dr inż. Wojciech Trzasko
Politechnika Białostocka w Białymstoku

WZGLĘDNA PUNKTOWA ZUPEŁNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH

W pracy sformułowano definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych. Podano też metodę wyznaczania nieujemnych warunków brzegowych, dla których trajektoria stanu układu względnie punktowo zupełnego przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy. Rozważania zilustrowano przykładem.

RELATIVE POINTWISE COMPLETENESS OF POSITIVE CONTINUOUS – DISCRETE TIME SYSTEMS

The paper considers a class of linear 2D positive continuous-discrete time systems. The definitions of pointwise completeness and relative pointwise completeness are introduced and necessary and sufficient conditions are given. The considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykłady dodatnich układów liniowych są podane w monografii [5] oraz cytowanej tam literaturze.

W teorii układów dodatnich zamiast przestrzeni liniowych korzystamy z teorii stożków. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i mniej zaawansowaną od klasycznej teorii układów liniowych. Problem analizy i syntezy dodatnich układów liniowych z opóźnieniem od stanu jest tematem wielu publikacji w ostatnich kilku latach, np. [1, 5, 8, 9].

Ostatnio, nowa klasa dwuwymiarowych liniowych hybrydowych (ciągło-dyskretnych) układów dodatnich została zaproponowana w pracy [4], a w pracy [6] podano warunki względnej sterowalności stacjonarnych układów hybrydowych.

Pierwszy raz pojęcie punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji ciągłych układów z opóźnieniami wprowadził Weiss (np. [10]). Sformułowany przez Weissa problem był rozpatrywany w wielu pracach, np. [3, 7].

Problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnych ogólnych układów z opóźnieniami został sformułowany i rozwiązany w pracy [2], zaś w pracach [1, 9] został rozwiązany dla układów dodatnich.

W niniejszej pracy, wykorzystując rezultaty prac [1, 9], rozpatrzymy problem punktowej zupełności oraz względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych, dla których rozwiązanie analityczne równań stanu zostały podane w pracy [4]. Najpierw, uwzględniając specyfikę dodatnich układów dwuwymiarowych, zostaną wprowadzone definicje punktowej zupełności i względnej punktowej zupełności. Następnie zostaną podane warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności takich układów oraz prosta metoda wyznaczania nieujemnych warunków brzegowych, dla których trajektoria stanu układu względnie punktowo zupełnego przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy.

2. DODATNI UKŁAD CIĄGŁO-DYSKRETNY

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^{n}=\Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_{+}^{n\times m}$, przy czym $\Re_{+}^{n}=\Re_{+}^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_{+}, zaś zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych przez $R_{+}=[0,+\infty)$.

Weźmy pod uwagę dwuwymiarowy układ ciągło-dyskretny liniowy stacjonarny opisany równaniami stanu

$$\dot{x}_1(t,i)=A_{11}x_1(t,i)+A_{12}x_2(t,i)\,,\ t\in R_{+}, \tag{1a}$$

$$x_2(t,i+1)=A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i)\,,\ i\in Z_{+}, \tag{1b}$$

przy czym $\dot{x}_1(t,i)=\dfrac{\partial x_1(t,i)}{\partial t}$, $x_1(t,i)\in\Re^{n_1}$, $x_2(t,i)\in\Re^{n_2}$ oraz $A_{11}\in\Re^{n_1\times n_1}$, $A_{12}\in\Re^{n_1\times n_2}$, $A_{21}\in\Re^{n_2\times n_1}$, $A_{22}\in\Re^{n_2\times n_2}$.

Układ (1) ma strukturę podobną do modelu 2W Roessera [5], gdzie $x_1(t,i)\in\Re^{n_1}$ jest odpowiednikiem wektora horyzontalnego, zaś $x_2(t,i)\in\Re^{n_2}$ wektora wertykalnego. W pracy [4] układy ciągło dyskretne są nazywane dwuwymiarowymi układami hybrydowymi.

Warunki brzegowe dla układu (1) mają postać

$$x_1(0,i)=x_1(i)\,,\ i\in Z_{+}\ \text{oraz}\ x_2(t,0)=x_2(t)\,,\ t\in R_{+}. \tag{2}$$

Definicja 1. [4] Układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy 2W modelem wewnętrznie dodatnim, jeżeli dla dowolnych dodatnich warunków brzegowych

$$x_1(i)\in\Re_{+}^{n_1}\,,\ i\in Z_{+}\ \text{oraz}\ x_2(t)\in\Re_{+}^{n_2}\,,\ t\in R_{+}, \tag{3}$$

zachodzi $x_1(t,i)\in\Re_{+}^{n_1}$ i $x_2(t,i)\in\Re_{+}^{n_2}$ dla wszystkich $t\in R_{+}$ i $i\in Z_{+}$.

Twierdzenie 1. Rozwiązanie układu (1) spełniające warunki brzegowe (2) ma postać

$$x_1(t,i)=\begin{cases}\Phi(t)x_1(0)+P(t)x_2(t) & \text{dla}\ i=0\\ \Phi(t)x_1(i)+\sum\limits_{k=0}^{i-1}P(t)(A_{21}P(t)+A_{22})^{i-k-1}A_{21}\Phi(t)x_1(k)+P(t)(A_{21}P(t)+A_{22})^{i}x_2(t) & \text{dla}\ i=1,2,..\end{cases} \tag{4a}$$

$$x_2(t,i)=\sum_{k=0}^{i-1}(A_{21}P(t)+A_{22})^{i-k-1}A_{21}\Phi(t)x_1(k)+(A_{21}P(t)+A_{22})^{i}x_2(t)\quad dla\ \ i=1,2,... \tag{4b}$$

przy czym $\Phi(t)=e^{A_{11}t}$, a $P(t)$ jest operatorem określonym zależnością

$$P(t)x=\int_0^t\Phi(t-\tau)A_{12}x(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Dowód. Rozwiązanie układu (1) jest przypadkiem szczególnym rozwiązania układu hybrydowego, zaproponowanego w pracy [4], tzn. przy macierzach wejść $B_1=B_2=0$. Dowód przeprowadza się podobnie jak w twierdzeniu 1 pracy [4].

□

Twierdzenie 2. [4] Układ ciągło-dyskretny (1) jest dodatni wewnętrznie, wtedy i tylko wtedy, gdy

1. A_{11} jest macierzą Metzlera, (6a)

2. $A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \Re_+^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$. (6b)

Dowód. Dowód przeprowadzimy podobnie jak w twierdzeniu 2 pracy [4].

Dostateczność. Ogólnie wiadomo, że macierz $\Phi(t) = e^{A_{11}t} \in \Re_+^{n_1 \times n_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A_{11} jest macierzą Metzlera. Jeżeli A_{11} jest macierzą Metzlera, zaś pozostałe macierze mają elementy nieujemne (6b) i warunki brzegowe spełniają (3), to z (4a) mamy $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$, a z równania (4b) $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$, $i \in Z_+$, $t \in R_+$.

Konieczność. Niech $x_2(t) = 0$, $t \in R_+$ i $x_1(0) = e_i$ (i-ta kolumna macierzy jednostkowej I_{n_1}). Z (1a) dla i = 0, $t \in R_+$ i (4a) mamy $\dot{x}_1(t,0) = A_{11}\Phi(t)e_i$.Zauważmy, że aby trajektoria nie wyszła z ćwiartki $\Re_+^{n_1}$ musi być $\dot{x}_1(0,0) = A_{11}e_1 \in \Re_+^{n_1}$, co implikuje $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$. Macierz A_{11} musi być macierzą Metzlera. Zaś z (4b) dla i = 1, $t \in R_+$ mamy $x_2(t,1) = A_{21}\Phi(t)x_1(0) \geq 0$, co implikuje $A_{21} \in \Re_+^{n_2 \times n_1}$, gdyż $x_1(0) \in \Re_+^{n_1}$ może być dowolne. Podobnie, dla $x_1(0) = 0$, z (1a) mamy $\dot{x}_1(0,0) = A_{12}x_2(0) \in \Re_+^{n_1}$, co implikuje $A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}$, gdyż $x_2(0)$ może być dowolne. Zaś z (4b) dla i = 1, $t \in R_+$ mamy $x_2(t,1) = (A_{21}P(t) + A_{22})x_2(t) \geq 0$, co implikuje $A_{22} \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$, gdyż $x_2(t) \in \Re_+^{n_2}$ może być dowolne.

□

3. WZGLĘDNA PUNKTOWA ZUPEŁNOŚĆ

Wykorzystując pojęcia punktowej zupełności, zdefiniowanej dla układów ciągłych z opóźnieniami [3, 7, 10] oraz dla układów dyskretnych [2], w tym dodatnich [1, 9], można sformułować następujące definicje.

Definicja 2. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) nazywamy punktowo zupełnym w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, jeżeli dla każdego wektora

$$x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} \in \Re_+^{n_1+n_2} \tag{7}$$

można tak dobrać warunki brzegowe (3), że $x = \begin{bmatrix} x_1(t_f,k) \\ x_2(t_f,k) \end{bmatrix}$.

Definicja 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) będziemy nazywać względnie punktowo zupełnym dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, jeżeli dla każdej składowej

$$x_{1f} = x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1} \tag{8}$$

wektora stanu (7) można tak dobrać warunki brzegowe (3), że $x_{1f} = x_1(t_f,k)$.

Definicja 4. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) będziemy nazywać względnie punktowo zupełnym dla stanu $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, jeżeli dla każdej składowej

$$x_{2f} = x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2} \tag{9}$$

wektora stanu (7) można tak dobrać warunki brzegowe (3), że $x_{2f} = x_2(t_f, k)$.

Poszukiwać będziemy rozwiązania, przy założeniu $x_2(t) := x_2$ dla $0 \le t \le t_f$, tzn. x_2 jest stałe w całym przedziale.

Rozwiązanie (4) równań stanu układu ciągło-dyskretnego z warunkami brzegowymi (3) dla $t = t_f > 0,\ i = k \ge 1$ można napisać w postaci

$$x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} x_0 = \boldsymbol{D}x_0, \tag{10}$$

gdzie

$$x_0 = [x_1(0), x_1(1), \ldots, x_1(k), x_2(t)]^T \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}, \tag{11a}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1(0) & D_1(1) & \cdots & D_1(k) & D_1(k+1) \\ D_0(0) & D_2(1) & \cdots & 0 & D_2(k+1) \end{bmatrix} \in \Re_+^{(n_1+n_2)\times[(k+1)n_1+n_2]} \tag{11b}$$

przy czym

$$D_1(j) = P(t_f)D^{k-1-j}A_{21}\Phi(t_f),\ D_2(j) = D^{k-1-j}A_{21}\Phi(t_f),\ \text{dla}\ \ j = 0,1,\ldots,k-1, \tag{12a}$$

$$D_1(k) = \Phi(t_f), \tag{12b}$$

$$D_1(k+1) = P(t_f)D^k,\ \ D_2(k+1) = D^k, \tag{12c}$$

zaś

$$D = A_{21}P(t_f) + A_{22} \in \Re_+^{n_2\times n_2}. \tag{13}$$

Z definicji 2 i wzoru (10) wynika następujący warunek konieczny punktowej zupełności.

Lemat 1. Warunkiem koniecznym, aby dodatni układ ciągło-dyskretny był punktowo zupełny w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+,\ t = t_f > 0,\ i = k \ge 1,$ musi być spełniony warunek

$$rank\boldsymbol{D} = n_1 + n_2. \tag{14}$$

Należy zauważyć, że powyższy warunek jest także warunkiem koniecznym i wystarczającym punktowej zupełności standardowych układów ciągło-dyskretnych (1), tzn. o dowolnych elementach macierzy $A_{11},\ A_{12},\ A_{21},\ A_{22}$.

Niech $\mathrm{Im}_+\ \boldsymbol{D}$ będzie dodatnim obrazem macierzy (11b), tzn. zbiorem wszystkich dodatnich kombinacji liniowych kolumn tej macierzy

$$\mathrm{Im}_+\ \boldsymbol{D} = \{x \in \Re_+^{n_1+n_2} : x = \boldsymbol{D}x_0,\ x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}\}. \tag{15}$$

Twierdzenie 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest punktowo zupełny w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+,\ \ t = t_f > 0,\ \ i = k \ge 1,$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z niżej podanych równoważnych warunków:

1) $\mathrm{Im}_+\ \boldsymbol{D} = \Re_+^{n_1+n_2}$, gdzie macierz $\boldsymbol{D}$ jest określona przez (11b),

2) z macierzy $\boldsymbol{D}$ można wybrać $n_1 + n_2$ liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz $\widetilde{\boldsymbol{D}}$ utworzona z tych kolumn jest uogólnioną macierzą permutacji, zwaną też macierzą monomialną (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe),

3) z macierzy $\boldsymbol{D}$ można wybrać $n_1 + n_2$ liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz odwrotna $(\overline{\boldsymbol{D}})^{-1}$ macierzy utworzonej z tych kolumn ma elementy nieujemne.

Dowód. Z definicji 2 i wzoru 10, przy założeniu $x_2(t) := x_2$ dla $0 \le t \le t_f$, wynika, że dodatni układ (1) jest punktowo zupełny w punkcie (t_f, k) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \Re_+^{n_1+n_2}$ istnieje warunek brzegowy $x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$, czyli gdy jest spełniony warunek 1) twierdzenia 3. Jeżeli jest spełniony warunek 1) twierdzenia 3, to z macierzy $\boldsymbol{D}$ można wybrać $n_1 + n_2$ kolumn liniowo niezależnych, które tworzą bazę przestrzeni $\Re_+^{n_1+n_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym wierszu i w każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a pozostałe są zerowe, czyli gdy jest spełniony warunek 2) twierdzenia 3. Macierz utworzona z tych kolumn jest macierzą monomialną. Macierz odwrotna macierzy o nieujemnych elementach jest też macierzą o nieujemnych elementach wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona macierzą monomialną [5]. Zatem warunki 2) i 3) są równoważne.

□

Przy spełnieniu któregokolwiek z warunków twierdzenia 3 na podstawie wzoru (10) można wyznaczyć warunki brzegowe (3) dla dowolnego zadanego stanu (7) w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \ge 1$.

Lemat 2. Jeżeli $\mathrm{rank}\boldsymbol{D} = n_1 + n_2$ oraz

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{[(k+1)n_1+n_2]\times(n_1+n_2)}, \tag{16}$$

to dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest punktowo zupełny w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \ge 1$ i wektor warunków brzegowych x_0 (11a), dla którego rozwiązanie równań (1) dla $t = t_f > 0$, $i = k \ge 1$ jest równe zadanemu stanowi $x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_f,k) \\ x_2(t_f,k) \end{bmatrix} \in \Re_+^{n_1+n_2}$, można wyznaczyć ze wzoru

$$x_0 = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1}x. \tag{16}$$

Dowód. Jeżeli układ (1) jest punktowo zupełny, to $\mathrm{rank}\boldsymbol{D} = n_1 + n_2$, $\det(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}) \ne 0$ i macierz $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1}$ jest dobrze zdefiniowana. Jeżeli zachodzi (16) i $x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_f,k) \\ x_2(t_f,k) \end{bmatrix} \in \Re_+^{n_1+n_2}$, to wtedy $x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$ oraz

$$x = \boldsymbol{D}x_0 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1}x = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix}. \quad \square(17)$$

Z definicji 3 i 4 oraz wzoru (10) wynika następujący warunek konieczny względnej punktowej zupełności.

Lemat 3. Aby dodatni układ ciągło-dyskretny był względnie punktowo zupełny w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$,

1) dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ musi być spełniony warunek

$$rank\boldsymbol{D}_1 = n_1, \tag{18}$$

2) dla stanu $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ musi być spełniony warunek

$$rank\boldsymbol{D}_2 = n_2, \tag{19}$$

gdzie macierze $\boldsymbol{D}_1$ i $\boldsymbol{D}_2$ dane są zależnością (11b).

Łatwo wykazać, że twierdzenie 3 jest prawdziwe dla względnej punktowej zupełności, przy czym dla przypadku 1) należy wziąć pod uwagę macierz $\boldsymbol{D}_1$, o postaci (11b), oraz n_1 liniowo niezależnych kolumn.

Jeżeli którykolwiek z warunków twierdzenia 3 jest spełniony, to ze wzoru

$$x_{1f} = \boldsymbol{D}_1 x_0 \tag{20}$$

możemy wyznaczyć warunki brzegowe $x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$ takie, że $x_{1f} = x_1(t_f,k) \in \Re_+^{n_1}$. Wówczas dla otrzymanych warunków brzegowych i punktu $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, wartość składowej $x_{2f} = x_2(t_f,k) \in \Re_+^{n_2}$ wektora stanu (7) układu (1) wyznacza się ze wzoru

$$x_{2f} = \boldsymbol{D}_2 x_0. \tag{21}$$

Powyższe rozumowanie jest również prawdziwe dla przypadku 2), przy czym w twierdzeniu 3 należy wziąć pod uwagę odpowiednio macierz $\boldsymbol{D}_2$, o postaci (11b), oraz n_2 liniowo niezależnych kolumn, zaś warunki brzegowe $x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$ wyznacza się ze wzoru (21), a następnie wartość składowej $x_{1f} = x_1(t_f,k) \in \Re_+^{n_1}$ wektora stanu (7) układu (1) wyznacza się ze wzoru (20).

Uwzględniając powyższe rozważania i definicje 3 i 4 otrzymamy poniższe lematy.

Lemat 4. Jeżeli $rank\,\boldsymbol{D}_1 = n_1$ oraz

$$\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{[(k+1)n_1+n_2]\times n_1}, \tag{22}$$

to dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest względnie punktowo zupełny dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$.

Jeżeli jest spełniony warunek (22), to wektor warunków brzegowych x_0 (11a), dla którego rozwiązanie równania (1a) dla $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$ jest równe zadanemu stanowi $x_{1f} = x_1(t_f,k) \in \Re_+^{n_1}$, można wyznaczyć ze wzoru

$$x_0 = \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}]^{-1} x_{1f}, \tag{23}$$

zaś wartość składowej $x_{2f} = x_2(t_f,k) \in \Re_+^{n_2}$ wektora stanu (7) układu (1) wyznacza się ze wzoru

$$x_{2f} = \boldsymbol{D}_2 x_0. \tag{24}$$

gdzie macierze $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ są odpowiednimi wierszami macierzy $\boldsymbol{D}$ o postaci (11b).

Lemat 5. Jeżeli $rank\,\boldsymbol{D}_2 = n_2$ oraz

$$\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{[(k+1)n_1+n_2]\times n_2}, \tag{25}$$

to dodatni układ ciągło-dyskretny (1) jest względnie punktowo zupełny dla stanu $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$.

Jeżeli jest spełniony warunek (25), to wektor warunków brzegowych x_0 (11a), dla którego rozwiązanie równania (1b) dla $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$ jest równe zadanemu stanowi $x_{2f} = x_2(t_f, k) \in \Re_+^{n_2}$ można wyznaczyć ze wzoru

$$x_0 = \boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}]^{-1} x_{2f}, \tag{26}$$

zaś wartość składowej $x_{1f} = x_1(t_f, k) \in \Re_+^{n_1}$, wektora stanu (7) układu (1) wyznacza się ze wzoru

$$x_{1f} = \boldsymbol{D}_1 x_0, \tag{27}$$

gdzie macierze $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ są odpowiednimi wierszami macierzy $\boldsymbol{D}$ o postaci (11b).

Dowód powyższych lematów przeprowadza się podobnie jak lematu 2.

4. PRZYKŁAD

Należy zbadać punktową zupełność w punkcie $(t,i) \in \Re_+ \times Z_+$, $t = t_f = 1$, $i = k = 2$ dodatniego układu ciągło-dyskretnego (1) o macierzach:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\; A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\; A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\; A_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Dla rozpatrywanego układu macierz podstawowa ma postać

$$\Phi(t) = e^{A_{11}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

operator (5)

$$P(t_f) = \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau) A_{12} d\tau = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} e^{\tau - t_f} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t_f} \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^2 \tag{26}$$

jest wektorem kolumnowym, zaś macierz (13)

$$D = A_{21} P(t_f) + A_{22} = 3 - e^{-t_f} \in \Re_+^1 \tag{27}$$

jest skalarem. Dla $t_f = 1$ i $k = 2$ ze wzoru (11b) otrzymamy macierz

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1(0) & D_1(1) & D_1(2) & D_1(3) \\ D_2(0) & D_2(1) & 0 & D_2(3) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.6121 & 0.4503 & 0.2325 & 0.1711 & 0.3679 & 0 & 4.3794 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1353 & 0 \\ 0.9683 & 0.7124 & 0.3679 & 0.2707 & 0 & 0 & 6.9281 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz (28) ma $n_1 + n_2 = 3$ liniowo niezależne kolumny, przy czym tylko dwie z nich są monomialne. Zatem nie jest spełniony warunek 2) twierdzenia 3, co oznacza, że rozpatrywany układ nie jest punktowo zupełny w badanym punkcie.

Natomiast z lematu 3 wynika, że układ (1) o macierzach (24) jest względnie punktowo zupełny w badanym punkcie dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^2$.

Ponieważ macierz

$$\boldsymbol{D}_1^T[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0306 & 0 \\ 0.0225 & 0 \\ 0.0116 & 0 \\ 0.0086 & 0 \\ 0.0184 & 0 \\ 0 & 7.3891 \\ 0.2192 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{7\times 2} \tag{29}$$

ma nieujemne elementy, warunek (22) jest spełniony i warunki brzegowe (3) można wyznaczyć ze wzoru (23)

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{11}(0) \\ x_{12}(0) \\ x_{11}(1) \\ x_{12}(1) \\ x_{11}(2) \\ x_{12}(2) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}_1^T[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^T]^{-1}x_{1f} = \begin{bmatrix} 0.0306x_{11f} \\ 0.0225x_{11f} \\ 0.0116x_{11f} \\ 0.0086x_{11f} \\ 0.0184x_{11f} \\ 7.3891x_{12f} \\ 0.2192x_{11f} \end{bmatrix} \in \Re_+^7. \tag{30}$$

Przyjmijmy, że w punkcie $(t_f,k) = (1,2)$ składowa $x_{1f} = x_1(1,2) \in \Re_+^2$ wektora stanu (7) układu (1) jest równa

$$x_{1f} = x_1(1,2) = \begin{bmatrix} x_{11f} \\ x_{12f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Wartość składowej $x_{2f} = x_2(1,2) \in \Re_+^1$ wektora stanu (7) układu (1), która będzie osiągnięta w punkcie $(t_f,k) = (1,2)$ dla powyższych warunków brzegowych, jest równa

$$x_{2f} = \boldsymbol{D}_2 x_0 = 1.5713. \tag{32}$$

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników wyznaczymy rozwiązanie równań (1) o macierzach (24) w punkcie $(t_f, k) = (1,2)$ dla wektora warunków brzegowych (30).

Z ogólnego rozwiązania równania (1a), o postaci

$$x_1(t,i) = \Phi(t)x_1(i) + P(t)x_2(t,i), \tag{33}$$

oraz równania (1b) dla $i = 0,1,2$, odpowiednio otrzymamy

$$x_1(t,0) = \begin{bmatrix} 0.2192 - 0.1886e^{-t} \\ 0.0225e^{-2t} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$x_2(t,1) = 0.6577 - 0.1886e^{-t} + 0.045e^{-2t}, \tag{35a}$$

$$x_1(t,1) = \begin{bmatrix} 0.6577 - 0.8347e^{-t} + 0.2336e^{-2t} - 0.045e^{-3t} \\ 0.0086e^{-2t} \end{bmatrix}, \tag{35b}$$

$$x_2(t,2) = 1.9731 - 1.2119e^{-t} + 0.3408e^{-2t} - 0.045e^{-3t}, \tag{36a}$$

$$x_1(t,2) = \begin{bmatrix} 1.9732 - 3.1667e^{-t} + 1.5527e^{-2t} - 0.3858e^{-3t} + 0.045e^{-4t} \\ 7.3891e^{-2t} \end{bmatrix}. \tag{36b}$$

Z powyższych rozwiązań obliczamy wartości wektora stanu w punktach $(t_f, k) \in R_+ \times Z_+$ dla $t_f = 1$ oraz $k = 0,1,2$, odpowiednio dla składowej $x_1(t,i) \in \Re_+^2$:

$$x_1(1,0) = \begin{bmatrix} 0.1498 \\ 0.0030 \end{bmatrix}, \quad x_1(1,1) = \begin{bmatrix} 0.3800 \\ 0.0012 \end{bmatrix}, \quad x_1(1,2) = x_{1f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

oraz dla składowej $x_2(t,i) \in \Re_+^1$:

$$x_2(1,1) = 0.5944, \quad x_2(1,2) = x_{2f} = 1.5713. \tag{38}$$

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności i względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych, opisanych równaniami stanu (1) przy założeniach (3) i (6).

Sformułowano podstawowe definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności i względnej punktowej zupełności. Podano prostą metodę wyznaczania nieujemnych warunków brzegowych, dla których trajektoria stanu układu względnie punktowo zupełnego przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy.

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na dodatnie dwuwymiarowe układy ciągło-dyskretne ułamkowego rzędu.

LITERATURA

1. Busłowicz M., Kociszewski R., Trzasko W.: Punktowa degeneracja i punktowa zupełność liniowych dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, ser. Automatyka, vol. 145, s. 51-56, 2006.
2. Busłowicz M.: O pewnych właściwościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami, Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektrotechnika nr 1, s. 17-29, 1983.

3. Choundhury A. K.: Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems, Int. J. Control, vol. 16, no. 6, pp. 1083-1100, 1972.
4. Kaczorek T.: Positive 2D hybrid linear systems", Bull. Pol. Ac.: Sci. Tech. 55 (4), pp. 351–358, 2007.
5. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London, 2002.
6. Marchenko V.M., Poddubnaya O.N.: Relative controllability of stationary hybrid systems", 10th IEEE Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 267–272, 2004.
7. Popov V. M.: Pointwise degeneracy of linear time-invariant delay-differential equations," J. Diff. Equation, vol. 11, pp. 541-561, 1972.
8. Trzasko W.: Reachability and controllability of cone discrete-time linear systems with delays in state and control, XVI KKA, Challenging problems of science Control and Automation Recent Advances in Control and Automation, Academic Publishing House EXIT, Warszawa 2008, Rozdział II Stability, Controllability and Observability, s. 114-124.
9. Trzasko W., Busłowicz M., Kaczorek T.: Pointwise Completeness of Discrete-Time Cone-Systems with Delays, in Proc. of EUROCON 2007 (CD), 2007.
10. Weiss L.: Controllability for various linear and nonlinear systems models, Lecture Notes in Mathematics, vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer Verlag, pp. 250-262, 1970.

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego jako projekt badawczy nr G/WE/5/07.