mgr inż. Łukasz Sajewski
Politechnika Białostocka
Wydział Elektryczny

WYZNACZANIE REALIZACJI DODATNIEJ LINIOWEGO UKŁADU HYBRYDOWEGO TYPU SISO W POSTACI DRUGIEGO MODELU FORNASINIEGO-MARCHESINIEGO

Sformułowano problem realizacji dla hybrydowych dodatnich układów liniowych o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO), w postaci drugiego modelu Fornasiniego-Marchesiniego. Zaproponowano metodę wyznaczania realizacji dodatniej dla danej transmitancji właściwej w oparciu o schemat zmiennych stanu. Podano warunki wystarczające na istnienie realizacji dodatniej dla danej transmitancji właściwej. Sformułowano również procedurę wyznaczania realizacji dodatniej, którą zilustrowano przykładem numerycznym.

COMPUTATION OF POSITIVE REALIZATION OF HYBRID LINEAR SISO SYSTEMS DESCRIBED BY THE SECOND FORNASINI-MARCHESINI MODEL

The realization problem for positive linear hybrid systems with single input and single output (SISO), described by the second Fornasini-Marchesini model is formulated. The method based on the state variable diagram for finding a positive realization of a given proper transfer function is proposed. Sufficient conditions for the existence of a positive realization of a given proper transfer function are established. A procedure for computation of a positive realization is proposed and illustrated by a numerical example.

1. WSTĘP

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanów oraz odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Taka sytuacja jest spotykana w wielu dziedzinach techniki, biologii, ekonomi, medycyny, itp. Przykładem mogą być wymienniki ciepła, kolumny destylacyjne, modele populacji, modele epidemiologiczne, modele zanieczyszczenia środowiska. Ze względu na podane ograniczenia, w odróżnieniu od układów standardowych, teoria układów dodatnich opiera się na przestrzeniach stożków. Teoria takich układów jest trudniejsza i mniej zaawansowana. Układy hybrydowe łączą w swojej strukturze zarówno część ciągłą jak i część dyskretną a zmienne stanu w takim układzie zależą jednocześnie od chwil czasu ciągłego t oraz dyskretnych stanów i. Dziadzina dodatnich układów hybrydowych jest dziedziną bardzo młodą. Literatura dotycząca układów dodatnich jest dość bogata [2, 9]. Problem realizacji dla ciągłych i dyskretnych układów dodatnich z opóźnieniami jak i bez opóźnień był rozpatrywany w pracach [1, 2, 9-14]. Nowa klasa dwuwymiarowych liniowych hybrydowych układów dodatnich została zaproponowana w pracy [14]. Problem realizacji dodatniej dla tej klasy układów został rozpatrzony w pracy [6, 15] oraz dla układów z opóźnieniami w [5, 7]. Wspomniane układy hybrydowe miały strukturę zbliżoną do struktury układu Roessera [22].

Głównym celem tej pracy jest zaprezentowanie metody rozwiązania zadania realizacji dodatniej dla hybrydowych układów liniowych których struktura jest oparta na drugim modelu Fornasinego-Marchesniego. Zostaną podane warunki wystarczające istnienia realizacji dodatniej dla danej transmitancji właściwej. Zaproponowana zostanie też procedura wyznaczania tej realizacji, wraz z ilustrującym ją przykładem numerycznym.

2. INFORMACJE PODSTAWOWE I SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Rozważmy układ hybrydowy opisany równaniami [9]

$$\dot{x}(t,i+1) = A_1\dot{x}(t,i) + A_2x(t,i+1) + B_1\dot{u}(t,i) + B_2u(t,i+1) \tag{1a}$$

$$y(t,i) = Cx(t,i) + Du(t,i),\ t \in R_+ = [0,+\infty],\ i \in Z_+ \tag{1b}$$

gdzie $\dot{x}(t,i) = \dfrac{\partial x(t,i)}{\partial t}$, $x(t,i) \in R^n$, $u(t,i) \in R^m$, $y(t,i) \in R^p$ są odpowiednio wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi oraz $A_1, A_2 \in R^{n\times n}, B_1, B_2 \in R^{n\times m}, C \in R^{p\times n}, D \in R^{p\times m}$ są macierzami rzeczywistymi.

Warunki początkowe dla (1a) i (1b) mają postać

$$x(0,i) = x_1(i),\ i \in Z_+ \text{ i } x(t,0) = x(t), \dot{x}(t,0) = \dot{x}(t),\ t \in R_+ \tag{2}$$

Niech $R_+^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy rzeczywistych o wymiarach $n\times m$ z nieujemnymi elementami oraz $R_+^n = R_+^{n\times 1}$, oraz M_n będzie zbiorem macierzy Metzlera o wymiarach $n\times n$.

Definicja 1. [9] Układ hybrydowy (1) jest nazywany (wewnętrznie) dodatnim, gdy $x(t,i) \in R_+^n$ i $y(t,i) \in R_+^p$, $t \in R_+$, $i \in Z_+$ dla dowolnych warunków początkowych $x(i) \in R_+^n$, $i \in Z_+$, $x(t) \in R_+^n$, $\dot{x}(t) \in R_+^n$, $t \in R_+$ oraz wszystkich wymuszeń $u(t,i) \in R_+^m$, $\dot{u}(t,i) \in R_+^m$, $t \in R_+$, $i \in Z_+$.

Twierdzenie 1. [9] Układ hybrydowy (1) jest (wewnętrznie) dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_1 \in R_+^{n\times n},\ \ A_2 \in M_n,\ \ A_1A_2 \in R_+^{n\times n},\ \ B_1 \in R_+^{n\times m},\ \ B_2 \in R_+^{n\times m},\ \ C \in R_+^{p\times n},\ \ D \in R_+^{p\times m} \tag{3}$$

Transmitancja układu (1) jest dana zależnością

$$T(s,z) = C[I_nsz - A_1s - A_2z]^{-1}(B_1s + B_2z) + D \quad \in R^{p\times m}(s,z) \tag{4}$$

Definicja 2. Macierze (3) są nazywane realizacją dodatnią danej transmitancji $T(s,z)$, jeśli spełniają równanie (4).

Problem realizacji można sformułować następująco.

Dana jest właściwa transmitancja $T(s,z) \in R^{p\times m}(s,z)$, należy wyznaczyć jej realizację dodatnią (3).

3. ROZWIĄZANIE ZADANIA

Istotę proponowanej metody przedstawimy na początek na następującym przykładzie transmitancji operatorowej układu hybrydowego

$$T(s,z) = \frac{b_{22}s^2z^2 + b_{21}s^2z + b_{21}sz^2 + b_{20}s^2 + b_{02}z^2 + b_{11}sz + b_{10}s + b_{01}z + b_{00}}{s^2z^2 - a_{21}s^2z - a_{12}sz^2 - a_{20}s^2 - a_{02}z^2 - a_{11}sz - a_{10}s - a_{01}z - a_{00}} \tag{5}$$

Mnożąc licznik i mianownik tej transmitancji przez $s^{-2}z^{-2}$ otrzymamy

$$T(s,z) = \frac{b_{22} + b_{21}z^{-1} + b_{12}s^{-1} + b_{20}z^{-2} + b_{02}s^{-2} + b_{11}s^{-1}z^{-1} + b_{10}s^{-1}z^{-2} + b_{01}s^{-2}z^{-1} + b_{00}s^{-2}z^{-2}}{1 - a_{21}z^{-1} - a_{12}s^{-1} - a_{20}z^{-2} - a_{02}s^{-2} - a_{11}s^{-1}z^{-1} - a_{10}s^{-1}z^{-2} - a_{01}s^{-2}z^{-1} - a_{00}s^{-2}z^{-2}} = \frac{Y}{U} \tag{6}$$

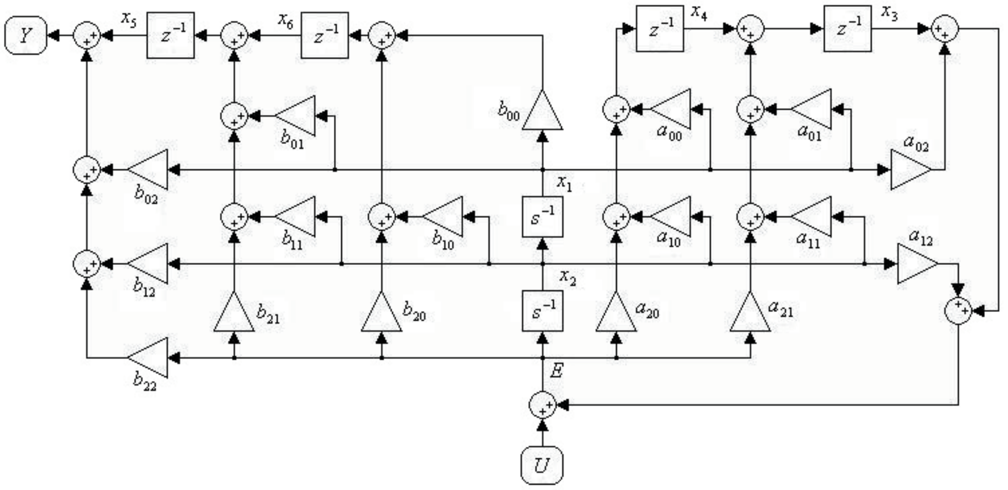
Definiując

$$E = \frac{U}{1 - a_{21}z^{-1} - a_{12}s^{-1} - a_{20}z^{-2} - a_{02}s^{-2} - a_{11}s^{-1}z^{-1} - a_{10}s^{-1}z^{-2} - a_{01}s^{-2}z^{-1} - a_{00}s^{-2}z^{-2}} \tag{7}$$

z (6) otrzymamy

$$\begin{aligned} E &= U + (a_{21}z^{-1} + a_{12}s^{-1} + a_{20}z^{-2} + a_{02}s^{-2} + a_{11}s^{-1}z^{-1} + a_{10}s^{-1}z^{-2} + a_{01}s^{-2}z^{-1} + a_{00}s^{-2}z^{-2})E \\ Y &= (b_{22} + b_{21}z^{-1} + b_{12}s^{-1} + b_{20}z^{-2} + b_{02}s^{-2} + b_{11}s^{-1}z^{-1} + b_{10}s^{-1}z^{-2} + b_{01}s^{-2}z^{-1} + b_{00}s^{-2}z^{-2})E \end{aligned} \tag{8}$$

Na podstawie zależności (8) rysujemy schemat zmiennych stanu przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Pomocniczy schemat zmiennych stanu dla transmitancji (5)

Za zmienne stanu wybieramy wielkości wyjściowe członów całkujących ($x_1(t,i)$, $x_2(t,i)$) i opóźniających ($x_3(t,i)$, $x_4(t,i)$, $x_5(t,i)$, $x_6(t,i)$). Na podstawie schematu zmiennych stanu (rys. 1.) wypisujemy następujące równania

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t,i) &= x_2(t,i) \\ \dot{x}_2(t,i) &= e(t,i) \\ x_3(t,i+1) &= a_{01}x_1(t,i) + a_{11}x_2(t,i) + x_4(t,i) + a_{21}e(t,i) \\ x_4(t,i+1) &= a_{00}x_1(t,i) + a_{10}x_2(t,i) + a_{20}e(t,i) \\ x_5(t,i+1) &= b_{01}x_1(t,i) + b_{11}x_2(t,i) + x_6(t,i) + b_{21}e(t,i) \\ x_6(t,i+1) &= b_{00}x_1(t,i) + b_{10}x_2(t,i) + b_{20}e(t,i) \\ y(t,i) &= b_{02}x_1(t,i) + b_{12}x_2(t,i) + x_5(t,i) + b_{22}e(t,i) \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie

$$e(t,i) = a_{02}x_1(t,i) + a_{12}x_2(t,i) + x_3(t,i) + u(t,i) \tag{10}$$

Zwiększając zmienną i o 1 w równaniach różniczkowych (9) oraz różniczkując równania różnicowe (9), a następnie podstawiając (10) do (9) otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t,i+1) &= x_2(t,i+1) \\ \dot{x}_2(t,i+1) &= a_{02}x_1(t,i+1) + a_{12}x_2(t,i+1) + x_3(t,i+1) + u(t,i+1) \\ \dot{x}_3(t,i+1) &= (a_{01} + a_{02}a_{21})\dot{x}_1(t,i) + (a_{11} + a_{12}a_{21})\dot{x}_2(t,i) + a_{21}\dot{x}_3(t,i) + \dot{x}_4(t,i) + a_{21}\dot{u}(t,i) \\ \dot{x}_4(t,i+1) &= (a_{00} + a_{02}a_{20})\dot{x}_1(t,i) + (a_{10} + a_{12}a_{20})\dot{x}_2(t,i) + a_{20}\dot{x}_3(t,i) + a_{20}\dot{u}(t,i) \\ \dot{x}_5(t,i+1) &= (b_{01} + a_{02}b_{21})\dot{x}_1(t,i) + (b_{11} + a_{12}b_{21})\dot{x}_2(t,i) + b_{21}\dot{x}_3(t,i) + \dot{x}_6(t,i) + b_{21}\dot{u}(t,i) \\ \dot{x}_6(t,i+1) &= (b_{00} + a_{02}b_{20})\dot{x}_1(t,i) + (b_{10} + a_{12}b_{20})\dot{x}_2(t,i) + b_{20}\dot{x}_3(t,i) + b_{20}\dot{u}(t,i) \\ y(t,i) &= (b_{02} + a_{02}b_{22})x_1(t,i) + (b_{12} + a_{12}b_{22})x_2(t,i) + b_{22}x_3(t,i) + x_5(t,i) + b_{22}u(t,i) \end{aligned} \tag{11}$$

Definiując

$$\dot{x}(t,i+1)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t,i+1)\\ \dot{x}_2(t,i+1)\\ \dot{x}_3(t,i+1)\\ \dot{x}_4(t,i+1)\\ \dot{x}_5(t,i+1)\\ \dot{x}_6(t,i+1)\end{bmatrix},\ \dot{x}(t,i)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t,i)\\ \dot{x}_2(t,i)\\ \dot{x}_3(t,i)\\ \dot{x}_4(t,i)\\ \dot{x}_5(t,i)\\ \dot{x}_6(t,i)\end{bmatrix},\ x(t,i+1)=\begin{bmatrix}x_1(t,i+1)\\ x_2(t,i+1)\\ x_3(t,i+1)\\ x_4(t,i+1)\\ x_5(t,i+1)\\ x_6(t,i+1)\end{bmatrix} \tag{12}$$

możemy równania (11) napisać w postaci

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t,i+1)=A_1\dot{x}(t,i)+A_2x(t,i+1)+B_1\dot{u}(t,i)+B_2u(t,i+1)\\ &y(t,i)=Cx(t,i)+Du(t,i)\end{aligned} \tag{13}$$

gdzie

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ (a_{01}+a_{02}a_{21})&(a_{11}+a_{12}a_{21})&a_{21}&1&0&0\\ (a_{00}+a_{02}a_{20})&(a_{10}+a_{12}a_{20})&a_{20}&0&0&0\\ (b_{01}+a_{02}b_{21})&(b_{11}+a_{12}b_{21})&b_{21}&0&0&1\\ (b_{00}+a_{02}b_{20})&(b_{10}+a_{12}b_{20})&b_{20}&0&0&0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\ a_{02}&a_{12}&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ a_{21}\\ a_{20}\\ b_{21}\\ b_{20}\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ C=[(b_{02}+a_{02}b_{22})\ \ (b_{12}+a_{12}b_{22})\ \ b_{22}\ \ 0\ \ 1\ \ 0],\ D=[b_{22}] \tag{14}$$

Z zależności (14) wynika następujący wniosek

Wniosek. Realizacja dodatnia dla podanej transmitancji (5) układu hybrydowego istnieje wtedy, gdy wszystkie współczynniki licznika i mianownika transmitancji (5) są nieujemne.

Uogólniając powyższy przykład na dowolną transmitancję otrzymamy

$$T(s,z)=\frac{b_{n_1,n_2}s^{n_1}z^{n_2}+b_{n_1,n_2-1}s^{n_1}z^{n_2-1}+\ldots+b_{11}sz+b_{10}s+b_{01}z+b_{00}}{s^{n_1}z^{n_2}-a_{n_1,n_2-1}s^{n_1}z^{n_2-1}-\ldots-a_{11}sz-a_{10}s-a_{01}z-a_{00}} \tag{15}$$

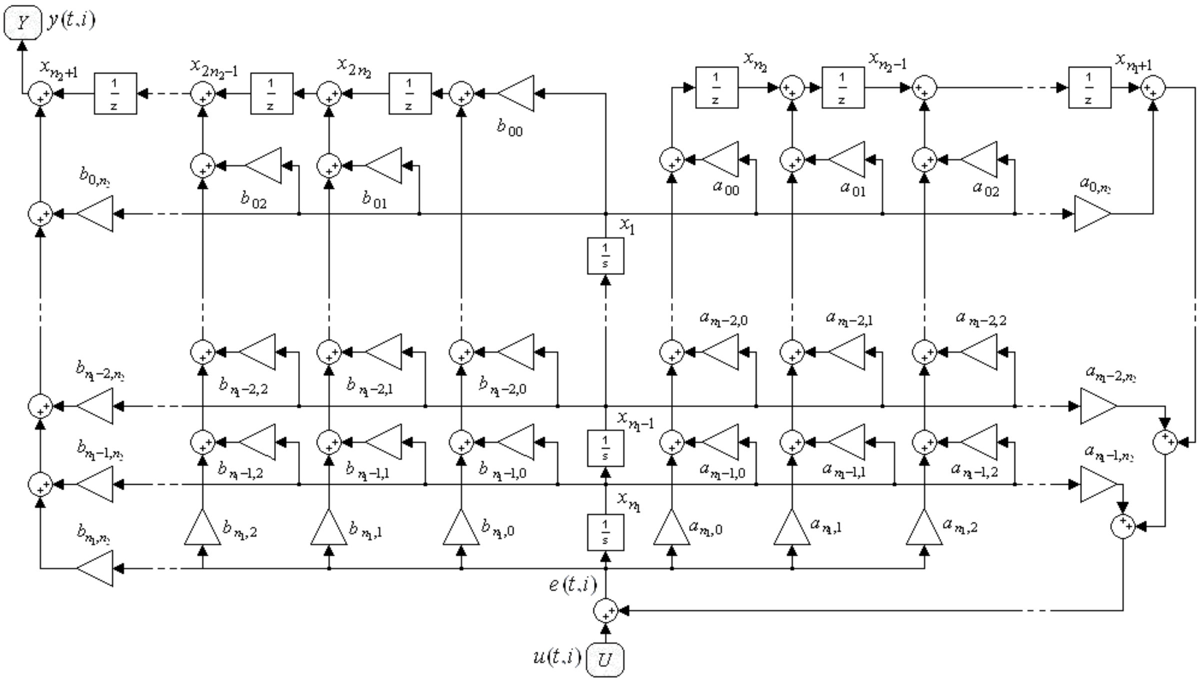
Mnożąc licznik i mianownik tej transmitancji przez $s^{-n_1}z^{-n_2}$ otrzymamy

$$T(s,z)=\frac{b_{n_1,n_2}+b_{n_1,n_2-1}z^{-1}+b_{n_1-1,n_2}s^{-1}+\ldots+b_{00}s^{-n_1}z^{-n_2}}{1-a_{n_1,n_2-1}z^{-1}-a_{n_1-1,n_2}s^{-1}-\ldots-a_{00}s^{-n_1}z^{-n_2}}=\frac{Y}{U} \tag{16}$$

Definiujemy

$$\begin{aligned}&E=U+(a_{n_1,n_2-1}z^{-1}+a_{n_1-1,n_2}s^{-1}+\ldots+a_{00}s^{-n_1}z^{-n_2})E\\ &Y=(b_{n_1,n_2}+b_{n_1,n_2-1}z^{-1}+b_{n_1-1,n_2}s^{-1}+\ldots+b_{00}s^{-n_1}z^{-n_2})E\end{aligned} \tag{17}$$

Schemat zmiennych stanu w tym przypadku ma postać jak na rys. 2.



Rys. 2. Pomocniczy schemat zmiennych stanu dla transmitancji (16)

Za zmienne stanu wybieramy wielkości wyjściowe członów całkujących ($x_1(t,i),\ \ x_2(t,i),\ \ ...,\ \ x_{n_1}(t,i)$) i opóźniających ($x_{n_1+1}(t,i),\ \ x_{n_1+2}(t,i),\ \ ...,\ \ x_{2n_2}(t,i)$).

Na podstawie schematu zmiennych stanu (rys. 2.) wypisujemy równania różniczkowe i różnicowe

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t,i) = x_2(t,i)\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n_1-1}(t,i) = x_{n_1}(t,i)\\
&\dot{x}_{n_1}(t,i) = e(t,i)\\
&x_{n_1+1}(t,i+1) = a_{0,n_2-1}x_1(t,i) + a_{1,n_2-1}x_2(t,i) + ... + a_{n_1-1,n_2-1}x_{n_1}(t,i) + x_{n_1+2}(t,i) + a_{n_1,n_2-1}e(t,i)\\
&x_{n_1+2}(t,i+1) = a_{0,n_2-2}x_1(t,i) + a_{1,n_2-2}x_2(t,i) + ... + a_{n_1-1,n_2-2}x_{n_1}(t,i) + x_{n_1+3}(t,i) + a_{n_1,n_2-2}e(t,i)\\
&\vdots\\
&x_{2,n_2-1}(t,i+1) = a_{0,1}x_1(t,i) + a_{1,1}x_2(t,i) + ... + a_{n_1-1,1}x_{n_1}(t,i) + x_{n_2}(t,i) + a_{n_1,1}e(t,i)\\
&x_{2,n_2}(t,i+1) = a_{00}x_1(t,i) + a_{10}x_2(t,i) + ... + a_{n_1-1,0}x_{n_1}(t,i) + a_{n_1,0}e(t,i)\\
&x_{2,n_2+1}(t,i+1) = b_{0,n_2-1}x_1(t,i) + b_{1,n_2-1}x_2(t,i) + ... + b_{n_1-1,n_2-1}x_{1,n}(t,i) + x_{2,n_2+2}(t,i) + b_{n_1,n_2-1}e(t,i)\\
&x_{2,n_2+2}(t,i+1) = b_{0,n_2-2}x_1(t,i) + b_{1,n_2-2}x_2(t,i) + ... + b_{n_1-1,n_2-2}x_{1,n}(t,i) + x_{2,n_2+3}(t,i) + b_{n_1,n_2-2}e(t,i)\\
&\vdots\\
&x_{2n_2-1}(t,i+1) = b_{0,1}x_1(t,i) + b_{1,1}x_2(t,i) + ... + b_{n_1-1,1}x_{n_1}(t,i) + x_{2n_2}(t,i) + b_{n_1,1}e(t,i)\\
&x_{2n_2}(t,i+1) = b_{00}x_1(t,i) + b_{10}x_2(t,i) + ... + b_{n_1-1,0}x_{n_1}(t,i) + b_{n_1,0}e(t,i)\\
&y(t,i) = b_{0,n_2}x_1(t,i) + b_{1,n_2}x_2(t,i) + ... + b_{n_1-1,n_2}x_{n_1}(t,i) + x_{n_2+1}(t,i) + b_{n_1,n_2}e(t,i)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

gdzie

$$
e(t,i) = a_{0,n_2}x_1(t,i) + a_{1,n_2}x_2(t,i) + ... + a_{n_1-1,n_2}x_{n_1}(t,i) + x_{n_1+1}(t,i) + u(t,i) \tag{19}
$$

Zwiększając zmienną i o 1 w równaniach różniczkowych (dla zmiennych stanu od x_1 do x_{n_1}) oraz różniczkując równania różnicowe (dla zmiennych stanu od x_{n_1+1} do x_{2n_2}), następnie podstawiając (19) do (18) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t,i+1)=x_2(t,i+1)\\
&\dot{x}_2(t,i+1)=x_3(t,i+1)\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n_1-1}(t,i+1)=x_{n_1}(t,i+1)\\
&\dot{x}_{n_1}(t,i+1)=a_{0,n_2}x_1(t,i+1)+a_{1,n_2}x_2(t,i+1)+\ldots+a_{n_1-1,n_2}x_{n_1}(t,i+1)+x_{n_1+1}(t,i+1)+u(t,i+1)\\
&\dot{x}_{n_1+1}(t,i+1)=\overline{a}_{0,n_2-1}\dot{x}_1(t,i)+\overline{a}_{1,n_2-1}\dot{x}_2(t,i)+\ldots+\overline{a}_{n_1-1,n_2-1}\dot{x}_{n_1}(t,i)+a_{n_1,n_2-1}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+\dot{x}_{n_2+2}(t,i)+a_{n_1,n_2-1}\dot{u}(t,i)\\
&\dot{x}_{n_1+2}(t,i+1)=\overline{a}_{0,n_2-2}\dot{x}_1(t,i)+\overline{a}_{1,n_2-2}\dot{x}_2(t,i)+\ldots+\overline{a}_{n_1-1,n_2-2}\dot{x}_{n_1}(t,i)+a_{n_1,n_2-2}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+\dot{x}_{n_1+3}(t,i)+a_{n_1,n_2-2}\dot{u}(t,i)\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n_2-1}(t,i+1)=\overline{a}_{0,1}\dot{x}_2(t,i)+\overline{a}_2\dot{x}_{1,2}(t,i)+\ldots+\overline{a}_{n_1-1,1}\dot{x}_{n_1}(t,i)+a_{n_1,1}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+\dot{x}_{n_2}(t,i)+a_{n_1,1}\dot{u}(t,i)\\
&\dot{x}_{n_2}(t,i+1)=\overline{a}_{00}\dot{x}_1(t,i)+\overline{a}_{10}\dot{x}_2(t,i)+\ldots+\overline{a}_{n_1-1,0}\dot{x}_{n_1}(t,i)+a_{n_1,0}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+a_{n_1,0}\dot{u}(t,i)\\
&\dot{x}_{n_2+1}(t,i+1)=\overline{b}_{0,n_2-1}\dot{x}_1(t,i)+\overline{b}_{1,n_2-1}\dot{x}_2(t,i)+\ldots+\overline{b}_{n_1-1,n_2-1}\dot{x}_{n_1}(t,i)+b_{n_1,n_2-1}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+\dot{x}_{n_2+2}(t,i)+b_{n_1,n_2-1}\dot{u}(t,i)\\
&\dot{x}_{n_2+2}(t,i+1)=\overline{b}_{0,n_2-2}\dot{x}_1(t,i)+\overline{b}_{1,n_2-2}\dot{x}_2(t,i)+\ldots+\overline{b}_{n_2-1,n_2-2}\dot{x}_{n_1}(t,i)+b_{n_1,n_2-2}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+\dot{x}_{n_2+3}(t,i)+b_{n_1,n_2-2}\dot{u}(t,i)\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{2n_2-1}(t,i+1)=\overline{b}_{0,1}\dot{x}_1(t,i)+\overline{b}_{1,1}\dot{x}_2(t,i)+\ldots+\overline{b}_{n_1-1,1}\dot{x}_{n_1}(t,i)+b_{n_1,1}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+\dot{x}_{2n_2}(t,i)+b_{n_1,1}\dot{u}(t,i)\\
&\dot{x}_{2n_2}(t,i+1)=\overline{b}_{00}\dot{x}_1(t,i)+\overline{b}_{10}\dot{x}_2(t,i)+\ldots+\overline{b}_{n_1-1,0}\dot{x}_{n_1}(t,i)+b_{n_1,0}\dot{x}_{n_1+1}(t,i)+b_{n_1,0}\dot{u}(t,i)\\
&y(t,i)=\overline{b}_{0,n_2}x_1(t,i)+\overline{b}_{1,n_2}x_2(t,i)+\ldots+\overline{b}_{n_1-1,n_2}x_{n_1}(t,i)+b_{n_1,n_2}x_{n_1+1}(t,i)+x_{n_2+1}(t,i)+b_{n_1,n_2}u(t,i)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

gdzie

$$\overline{a}_{i,j}=a_{i,j}+a_{i,n_2}a_{n_1,j}\,,\ \overline{b}_{i,j}=b_{i,j}+a_{i,n_2}b_{n_1,j}\ \text{ dla } i=0,1,\ldots,n_1-1;\ j=0,1,\ldots,n_2-1 \tag{21}$$

Definiując (analogicznie do (12)) wektor

$$x(t,i)=\begin{bmatrix} x_1(t,i)\\ \vdots\\ x_{n_1}(t,i)\\ x_{n_1+1}(t,i)\\ \vdots\\ x_{2n_2-1}(t,i)\\ x_{2n_2}(t,i)\end{bmatrix} \tag{22}$$

Możemy równania (20) napisać w postaci macierzowej (1a), (1b) gdzie

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overline{a}_{0,n_2-1} & \dots & \overline{a}_{n_1-1,n_2-1} & a_{n_1,n_2-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overline{a}_{0,n_2-2} & \dots & \overline{a}_{n_1-1,n_2-2} & a_{n_1,n_2-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \overline{a}_{01} & \dots & \overline{a}_{n_1-1,1} & a_{n_1,1} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overline{a}_{00} & \dots & \overline{a}_{n_1-1,0} & a_{n_1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overline{b}_{0,n_2-1} & \dots & \overline{b}_{n_1-1,n_2-1} & b_{n_1,n_2-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \overline{b}_{0,n_2-2} & \dots & \overline{b}_{n_1-1,n_2-2} & b_{n_1,n_2-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \overline{b}_{01} & \dots & \overline{b}_{n_1-1,1} & b_{n_1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \overline{b}_{00} & \dots & \overline{b}_{n_1-1,0} & b_{n_1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n_1+2n_2)\times(n_1+2n_2)},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{0,n_2} & a_{1,n_2} & a_{2,n_2} & \dots & a_{n_1-1,n_2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n_1+2n_2)\times(n_1+2n_2)} \tag{23}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n_1,n_2-1} \\ \vdots \\ a_{n_1,0} \\ b_{n_1,n_2-1} \\ \vdots \\ b_{n_1,0} \end{bmatrix} \in R^{(n_1+2n_2)\times 1}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \in R^{(n_1+2n_2)\times 1}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R^{n_1\times 1}, \quad B_{22} = [0] \in R^{2n_2\times 1},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in R^{1\times(n_1+2n_2)}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \overline{b}_{0,n_2} & \overline{b}_{1,n_2} & \dots & \overline{b}_{n_1-1,n_2} \end{bmatrix} \in R^{1\times n_1}, C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \in R^{1\times 2n_2},$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} b_{n_1,n_2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{1\times n_2}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{1\times n_2}$$

$$D = \begin{bmatrix} b_{n_1,n_2} \end{bmatrix} \in R^{1\times 1}$$

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 2. Realizacja dodatnia układu hybrydowego o danej transmitancji właściwej (15) istnieje wtedy, gdy wszystkie współczynniki tej transmitancji są nieujemne.

Realizację dodatnią dla danej transmitancji właściwej układu hybrydowego można wyznaczyć korzystając z następującej procedury

Procedura

Krok 1. Daną transmitancję o postaci (15) sprowadzamy do postaci (16) i wyznaczamy zależności (17).

Krok 2. Na podstawie równań (17) rysujemy schemat zmiennych stanu jak na rys. 2.

Krok 3. Wybieramy zmienne stanu i wypisujemy równania (18), (19) następnie przekształcamy je do postaci (20).

Krok 4. Na podstawie równań (20) wyznaczamy poszukiwaną realizację transmitancji (15) o postaci (23).

4. PRZYKŁAD LICZBOWY

Dana jest transmitancja właściwa o postaci

$$T(s,z)=\frac{6s^2z+5s^2+4sz+3s+2z+1}{s^2z-0.5s^2+0.4sz-0.3s-0.2z-0.1} \tag{24}$$

należy wyznaczyć jej realizację dodatnią (23). W tym przypadku $n=2$ i $m=1$.

Stosując procedurę otrzymamy.

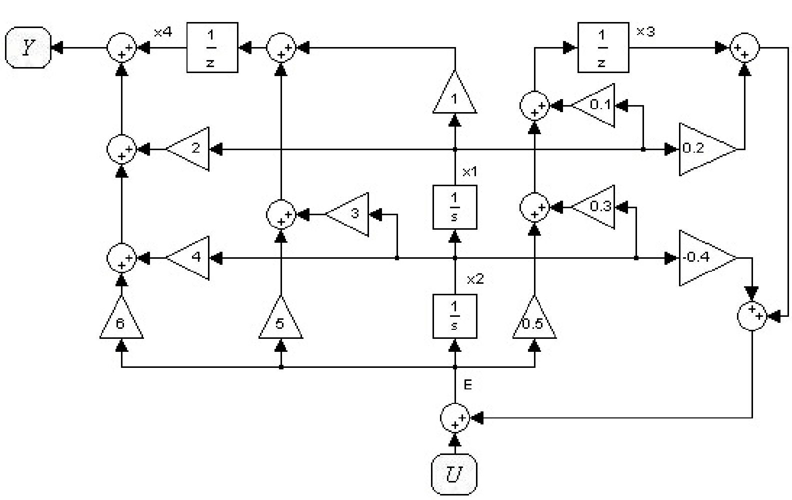
Krok 1. Mnożąc licznik i mianownik transmitancji (24) przez $s^{-2}z^{-1}$ otrzymujemy

$$T(s,z)=\frac{6+5z^{-1}+4s^{-1}+3s^{-1}z^{-1}+2s^{-2}+s^{-2}z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.4s^{-1}-0.3s^{-1}z^{-1}-0.2s^{-2}-0.1s^{-2}z^{-1}}=\frac{Y}{U} \tag{25}$$

oraz

$$\begin{aligned} E &= U+(0.5z^{-1}-0.4s^{-1}+0.3s^{-1}z^{-1}+0.2s^{-2}+0.1s^{-2}z^{-1})E \\ Y &= (6+5z^{-1}+4s^{-1}+3s^{-1}z^{-1}+2s^{-2}+s^{-2}z^{-1})E \end{aligned} \tag{26}$$

Krok 2. Schemat zmiennych stanu ma postać jak na rys. 3



Rys. 3. Pomocniczy schemat zmiennych stanu dla transmitancji (24)

Krok 3. Na podstawie schematu zmiennych stanu (rys. 3) wypisujemy równania stanu

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t,i) = x_2(t,i)\\
&\dot{x}_2(t,i) = 0.2x_1(t,i) - 0.4x_2(t,i) + x_3(t,i) + u(t,i)\\
&x_3(t,i+1) = 0.2x_1(t,i) + 0,1x_2(t,i) + 0,5x_3(t,i) + 0.5u(t,i)\\
&x_4(t,i+1) = 2x_1(t,i) + x_2(t,i) + 5x_3(t,i) + 5u(t,i)\\
&y(t,i) = 3,2x_1(t,i) + 1.6x_2(t,i) + 6x_3(t,i) + x_4(t,i) + 6u(t,i)
\end{aligned} \tag{27}$$

które po przekształceniu i zapisaniu w postaci macierzowej mają postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t,i+1) \\ \dot{x}_2(t,i+1) \\ \dot{x}_3(t,i+1) \\ \dot{x}_4(t,i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t,i) \\ \dot{x}_2(t,i) \\ \dot{x}_3(t,i) \\ \dot{x}_4(t,i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t,i+1) \\ x_2(t,i+1) \\ x_3(t,i+1) \\ x_4(t,i+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 5 \end{bmatrix} \dot{u}(t,i) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t,i+1)$$

$$y(t,i) = \begin{bmatrix} 3.2 & 1.6 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \\ x_3(t,i) \\ x_4(t,i) \end{bmatrix} + 6u(t,i) \tag{28}$$

Krok 4. Poszukiwana realizacja ma postać

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 3.2 & 1.6 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [6] \tag{29}$$

Otrzymana realizacja (29) jest realizacją dodatnią gdyż spełnione są warunki twierdzenia 1.

5. PODSUMOWANIE

Została zaproponowana metoda wyznaczania realizacji dodatniej hybrydowych układów liniowych o strukturze drugiego modelu Fornasiniego-Marchesiniego. Sformułowane zostały warunki wystarczające istnienia dodatniej realizacji dla danej transmitancji właściwej układu hybrydowego. Zaproponowano procedurę wyznaczania realizacji dodatniej oraz zilustrowano tę procedurę przykładem numerycznym. Problemem otwartym jest sformułowanie warunków koniecznych i wystarczających istnienia realizacji dodatniej dla układów hybrydowych.

6. LITERATURA

[1] L. Benvenuti and L. Farina: *A tutorial on the positive realization problem*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, No 5, 2004, pp. 651-664.

[2] L. Farina and S. Rinaldi: *Positive Linear Systems; Theory and Applications*, J. Wiley, New York, 2000.

[3] T. Kaczorek and M. Busłowicz: *Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay*, 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 6-9, 2004, Kusadasi, Izmir, Turkey.

[4] T. Kaczorek and M. Busłowicz: *Minimal realization problem for positive multivariable linear systems with delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Vol. 14, No. 2, 2004, pp. 181-187.

[5] T. Kaczorek and Ł. Sajewski: *Computation of positive realization of MIMO hybrid linear systems with delays using the state variable diagram method*, 16th International Conference on Systems Science, Wrocław 4 – 6 Wrzesień 2007, Vol. 1, 2007, pp. 150-160.

[6] T. Kaczorek and Ł. Sajewski: *Computation of positive realization of MIMO hybrid linear systems using the state variable diagram method*, Archives of Control Sciences – Vol. 17, 2007, No.1 pp. 5-21.

[7] T. Kaczorek and Ł. Sajewski: *Realization problem for positive 2D hybrid systems with one delay in state and input vectors*, 8th International Workshop „Computational Problems of Electrical Engineering", Wilkasy 14 – 16 Wrzesień 2007, Przegląd Elektrotechniczny – 2/2007, pp. 242-246.

[8] T. Kaczorek: *Some recent developments in positive systems*, Proc. 7th Conference of Dynamical Systems Theory and Applications, pp. 25-35, Łódź 2003.

[9] T. Kaczorek: *Positive 1D and 2D systems*, Springer Verlag, London 2002.

[10] T. Kaczorek: *A realization problem for positive continues-time linear systems with reduced numbers of delay*, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 2006, Vol. 16, No. 3, pp. 325-331.

[11] T. Kaczorek: *Realization problem for positive multivariable discrete-time linear systems with delays in the state vector and inputs*, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 2006, Vol. 16, No. 2, pp. 101-106.

[12] T. Kaczorek: *Realization problem for positive discrete-time systems with delay*, System Science, Vol. 30, No. 4, 2004, pp. 117-130.

[13] T. Kaczorek: *Positive minimal realizations for singular discrete-time systems with delays in state and delays in control*, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., Vol 53, No 3, 2005, pp. 293-298.

[14] T. Kaczorek: *Positive 2D hybrid linear systems*, Proc. Inter. Conf. Numerical Linear Algebra in Signals Systems and Control 2007.

[15] T. Kaczorek: *Realization problem for positive 2D hybrid systems*, Submitted to COMPEL.

[16] T. Kaczorek: *Two-Dimensional Linear Systems*, Springer Verlag, Berlin 1985.

[17] T. Kaczorek: *Determination of singular positive realization of improper transfer function of 2D linear systems*, SMC Zakopane 2007.

[18] J. Klamka: *Controllability of Dynamical Systems*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.

[19] J. Kurek: *The general state-space model for a two-dimensional linear digital system*, IEEE Trans. Austom. Contr. AC-30 , June 1985, pp. 600-602.

[20] V. M. Marchenko and O. N. Poddubnaya: *Relative controllability of stationary hybrid systems*, 10th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, 30 Aug. -2 Sept. 2004, Międzyzdroje, Poland pp. 267-272.

[21] V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiewicz: *On the observability of linear differential-algebraic systems with delays*, IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. 51, No. 8, 2006, pp. 1387-1392.

[22] R. B. Roesser: *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-20, 1 (1975), pp. 1-10.