyjściowo sterowalny do zera. Wynika z tego, że przy $q=2$ mamy $P_2=\Phi_1 x_0=0$. W tym przypadku stan początkowy $x_0 \in \Re_+^N$ tego układu nie wpływa na postać sterowania przeprowadzającego wyjście układu (4), (5) do dowolnego $y_{q-1}=y_f \in \Re_+^p$. Możemy na tej podstawie sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 10. Jeżeli układ ułamkowego rzędu (4), (5) jest wyjściowo osiągalny, macierz $R_q^T[R_q R_q^T]^{-1} \in \Re_+^{qm\times p}$ oraz układ ten jest wyjściowo sterowalny do zera w $q=2$ krokach, to ciąg wymuszeń u_i, $i=0,1$, który przeprowadza wyjście tego układu do zadanego $y_{q-1}=y_f \in \Re_+^p$ można wyznaczać ze wzoru

$$u_0^q=R_q^T\left[R_q R_q^T\right]^{-1}\left(y_f-P_q\right)=R_q^T\left[R_q R_q^T\right]^{-1}y_f. \tag{23}$$

gdzie wektor u_0^q ma postać podaną w (12).

Dowód. Dowód jest podobny do dowodu twierdzenia 7. ■

4.4. Przykład 2

Dany jest dodatni układ ułamkowego rzędu opisany równaniem (4), (5) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Należy zbadać wyjściową sterowalność tego układu.

W rozpatrywanym układzie $N = 2$, $m = 1$, $p = 2$. Zauważmy, że aby układ o macierzach (24) spełniał warunek wyjściowej sterowalności do zera, to rząd ułamkowy musi być $n = 0.3$ zaś $q = 2$. Otrzymamy wówczas

$$\Phi_1 = A + I_N n = 0. \tag{25}$$

Rozpatrywany układ jest więc wyjściowo sterowalny do zera w $q = 2$ krokach wtedy, gdy rząd ułamkowy $n = 0.3$.

Sprawdzimy, czy układ o macierzach (24) i $n = 0.3$ jest wyjściowo osiągalny. Obliczając macierz R_q ze wzoru (12) przy $q = 2$ otrzymamy

$$R_2 = [CB, D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2}. \tag{26}$$

Macierz (26) jest monomialna, więc zgodnie z twierdzeniem 5 rozpatrywany układ jest wyjściowo osiągalny. Warunki twierdzenia 9 są więc spełnione i układ ułamkowego rzędu o macierzach (24) jest wyjściowo sterowalny w $q = 2$ krokach.

Wyznaczymy sterowanie, które w $q = 2$ krokach przeprowadza wyjście rozpatrywanego układu ze stanu określonego przez stan $x_0 = [2 \;\; 1]^T$ do $y_{q-1} = y_f = [3 \;\; 4]^T$.

Macierz $R_2^T [R_2 R_2^T]^{-1} = R_2 \in \Re_+^{2\times 2}$ oraz $P_2 = \Phi_1 x_0 = 0$, więc sterowanie można wyznaczać ze wzoru (23). Dokonując podstawień w (23) otrzymamy

$$u_0^2 = R_2^T \left[R_2 R_2^T \right]^{-1} y_f = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T \in \Re_+^2. \tag{27}$$

Wobec tego $u_0 = 3$, $u_1 = 4$.

Celem sprawdzenia uzyskanych rezultatów, wyznaczymy najpierw wektory stanu x_k z równania (4). Przyjmując $k = 0,1$ w równaniu (4) otrzymamy

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Podstawiając (28) do równania wyjścia (5) otrzymamy

$$y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Ciąg sterowań (27) dla $q = 2$ został wyznaczony poprawnie, ponieważ $y_{q-1} = y_f = [3 \;\; 4]^T$.

5. PODSUMOWANIE

W pracy rozpatrzono problem wyjściowej osiągalności i wyjściowej sterowalności dodatnich układów dyskretnych ułamkowego rzędu. Podano definicje oraz sformułowano proste warunki konieczne i wystarczające wyjściowej osiągalności oraz wyjściowej sterowalności, w tym wyjściowej sterowalności do zera. Podano wzory do wyznaczania nieujemnej sekwencji sterowań (wymuszeń), która przeprowadza wektor wyjścia rozpatrywanego układu ułamkowego rzędu z zerowego oraz niezerowego stanu początkowego x_0 do zadanego y_f. Przedstawione w pracy rozważania można uogólnić dla dodatnich jak i niedodatnich układów dyskretnych ułamkowego rzędu z opóźnieniami.

Pracę wykonano w ramach grantu NN 514 1939 33 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

6. LITERATURA

1. Dzieliński A., Sierociuk D.: *Controllability and observability of fractional order discrete state-space systems*, Proc. 13th IEEE IFAC Intern. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics 27-30 Aug. 2007. Szczecin, Poland, IEEE Conf. No. 12459.
2. Kaczorek T.: *Teoria sterowania i systemów*. PWN, Warszawa 1996.
3. Kaczorek T.: *Output-reachability of positive linear discrete-time systems*. Proc. of 7th Int. Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering" CPEE'06, Odessa, Ukraine, 2006, pp. 64-68.
4. Kaczorek T.: *Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems*, Machine Intelligence and Robotic Control, vol. 6, No. 4, 2007.
5. Klamka J.: *Sterowalność układów dynamicznych*. PWN, Warszawa-Wrocław 1990
6. Kociszewski R.: *Output reachability and output controllability of linear discrete-time systems with delays in state and control*. Recent Advances in Control and Automation, eds. Malinowski K., Rutkowski L., Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2008, s. 93-102.
7. Kriendler E., Sarachik P.E.: *On the concepts of controllability and observability of linear systems*. IEEE Trans. on Autom. Control, vol. 9, 1964, pp. 129-136.
8. Miller K. S., Ross B.: *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Willey, New York 1993.
9. Nishimoto K.: *Fractional calculus*. Koriama: Decartess Press, 1984.

10. Ostalczyk P.: *The non-integer difference of the discrete-time function and its application to the control system synthesis*. Int. J. Syst, Sci. vol. 31, no. 12, 2000, pp. 1551-1561.
11. Podlubny I.: *Fractional differential equations*. San Diego: Academic Press, 1999.
12. Reyes-Melo M.E., Martinez-Vega J.J., Guerrero-Salazar C.A., Ortiz-Mendez U.: *Modelling and relaxation phenomena in organic dielectric materials*. Application of differential and integral operators of fractional order. J. Optoel. Adv. Mat. Vol. 6, no. 3, 2004, pp. 1037-1043.
13. Sjöberg M., Kari L.: *Non-linear behavior of a rubber isolator system using fractional derivatives*. Vehicle Syst. Dynam. Vol. 37, no. 3, 2002, pp. 217-236.
14. Trzasko W.: *Reachability and controllability of positive fractional discrete-time systems with delay*. Journal of Autom., Mobile Robotics&Intell. Systems, vol. 2, no. 3, 2008, pp. 43- 47.