

Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
 Politechnika Białostocka
 Wydział Elektryczny

STABILNOŚĆ MODELI LINIOWYCH UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH

Rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów dynamicznych ciąгло-dyskretnych. Podano komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Fornasiniiego-Marchesiniiego oraz modelu Roessera. Zaproponowane metody mogą być stosowane do badania asymptotycznej stabilności innych znanych modeli układów ciąгло-dyskretnych. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

STABILITY OF MODELS OF LINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

The problem of asymptotic stability of linear dynamic continuous-discrete systems is considered. Computer methods for asymptotic stability analysis of the Fornasin-Marchesini and the Roesser models are given. The methods proposed can be used for asymptotic stability analysis of the other known models of continuous-discrete systems. The considerations are illustrated by numerical examples.

1. WSTĘP

Układami ciąгло-dyskretnymi (hybrydowymi) nazywamy takie układy dynamiczne, w których modelu matematycznym jedna część zmiennych stanu jest z czasem ciągłym zaś druga część jest z czasem dyskretnym, przy czym nie da się rozdzielić równań dynamiki opisujących część ciągłą oraz część dyskretną.

Układami hybrydowymi nazywa się też takie układy, których dynamika jest opisywana za pomocą skończonego zbioru modeli ciągłych, odpowiadającym np. poszczególnym stanom pracy układu. W trakcie pracy układu następują przełączenia pomiędzy modelami ciągłymi, przy czym przełączenia następują w chwilach dyskretnych w sposób zależny lub też niezależny od aktualnego stanu procesu. Układ hybrydowy można zatem rozumieć jako kombinację logicznych przełączeń i różniczkowych lub różnicowych równań opisujących ewolucję ciągłej części wektora stanu [2]. Przykładami tak rozumianych układów hybrydowych są np. samochód z ręczną skrzynią biegów [5] oraz protokół transmisji kontroli TCP opracowany w celu kontroli przepływu danych w sieci [4].

W ostatnich latach problematyka analizy i syntezy układów hybrydowych jest intensywnie rozwijana w literaturze światowej głównie ze względu na potencjalne zastosowania praktyczne. Tej problematyce są poświęcone np. prace [1–5, 7–12]. Stabilność liniowych układów hybrydowych ciąгло-dyskretnych była rozpatrywana w pracach [1, 14–16]. Problem modelowania oraz realizacji liniowych dodatnich układów hybrydowych ciąгло-dyskretnych był analizowany w pracach [9, 10, 12].

W niniejszej pracy zostaną podane komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności dwóch podstawowych modeli liniowych układów ciąгло-dyskretnych, takich jak model Fornasiniiego-Marchesiniiego oraz model typu Roessera. Metody te mogą być wykorzystane do badania asymptotycznej stabilności innych modeli rozpatrywanych układów.

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia: $\mathfrak{R}^{n \times m}$ - zbiór macierzy o wymiarach $n \times m$, przy czym $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n \times 1}$, Z_+ - zbiór liczb całkowitych nieujemnych, $\mathfrak{R}_+ = [0, \infty]$.

2. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę model Fornasiniiego-Marchesiniego układu ciągle-dyskretnego, którego równanie stanu ma postać [7, 8]

$$\dot{x}(t, i+1) = A_0 x(t, i) + A_1 \dot{x}(t, i) + A_2 x(t, i+1) + Bu(t, i), \quad i \in Z_+, \quad t \in \mathfrak{R}_+, \quad (1)$$

gdzie $\dot{x}(t, i) = \partial x(t, i) / \partial t$, $x(t, i) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t, i) \in \mathfrak{R}^m$ zaś stałe macierze A_0 , A_1 , A_2 , B mają odpowiednie wymiary.

Warunki brzegowe dla równania (1) są następujące

$$x(0, i) = x(i), \quad i \in Z_+ \quad \text{oraz} \quad x(t, 0) = x(t), \quad \dot{x}(t, 0) = \dot{x}(t), \quad t \in \mathfrak{R}_+. \quad (2)$$

Macierz charakterystyczna modelu Fornasiniiego-Marchesiniego (1) wyraża się wzorem

$$H(s, z) = szI_n - A_0 - sA_1 - zA_2 \quad (3)$$

zaś funkcja charakterystyczna tego modelu, którą oblicza się ze wzoru

$$w(s, z) = \det H(s, z) = \det[szI_n - A_0 - sA_1 - zA_2], \quad (4)$$

jest wielomianem dwóch zmiennych niezależnych s i z . Można ją napisać w ogólnej postaci

$$w(s, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_{kj} s^k z^j, \quad a_{nn} = 1. \quad (5)$$

Równanie stanu modelu typu Roessera układów ciągle-dyskretnych ma postać [7, 8]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^h(t, i) \\ x^v(t, i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t, i) \\ x^v(t, i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t, i), \quad t \in \mathfrak{R}_+, \quad i \in Z_+, \quad (6)$$

przy czym $\dot{x}^h(t, i) = \partial x^h(t, i) / \partial t$, wektory $x^h(t, i) \in \mathfrak{R}^{n_1}$ i $x^v(t, i) \in \mathfrak{R}^{n_2}$ są to, odpowiednio, wektor horyzontalny i wertykalny, $u(t, i) \in \mathfrak{R}^m$ jest wektorem wymuszeń, zaś $A_{11} \in \mathfrak{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathfrak{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathfrak{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathfrak{R}^{n_2 \times m}$.

Warunki brzegowe dla równania (6) mają postać

$$x^h(t, 0) = x^h(t), \quad x^v(t, 0) = x^v(t), \quad t \in \mathfrak{R}_+, \quad (7a)$$

$$x^h(0, i) = x^h(i), \quad x^v(0, i) = x^v(i), \quad i \geq 1, \quad i \in Z_+. \quad (7b)$$

Macierz charakterystyczną $H(s, z)$ modelu Roessera (6) wyraża się wzorem

$$H(s, z) = \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & zI_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

zaś funkcję charakterystyczną $w(s, z) = \det H(s, z)$ modelu Roessera można obliczyć korzystając z jednego ze wzorów

$$w(s, z) = \det H(s, z) = \det \{ (zI_{n_2} - A_{22}) \det(sI_{n_1} - A_{11}) - A_{21} (\text{adj}(sI_{n_1} - A_{11})) A_{12} \}, \quad (9a)$$

$$w(s, z) = \det H(s, z) = \det \{ (sI_{n_1} - A_{11}) \det(zI_{n_2} - A_{22}) - A_{12} (\text{adj}(zI_{n_2} - A_{22})) A_{21} \}. \quad (9b)$$

Powyższe wzory wynikają z dwóch metod obliczania wyznacznika macierzy blokowej [6].

Funkcję charakterystyczną modelu Roessera można napisać w ogólnej postaci

$$w(s,z) = \det H(s,z) = \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{kj} s^k z^j, \quad a_{n_1 n_2} = 1. \quad (10)$$

Definicje stabilności rozpatrywanych modeli układów ciągle-dyskretnych można sformułować w sposób podany poniżej.

Definicja 1. Model Fornasiniiego-Marchesiniiego (1) układu ciągle-dyskretnego będziemy nazywać asymptotycznie stabilnym, jeżeli przy $u(t,i) \equiv 0$ oraz ograniczonych warunkach brzegowych (2) zachodzi zależność $\lim_{i,t \rightarrow \infty} \|x(t,i)\| = 0$, przy czym $\|x(t,i)\|$ oznacza normę wektora $x(t,i)$.

Definicja 2. Model Roessera (6) układu ciągle-dyskretnego będziemy nazywać asymptotycznie stabilnym, jeżeli przy $u(t,i) \equiv 0$ oraz ograniczonych warunkach brzegowych zachodzą zależności $\lim_{i,t \rightarrow \infty} \|x^h(t,i)\| = 0$ i $\lim_{i,t \rightarrow \infty} \|x^v(t,i)\| = 0$.

Na podstawie prac [14-16] możemy sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. Model Fornasiniiego-Marchesiniiego (1) (model Roessera (6)) układu ciągle-dyskretnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny (4) (wielomian charakterystyczny (9)) spełnia warunek

$$w(s,z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad |z| \geq 1. \quad (11)$$

Wielomian $w(s,z)$ dwóch zmiennych niezależnych spełniający warunek (11) będziemy nazywać wielomianem stabilnym w sensie Hurwitza-Schura. W literaturze anglojęzycznej taki wielomian nazywa się jako: C-D stable (continuous-discrete stable) [1] lub Hurwitz-Schur stable [14-16].

Bezpośrednie sprawdzenie warunku (11) nie jest możliwe, ponieważ nie ma metod wyznaczenia zer wielomianów wielu zmiennych. Warunek ten można sprawdzić pośrednio z wykorzystaniem m. in. obliczeń komputerowych.

Różne metody sprawdzania spełnienia warunku (11) zostały podane w pracy [1] oraz w pracach [14-16]. Będą one omówione w następnym punkcie.

Celem pracy jest podanie komputerowych metod badania asymptotycznej stabilności modeli Fornasiniiego-Marchesiniiego (1) oraz Roessera (6) układów ciągle-dyskretnych.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

W dalszych rozważaniach wykorzystamy poniższy rezultat udowodniony w pracy [13].

Weźmy pod uwagę wielomian $P(s,d)$ dwóch zmiennych niezależnych o postaci

$$P(s,d) = s^n + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^m a_{pq} s^p d^q. \quad (12)$$

Twierdzenie 2 [13]. Dla wielomianu (12) są sobie równoważne poniższe warunki:

- 1) $P(s,d) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, |d| \leq 1,$
- 2) $P(s,d) \neq 0, \operatorname{Re} s = 0, |d| = 1$ i $P(s,1) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0,$
- 3) $P(s,d) \neq 0, \operatorname{Re} s = 0, |d| \leq 1$ i $P(s,1) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0,$

Stosując w wielomianie (12) podstawienie $d = z^{-1}$ otrzymamy

$$\tilde{P}(s, z) = z^m P(s, z^{-1}) = s^n z^m + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \tilde{a}_{pq} s^p z^q. \quad (13)$$

Zauważmy, że $|d| \leq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| \geq 1$.

Z powyższych rozważań oraz twierdzeń 1 i 2 wynika bezpośrednio następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym $w(s, z)$ jest asymptotycznie stabilny (zachodzi (11)) wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) $w(s, 1) \neq 0$, $\operatorname{Re} s \geq 0$,
- 2) $w(s, z) \neq 0$, $\operatorname{Re} s = 0$, $|z| = 1$, lub 2a) $w(s, z) \neq 0$, $\operatorname{Re} s = 0$, $|z| \geq 1$.

W pracy [1] pokazano, że warunek (11) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione trzy poniższe warunki:

1. $w(s, b) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$ i dla pewnej liczby b spełniającej warunek $|b| \geq 1$,
2. $w(a, z) \neq 0$ dla $|z| \geq 1$ i dla pewnej urojonej liczby a ,
3. $\varepsilon(s) \neq 0$ dla każdego urojonego s , przy czym wielomian $\varepsilon(s)$ wyznacza się w sposób podany w [1]. Sposób ten jest podobny do wyznaczania macierzy stabilności przy badaniu stabilności układów dyskretnych.

Zgodnie z pracami [14-16], warunek (11) jest równoważny z dwoma warunkami:

1. $w(s, 1) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$
2. $w(j\omega, z) \neq 0$ dla $\omega \in \mathfrak{R}$ i $|z| \geq 1$.

Należy przy tym zaznaczyć, że warunek 1. w pracy [14] został podany błędnie i miał postać:

$w(s, 0) \neq 0$ dla $\operatorname{Re} s \geq 0$. Poprawna postać tego warunku została podana w późniejszych pracach (np. [15]). Ponadto, w pracy [14] dowód równoważności warunku (11) i powyższych warunków 1. i 2. został podany w sposób nieprecyzyjny.

Spełnienie warunku 1) twierdzenia 3 oznacza, że wszystkie zera wielomianu $w(s, 1)$ jednej zmiennej mają ujemne części rzeczywiste, czyli ten wielomian jest asymptotycznie stabilny w sensie Hurwitza. Do badania jego stabilności można stosować kryterium stabilności Hurwitza.

Wielomian $w(s, 1)$ oblicza się ze wzoru

$$w(s, 1) = \det[s(I_n - A_1) - (A_0 + A_2)] \quad (14)$$

dla modelu Fornasini-Marchesini (1) oraz ze wzoru

$$w(s, 1) = \det H(s, 1) = \det \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

dla modelu Roessera (6).

Ze wzoru (14) wynika, że jeżeli $A_1 = I_n$, to $w(s, 1) = \det[-(A_0 + A_2)]$ jest stałą. Oznacza to, że dla modelu Fornasini-Marchesini wielomian $w(s, 1)$ (stopnia n -tego w przypadku ogólnym, tj. przy $A_1 \neq I_n$), przy $A_1 = I_n$ redukuje się do wielomianu zerowego stopnia. Taki przypadek wymaga dodatkowych badań i nie będzie analizowany w pracy.

Uwzględniając wzory (9) dla $z = 1$ otrzymamy, że dla modelu Roessera (6) wielomian $w(s,1)$ można obliczyć korzystając z jednej z poniższych zależności

$$w(s,1) = \det H(s,1) = \det\{(I_{n_2} - A_{22})\det(sI_{n_1} - A_{11}) - A_{21}(\text{adj}(sI_{n_1} - A_{11}))A_{12}\}, \quad (16a)$$

$$w(s,1) = \det H(s,1) = \det\{(sI_{n_1} - A_{11})\det(I_{n_2} - A_{22}) - A_{12}(\text{adj}(I_{n_2} - A_{22}))A_{21}\}. \quad (16b)$$

Wielomian $w(s,1)$ jest wielomianem stopnia n_1 w przypadku ogólnym. Natomiast w przypadku szczególnym $A_{22} = I_{n_2}$ ze wzoru (16a) mamy $w(s,1) = \det\{-A_{21}(\text{adj}(sI_{n_1} - A_{11}))A_{12}\}$. Oznacza to, że przy $A_{22} = I_{n_2}$ wielomian $w(s,1)$ ma stopień $n_1 - 1$. Taki przypadek wymaga dodatkowych badań i nie będzie analizowany w pracy.

Spełnienie warunku 2a) twierdzenia 3 oznacza, że dla każdego ustalonego $s = jy$, $y \geq 0$, wielomian zespolony $w(jy,z)$ nie ma zer o wartości bezwzględnej większej lub równej jeden, czyli jest on asymptotycznie stabilny w sensie Schura.

Spełnienie warunku 2) twierdzenia 3 oznacza natomiast, że dla każdego ustalonego z spełniającego warunek $|z|=1$ wielomian zespolony $w(s,z)$ jednej zmiennej s nie ma zer na osi urojonej. Łatwo zauważyć, że możemy przyjąć $z = \exp(j\omega)$ i $\omega \in [0, 2\pi]$, przy czym możemy ograniczyć się do przedziału $[0, \pi]$.

Warunek 2) twierdzenia 3 jest więc równoważny z warunkiem

$$w(s, \exp(j\omega)) \neq 0, \quad \text{Re } s = 0, \quad \forall \omega \in [0, \pi], \quad (17)$$

przy czym

$$w(s, \exp(j\omega)) = \det[(sI_n - A_2)\exp(j\omega) - A_0 - sA_1] \quad (18)$$

dla modelu Fornasini-Marchesini (1) oraz

$$w(s, \exp(j\omega)) = \det \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \exp(j\omega)I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

dla modelu Roessera (6).

Twierdzenie 4. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym $w(s,z)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, \exp(j\omega)) \neq 0, \quad \text{Re } s \geq 0, \quad \forall \omega \in [0, \pi]. \quad (20)$$

Dowód. Warunek 2) twierdzenia 3 jest równoważny z warunkiem (17). Jest on spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera zespolonego wielomianu $w(s, \exp(j\omega))$ dla każdego ustalonego $\omega \in [0, \pi]$ mają części rzeczywiste ujemne albo części rzeczywiste dodatnie. Zauważmy, że dla $\omega = 0$ zespolony wielomian $w(s, \exp(j\omega))$ redukuje się do wielomianu rzeczywistego $w(s,1)$, który zgodnie z warunkiem 1) twierdzenia 3, musi mieć wszystkie zera o ujemnych częściach rzeczywistych. Teza twierdzenia wynika zatem z powyższego oraz z faktu, że wartości zer wielomianu $w(s, \exp(j\omega))$ zmieniają się w sposób ciągły przy ciągłych zmianach wartości parametru $\omega \in [0, \pi]$. ■

Warunek (19) twierdzenia 4 można sprawdzić stosując jeden z poniższych algorytmów.

Algorytm 1.

Krok 1. Przyjmujemy odpowiednio mały krok $\Delta\omega$ i dla każdego ustalonego $\omega \in [0, \pi]$ (wyznaczonego z zadaniem krokiem $\Delta\omega$) obliczamy zera wielomianu $w(s, \exp(j\omega))$.

Krok 2. Rysujemy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej położenia wyznaczonych zer w funkcji parametru $\omega \in [0, \pi]$. Otrzymamy w ten sposób linie zer. Ich liczba jest równa stopniowi wielomianu $w(s, z)$ ze względu na zmienną s . Warunek (20) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczone linie zer leżą całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Algorytm 1a.

Krok 1. Przyjmujemy odpowiednio mały krok $\Delta\omega$ i dla każdego ustalonego $\omega \in [0, \pi]$ obliczamy zera $\lambda_k(\omega)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) wielomianu $w(s, \exp(j\omega))$ oraz największą ich część rzeczywistą, tj. $\alpha(\omega) = \max\{\operatorname{Re}\lambda_k(\omega), k = 1, 2, \dots, n\}$.

Krok 2. Rysujemy na płaszczyźnie $(\omega, \alpha(\omega))$ wykres $\alpha(\omega)$, $\omega \in [0, \pi]$. Warunek (20) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczony wykres leży poniżej osi odciętych (wyznaczone wartości $\alpha(\omega)$ są ujemne).

Krok 2a. Obliczamy $\alpha = \max\{\alpha(\omega): \omega \in [0, \pi]\}$. Warunek (20) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha < 0$.

Rozpatrzmy teraz problem badania asymptotycznej stabilności rozpatrywanych modeli układów ciągle-dyskretnych bez konieczności wyznaczania ich wielomianów charakterystycznych.

Twierdzenie 5. Jeżeli $A_1 \neq I_n$, to model Fornasini-Marchesini (1) układu ciągle-dyskretnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne zespolonej macierzy $A_f(\omega)$ mają ujemne części rzeczywiste dla każdego $\omega \in [0, \pi]$, gdzie

$$\begin{aligned} A_f(\omega) &= (I_n \exp(j\omega) - A_1)^{-1} (A_2 \exp(j\omega) + A_0) \\ &= (A_2 \exp(j\omega) + A_0)(I_n \exp(j\omega) - A_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Dowód. Jeżeli $A_1 \neq I_n$, to macierz $I_n \exp(j\omega) - A_1$ jest nieosobliwa dla każdego $\omega \in [0, \pi]$. Wtedy

$$\begin{aligned} [(sI_n - A_2)e^{j\omega} - A_0 - sA_1] &= [I_n e^{j\omega} - A_1][s - (I_n e^{j\omega} - A_1)^{-1}(A_2 e^{j\omega} + A_0)] \\ &= [s - (A_2 e^{j\omega} + A_0)(I_n e^{j\omega} - A_1)^{-1}][I_n e^{j\omega} - A_1] \end{aligned}$$

i ze wzoru (18) mamy

$$w(s, e^{j\omega}) = \det(I_n e^{j\omega} - A_1) \det(sI_n - A_f(\omega)),$$

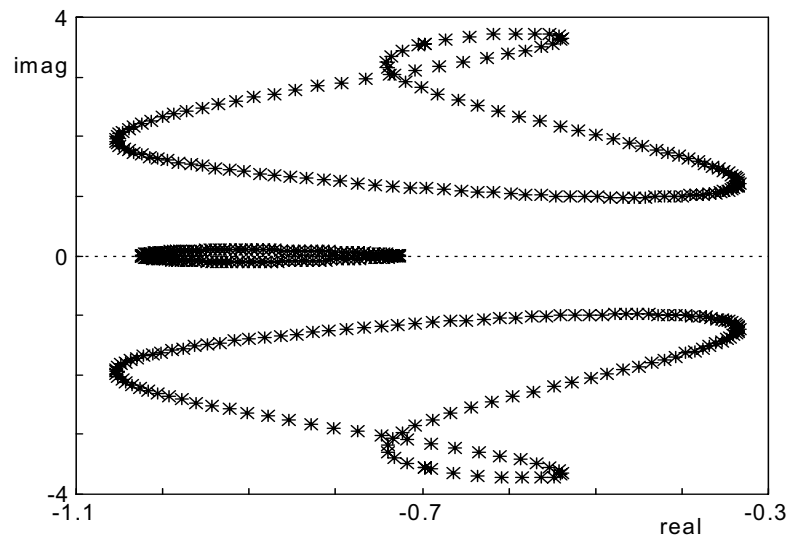
co oznacza, że zerami wielomianu $w(s, \exp(j\omega))$ są wartości własne macierzy (21). Teza wynika zatem z twierdzenia 4. ■

Do sprawdzenia warunku twierdzenia 5 można stosować podane powyżej algorytmy, w których należy brać pod uwagę wartości własne macierzy (21) zamiast zer wielomianu $w(s, \exp(j\omega))$.

Przykład 1. Należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu Fornasiego-Marchesiniego (1) układu ciągle-dyskretnego o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0.4 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 2 \\ 0 & -0.2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Do badania stabilności zastosujemy twierdzenie 5. Wartości własne macierzy (21) (przy macierzach A_0 , A_1 i A_2 o postaciach (22)) obliczone dla ustalonych wartości parametru $\omega \in [0, 2\pi]$, zmieniających się z krokiem $\Delta\omega = 0.015\pi$, są pokazane na rys. 1. Tworzą one trzy linie wartości własnych. Wartość α wyznaczona w sposób podany w Algorytmie 1a wynosi $\alpha = -0.3341$. Oznacza to, że linie wartości własnych leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej na lewo od prostej pionowej przecinającej oś rzeczywistą w punkcie $\alpha = -0.3341$. Warunek twierdzenia 5 jest więc spełniony i rozpatrywany model Fornasiego-Marchesiniego układu ciągle-dyskretnego jest asymptotycznie stabilny.



Rys. 1. Wartości własne macierzy $A_f(\omega)$, $\omega \in [0, 2\pi]$

Twierdzenie 6. Jeżeli $A_{22} \neq I_{n_2}$, to model Roessera (6) układu ciągle-dyskretnego jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy zespolonej $A_r(\omega)$ mają ujemne części rzeczywiste dla każdego $\omega \in [0, \pi]$, przy czym

$$A_r(\omega) = A_{11} + A_{12}(I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22})^{-1}A_{21}. \quad (23)$$

Dowód. Jeżeli $A_{22} \neq I_{n_2}$, to macierz $I_{n_2} \exp(j\omega) - A_{22}$ jest nieosobliwa dla każdego $\omega \in [0, \pi]$. Korzystając z metod wyznaczania wyznacznika macierzy blokowej [6], otrzymamy

$$\det \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22} \end{bmatrix} = \det(I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22}) \det(sI_{n_1} - A_{11} - A_{12}(I_{n_2}e^{j\omega} - A_{22})^{-1}A_{21}).$$

Zatem

$$w(s, e^{j\omega}) = \det \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} e^{j\omega} - A_{22} \end{bmatrix} = \det(I_{n_2} e^{j\omega} - A_{22}) \det(sI_{n_1} - A_r(e^{j\omega})), \quad (24)$$

gdzie macierz $A_r(\omega)$ oblicza się ze wzoru (23).

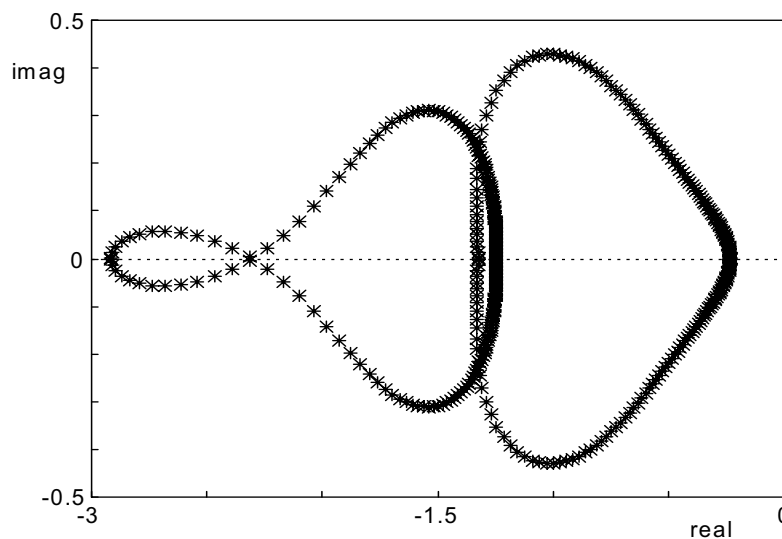
Ze wzoru (24) wynika, że zerami wielomianu (19) są wartości własne macierzy (23). Teza wynika zatem z twierdzenia 4. ■

Do sprawdzenia warunku twierdzenia 6 możemy zastosować podane powyżej algorytmy, w których należy brać pod uwagę wartości własne macierzy (23) zamiast zer wielomianu $w(s, \exp(j\omega))$.

Przykład 2. Należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu Roessera (6) układu ciągle-dyskretnego o macierzach

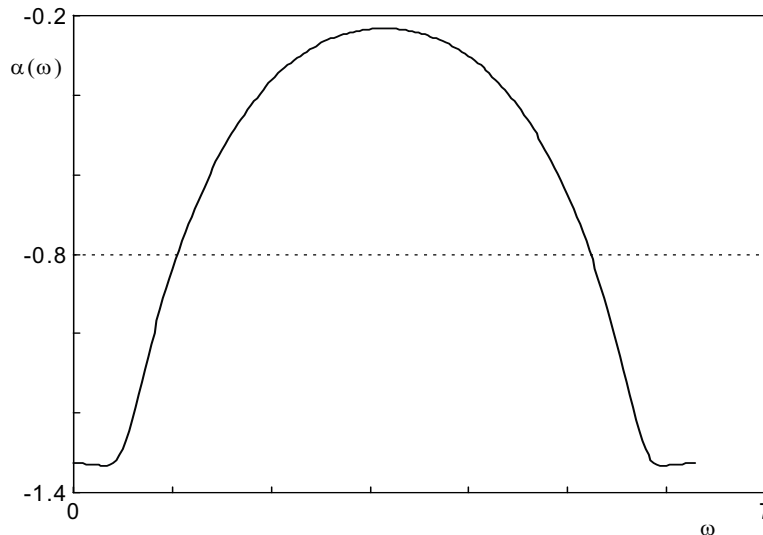
$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 5 & 2.4 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Do badania stabilności zastosujemy twierdzenie 6. Wartości własne macierzy (23) obliczone dla ustalonych wartości parametru $\omega \in [0, 2\pi]$ (zmieniających się z krokiem $\Delta\omega = 0.01\pi$) są pokazane na rys. 2. Tworzą one linie wartości własnych macierzy (23), przy czym wartość α wyznaczona w sposób podany w Algorytmie 1a wynosi $\alpha = -0.2319$. Linie wartości własnych macierzy (23) leżą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej na lewo od prostej pionowej przecinającej oś rzeczywistą w punkcie $\alpha = -0.2319$, co oznacza, że rozpatrywany model Roessera układu ciągle-dyskretnego jest asymptotycznie stabilny, zgodnie z twierdzeniem 6.



Rys. 2. Wartości własne macierzy $A_r(\omega)$, $\omega \in [0, 2\pi]$

Na rys. 3 został dodatkowo pokazany wykres największych części rzeczywistych wartości własnych $\lambda_k(\omega)$ macierzy (23), tj. wykres $\alpha(\omega) = \max\{\text{Re}\lambda_k(\omega), k = 1, 2\}$ w funkcji $\omega \in [0, 2\pi]$. Wykres ten leży poniżej osi odciętych, co potwierdza asymptotyczną stabilność rozpatrywanego układu.

Rys. 3. Wykres $\alpha(\omega)$, $\omega \in [0, 2\pi]$

Zauważmy, że w rozpatrywanym asymptotycznie stabilnym modelu Roessera macierz A_{11} nie jest stabilna w sensie Hurwitza (jedna z jej wartości własnych $s_1 = -1.0916$, $s_2 = 0.0916$ jest dodatnia). Zatem stabilność w sensie Hurwitza macierzy A_{11} nie jest warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności modelu Roessera układu ciąгло-dyskretnego. Podany w pracy [14] rezultat stwierdzający, że macierz A_{11} musi być stabilna w sensie Hurwitza, aby był asymptotycznie stabilny model Roessera układu ciąгло-dyskretnego nie jest więc prawdziwy.

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów hybrydowych ciąгло-dyskretnych. Podano komputerowe metody badania stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu charakterystycznego układów ciąгло-dyskretnych oraz asymptotycznej stabilności modelu Fornasiniiego-Marchesiniiego i modelu Roessera. Metody te mogą być wykorzystane do badania stabilności innych modeli, takich jak model ogólny [7, 8], a także nowy model ogólny analizowany w pracach [9, 10].

W szczególności pokazano, że:

- wielomian charakterystyczny $w(s,z)$ jest stabilny w sensie Hurwitza-Schura wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (20) (twierdzenie 4),
- model Fornasiniiego-Marchesiniiego (1) przy $A_1 \neq I_n$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy (21) mają ujemne części rzeczywiste dla każdego $\omega \in [0, \pi]$ (twierdzenie 5),
- modelu Roessera (6) przy $A_{22} \neq I_{m_2}$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy (23) mają ujemne części rzeczywiste dla każdego $\omega \in [0, \pi]$ (twierdzenie 6).

Proponowane metody badania stabilności można uogólnić na dodatnie układy hybrydowe ciąгло-dyskretnie.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

LITERATURA

1. Bistritz Y.: A stability test for continuous-discrete bivariate polynomials, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 3, pp. III682-685, 2003.
2. Czornik A.: Dynamika układów hybrydowych. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, ser. Automatyka, z. 151, str. 31-36, 2008.
3. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Gałkowski K., Owens D. H.: Control theory for a class of 2D continuous-discrete linear systems, Int. J. Control, vol. 77, no. 9, pp. 847-860, 2004.
4. Hespanha J.: Stochastic Hybrid Systems: Application to Communication Networks. Techn. Report, Dept. of Electrical and Computer Eng., Univ. of California, 2004.
5. Johanson K., Lygeros J., Sastry S.: Modelling hybrid systems, in. Unbehauen H. (Ed): Encyklopedia of Life Support Systems, EOLSS, 2004.
6. Kaczorek T.: Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT, Warszawa 1998.
7. Kaczorek T.: Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
8. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London 2002.
9. Kaczorek T.: Positive 2D hybrid linear systems. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, Vol. 55, No. 4, pp. 351-358, 2007.
10. Kaczorek T.: Realization problem for positive 2D hybrid systems. COMPEL, vol. 27, no. 3, pp. 613-623, 2008.
11. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski Ł.: Solvability of 2D hybrid linear systems - comparison of the different methods, Acta Mechanica et Automatica, vol. 2, no. 2, pp. 59-66, 2008.
12. Kaczorek T., Sajewski Ł.: Wyznaczanie dodatniej realizacji na podstawie schematu zmiennych stanu liniowych układów hybrydowych. Mat. Konf. Nauk.-Techn. Automation 2007, Automatyzacja - Nowości i Perspektywy, Warszawa 2007, PAR 2/2007 (CD-ROM).
13. Kamen E. W.: On the relationship between zero criteria for two-variable polynomials and asymptotic stability of delay differential equations. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-25, no. 5, pp. 983-984, 1980.
14. Xiao Y.: Stability test for 2-D continuous-discrete systems, Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3649-3654, 2001.
15. Xiao Y.: Robust Hurwitz-Schur stability conditions of polytopes of 2-D polynomials. Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3643-3648, 2001.
16. Xiao Y.: Stability, controllability and observability of 2-D continuous-discrete systems, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 4, pp. IV468-IV471, 2003.