

dr inż. Konrad Andrzej MARKOWSKI
 Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny,
 Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej,

WIELOWYMIAROWE GRAFY SKIEROWANE ODDZIAŁYWAŃ I ICH ZASTOSOWANIE W ANALIZIE UKŁADÓW DODATNICH

W pracy pokazano podstawy klasycznej teorii grafów. Wprowadzono podstawowe definicje oraz omówiono podstawowe właściwości. Zaprezentowano jednowymiarowe grafy skierowane oddziaływań oraz pokazano uogólnienie tych grafów na wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań. Następnie pokazano sposób powiązania wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań z układami jedno- i wielowymiarowymi.

USING MULTIDIMENSIONAL DIGRAPH THEORY IN ANALYSES OF POSITIVE SYSTEMS

In this paper presented the classical graph theory. Introduce the elementary definitions. Presented the one-dimensional digraphs and presented generalization on multi-dimensional digraphs. At the end presented connection between multi-dimensional digraph and positive one- and multi-dimension systems.

1. WPROWADZENIE

W ostatnim czasie obserwuje się duże zainteresowanie matematyką dyskretną, a w szczególności zastosowaniem pewnych aparatów do rozwiązywania problemów z różnych dziedzin, począwszy od nauk humanistycznych takich, jak ekonomia, biologia, medycyna a skończywszy na naukach technicznych takich, jak mechanika, chemia, elektrotechnika czy wreszcie teoria sterowania. Jednym z narzędzi coraz częściej stosowanych do rozwiązywania problemów z różnych dziedzin życia jest teoria grafów.

Pierwsze wykorzystanie grafów skierowanych i nieskierowanych miało początek w analizie i syntezie obwodów elektrycznych. Pierwsze próby użycia teorii jednowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań do analizy układów jednowymiarowych bez opóźnień zostały zapoczątkowane w pracach [10, 11, 15, 22]. Kolejnym etapem było uogólnienie teorii jednowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań na dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań i zastosowanie teorii tej do wyznaczania indeksu osiągalności dla układów dwuwymiarowych opisanych drugim modelem Fornasiniego-Marchesiniego [6, 7, 8]. W efekcie rozszerzono metodę wyznaczania indeksów osiągalności oraz metodę wyznaczania obszaru indeksów osiągalności na układy dwuwymiarowe opisane modelem ogólnym [19, 20, 21]. Następnie rozszerzono zastosowanie dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań do wyznaczania elementów macierzy stanu w układach dwuwymiarowych bez opóźnień opisanych za pomocą modelu ogólnego, pierwszym i drugim modelem Fornasiniego-Marchesiniego [16, 17, 18]. W wyniku tych prac skonstruowano metodę wyznaczania realizacji układów jednowymiarowych i dwuwymiarowych bez opóźnień i z opóźnieniami.

Należy zauważyć, iż teoria wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań może posłużyć jako wydajne narzędzie do analizy szerokiej klasy układów jednowymiarowych i wielowymiarowych bez opóźnień i z opóźnieniami. Stanowi ona alternatywę dla obliczeń klasycznych przy tak trudnych zagadnieniach jak osiągalność czy problem realizacji układów dodatnich bez opóźnień i z opóźnieniami. Kolejnym atutem tego podejścia jest fakt łatwej implementacji algorytmów grafowych, które są dobrze rozwinięte i poznane chociażby z teorii algorytmów i struktur danych.

2. GRAFY SKIEROWANE

2.1. Klasyczna definicja grafu i digrafu

W istniejącej literaturze można spotkać różne definicje grafu [1], [2], [3], [9], [15], [23]. Obserwowane dynamiczne zmiany wynikające ze sposobu definiowania grafu wynikają z potrzeby obejmowania teorią grafów coraz szerszej klasy struktur.

Aby określić graf, należy określić zbiór jego wierzchołków \mathbb{V} , zbiór gałęzi \mathbb{E} oraz relację \mathbb{P} . Teraz możemy przyjąć następującą, ogólną definicję grafu.

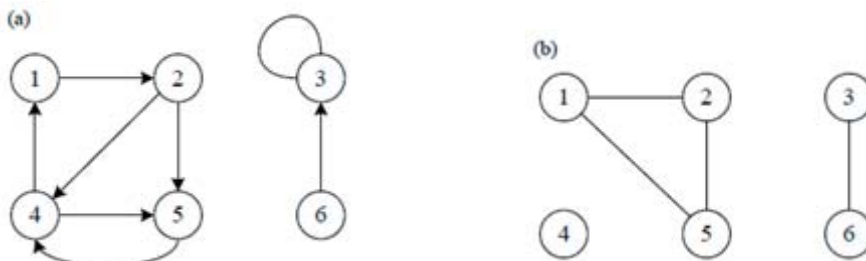
Definicja 1. *Grafem nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle \mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{R} \rangle$, gdzie \mathbb{V} jest zbiorem wierzchołków grafu, \mathbb{E} jest zbiorem gałęzi grafu, \mathbb{P} jest relacją trójczłonową incydencji $\mathbb{P} \subset \mathbb{V} \times \mathbb{E} \times \mathbb{V}$ o własności*

$$\forall_{u \in U} \exists_{x, y \in X} \langle x, u, y \rangle \in \mathbb{P} \wedge u = \langle x, y \rangle \quad (1)$$

Zbiór \mathbb{V} nazywamy zbiorem wierzchołków, a jego elementy nazywamy wierzchołkami. Zbiór \mathbb{E} nazywamy zbiorem gałęzi, a jego elementy nazywamy gałęziami.

Obrazem geometrycznym grafu abstrakcyjnego na płaszczyźnie nazywa się grafem geometrycznym. Należy zauważyć zatem, że dla tego samego grafu abstrakcyjnego można wyrysować wiele grafów geometrycznych, które są izomorficzne z nim.

Jeżeli liczebność zbioru wierzchołków W jest skończona $|W| = n < \infty$, to graf G nazywamy grafem skończonym. W przypadku gdy $n = \infty$, graf nazywamy grafem nieskończonym. Należy zauważyć, że każdy graf skończony posiada odwzorowanie geometryczne w postaci zbioru punktów – czyli wierzchołków oraz łączących ich gałęzi. Przykładowy graf skończony pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Graf (a) skierowany, (b) nieskierowany

Gałęzie grafu (rys. 1) dzielimy na:

1. **Gałęzie nieskierowane zwane krawędziami.** Gałąź u stanowi krawędź, gdy zachodzi $\langle x, u, y \rangle \in \mathbb{P} \rightarrow \langle y, u, x \rangle \in \mathbb{P}$. Przykładowo na rys. 1(b) mamy następujące krawędzie: (1, 2), (1, 5), (2, 5) oraz (3, 6).
2. **Gałęzie skierowane zwane łukami.** Gałąź jest łukiem, gdy $\langle x, u, y \rangle \in \mathbb{P} \rightarrow \langle y, u, x \rangle \notin \mathbb{P}$. Przykładowo na rys. 1(a) mamy następujące łuki: (1, 2), (2, 4), (4, 1).
3. **Pętle.** Gałąź jest pętlą gdy $\langle x, u, x \rangle \in \mathbb{P}$. Przykładowo na rys. 1(a) mamy następującą pętlę: (2, 2).

Definicja 2. *Graf G nazywamy grafem skierowanym i oznaczamy go przez G^{\rightarrow} , gdy zbiór gałęzi ma co najmniej jedną gałąź skierowaną.*

Definicja 3. *Digrafem D nazywamy graf, w którym każda krawędź jest zorientowana i są to gałęzie typu łuki lub pętle.*

W grafie nieskierowanym $G = \langle V, E, P \rangle$ zbiór krawędzi to zbiór nieuporządkowanych par wierzchołków. Oznacza to, że krawędź jest zbiorem $\{u, v\}$, gdzie $u, v \in V$ i $u \neq v$. Do oznaczania krawędzi będziemy używać notacji (u, v) . Zapis (u, v) i (v, u) oznaczają tę samą krawędź.

W grafie nieskierowanym nie mogą występować pętle zatem, każda krawędź zawiera dokładnie dwa różne wierzchołki. Na rys. 1(b) jest pokazany graf nieskierowany o zbiorze wierzchołków $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i zbiorze krawędzi $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$.

W grafie skierowanym oddziaływań jeżeli (u, v) jest łukiem digrafu $D = \langle V, E, P \rangle$, to mówimy, że łuk (u, v) jest wychodzący z wierzchołka u i jest wchodzący do wierzchołka v . Na rys. 1(a) jest pokazany graf skierowany oddziaływań o zbiorze wierzchołków $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i zbiorze krawędzi $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 5), (6, 3)\}$. Na przykład łuki wychodzące z wierzchołka 2 to $(2, 2)$, $(2, 4)$ i $(2, 5)$ a łuki wchodzące do wierzchołka 2 to: $(1, 2)$ i $(2, 2)$.

Jeżeli (u, v) jest łukiem grafu skierowanego oddziaływań D , to mówimy, że wierzchołek v jest sąsiedni względem wierzchołka u . W przypadku grafu nieskierowanego G relacja sąsiedztwa jest symetryczna. Przykładowo na rys. 1 (a) i (b) wierzchołek 2 jest sąsiedni względem wierzchołka 1, ponieważ krawędź $(1, 2)$ należy do obu grafów. Natomiast wierzchołek 1 nie jest sąsiedni względem wierzchołka 2 na rys. 1 (a) ponieważ krawędź $(2, 1)$ nie należy do grafu.

Stopniem wierzchołka w grafie nieskierowanym G jest liczba incydenentnych z nim krawędzi. Na przykład wierzchołek 2 na rys. 1 (b) ma stopień 2. Wierzchołek, którego stopień wynosi zero, taki jak wierzchołek 4 na rys. 1 (b), jest nazywany wierzchołkiem izolowanym. W grafie skierowanym oddziaływań D stopień wyjściowy wierzchołka jest liczbą łuków lub pętli z niego wychodzących, a stopień wejściowy wierzchołka jest liczbą łuków lub pętli do niego wchodzących. Stopniem wierzchołka w grafie skierowanym oddziaływań jest liczba będąca sumą jego stopnia wejściowego i wyjściowego. Przykładowo wierzchołek 2 na rys. 1 (a) ma stopień wejściowy 2, stopień wyjściowy 3 i stopień 5.

2.2. Sposoby reprezentacji grafu

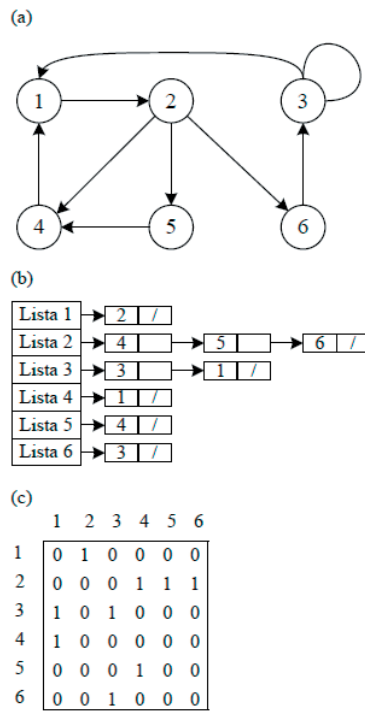
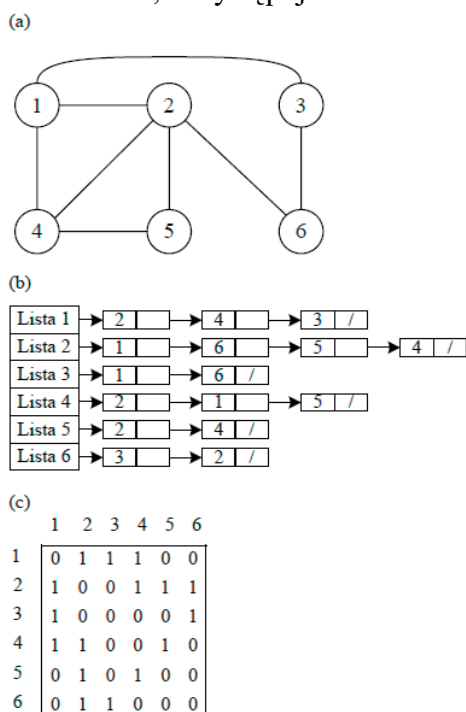
Istnieją dwa standardowe sposoby reprezentacji grafu G : za pomocą list sąsiedztwa oraz za pomocą macierzy sąsiedztwa.

Zazwyczaj preferowaną reprezentacją jest postać listy sąsiedztwa ponieważ umożliwia ona przedstawienie w zwarty sposób grafów rzadkich czyli takich dla których $|E|$ jest dużo mniejsze od $|V|^2$. W przypadku, gdy graf jest gęsty czyli taki graf dla którego $|E|$ jest bliskie $|V|^2$ lub gdy istnieje potrzeba szybkiego sprawdzenia czy istnieje gałąź łącząca dwa dane wierzchołki, wtedy korzystniejsza jest reprezentacja za pomocą macierzy sąsiedztwa.

W reprezentacji grafu G za pomocą list sąsiedztwa dana jest tablica Tab zawierająca $|V|$ list, po jednej dla każdego wierzchołka. Dla każdego $u \in V$ elementami listy sąsiedztwa $Tab[u]$ są wszystkie wierzchołki v takie, że krawędzie $(u, v) \in E$. Porządek wierzchołków na liście sąsiedztwa jest dowolny. Na rys. 2(b) pokazano listę sąsiedztwa dla grafu G z rys. 2 (a). Na rys. 3 (b) pokazano listę sąsiedztwa dla grafu skierowanego oddziaływań D z rys. 3 (a).

Jeżeli rozpatrujemy graf skierowany oddziaływań (digraf) D , to suma długości wszystkich list sąsiedztwa wynosi $|E|$, ponieważ łuk lub pętla postaci (u, v) jest reprezentowany przez wystąpienie v na liście $Tab[u]$. Jeżeli G jest grafem nieskierowanym, to suma długości wszystkich

list sąsiedztwa wynosi $2|E|$, ponieważ dla krawędzi (u, v) wierzchołek u wystąpi na liście sąsiedztwa v i odwrotnie, v występuje na liście u .



Rys. 2. Dwie reprezentacje grafu nieskierowanego (a) Graf nieskierowany, (b) lista sąsiedztwa grafu nieskierowanego, (c) macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego

Rys. 3. Dwie reprezentacje grafu skierowanego (a) Graf skierowany, (b) lista sąsiedztwa grafu skierowanego, (c) macierz sąsiedztwa grafu skierowanego

W reprezentacji grafu nieskierowanego G oraz grafu skierowanego oddziaływań D za pomocą macierzy sąsiedztwa zakładamy, że wierzchołki są ponumerowane $1, 2, \dots, |V|$ w pewien dowolny sposób. Reprezentacja macierzowa składa się wtedy z macierzy: $A = (a_{ij})$ wymiaru $|V| \times |V|$ takiej, że $a_{ij} = 1$ jeżeli $(i, j) \in E$ oraz $a_{ij} = 0$ w przeciwnym razie.

Na rys. 2 (c) pokazano macierz sąsiedztwa dla grafu G z rys. 2 (a). Na rys. 3 (c) pokazano macierz sąsiedztwa dla grafu skierowanego oddziaływań D z rys. 3 (a).

2.3. Podstawowe własności digrafów

Definicja 4. Sumą prostą dwóch grafów $G_1 = \langle V_1, E_1, P_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2, P_2 \rangle$ nazywamy graf $G = \langle V, E, P \rangle$ gdzie $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$, $P = P_1 \cup P_2$ i oznaczamy $G = G_1 \oplus G_2$.

Definicja 6. Iloczynem dwóch grafów $G_1 = \langle V_1, E_1, P_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2, P_2 \rangle$ nazywamy graf $G = \langle V, E, P \rangle$ gdzie $V = V_1 \cap V_2$, $E = E_1 \cap E_2$, $P = P_1 \cap P_2$ i oznaczamy $G = G_1 \cap G_2$.

Definicja 7. Różnicą symetryczną dwóch grafów $G_1 = \langle V_1, E_1, P_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2, P_2 \rangle$ nazywamy graf $G = \langle V, E, P \rangle$ gdzie $V = V_1 \setminus V_2$, $E = E_1 \setminus E_2$, $P = P_1 \setminus P_2$ i oznaczamy $G = G_1 \setminus G_2$.

W dualny sposób możemy zdefiniować sumę prostą, iloczyn oraz różnicę symetryczną dwóch grafów skierowanych oddziaływań.

3. WIELOWYMIAROWE GRAFY SKIEROWANE ODDZIAŁYWAŃ

3.1. Definicja

W istniejącej literaturze można spotkać różne definicje grafu. Klasyczna definicja grafu (Definicja 1) została podana w podrozdziale 2.1. Obserwowane dynamiczne zmiany sposobu definiowania grafu wynikają z potrzeby obejmowania teorią grafów coraz szerszej klasy struktur. W naszych rozważaniach taką strukturą są dodatnie układy wielowymiarowe bez opóźnień i z opóźnieniami. Modele tych układów zostały podane w pozycjach [4], [5], [10], [11], [12], [13] i [14].

Żeby zrozumieć wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań na początku należy wprowadzić pojęcie jednowymiarowego grafu skierowanego oddziaływań D dla struktury, jaką jest dodatni układ jednowymiarowy.

Definicja 7 Jednowymiarowym grafem skierowanym oddziaływań (digrafem) D nazywamy czwórkę (S, V, A, B) gdzie $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ jest źródłem (wejściem), $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest zbiorem wierzchołków, A jest podzbiorem $V \times V$, którego elementy nazywamy A -łukami oraz B jest podzbiorem $S \times V$, którego elementy nazywamy B -łukami.

Zgodnie z tym co zostało zaprezentowane w podrozdziale 2.1 jednowymiarowy graf skierowany oddziaływań możemy przedstawić w postaci listy sąsiedztwa oraz za pomocą macierzy sąsiedztwa.

Jednowymiarowy graf skierowany oddziaływań możemy wyznaczyć za pomocą jego macierzy sąsiedztwa korzystając z poniższej procedury. W naszych rozważaniach macierzą sąsiedztwa jest macierz stanu (A) układu opisanego równaniami (D1).

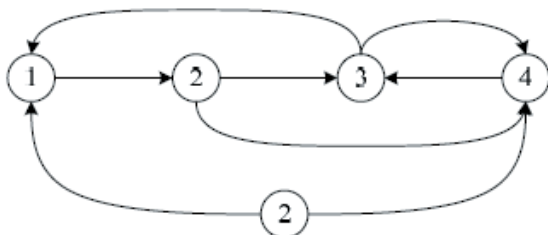
Procedura 1

Krok 1: Istnieje A -łuk z wierzchołka v_j do wierzchołka v_i wtedy i tylko wtedy, gdy (i, j) -ty element macierzy A jest niezerowy;

Krok 2: Istnieje B -łuk ze źródła s do wierzchołka v_j wtedy i tylko wtedy, gdy i -ty element macierzy B jest niezerowy.

W przypadku, gdy mamy parę macierzy (A_1, B_1) łuki powstałe od macierzy te rysujemy jednym kolorem i jednym stylem linii.

Przykładowo dla macierzy stanu (sąsiedztwa) (2) układu 1D opisanego równaniami (D1) mamy następujący jednowymiarowy graf skierowany oddziaływań (rys. 4).



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Rys. 4. Jednowymiarowy graf skierowany oddziaływań G odpowiadający macierzy stanu (2)

Podobnie jak dla jednowymiarowego grafu skierowanego oddziaływań (G) możemy skonstruować definicję dla wielowymiarowego grafu skierowanego oddziaływań ($D^{(n)}$).

Definicja 8. Wielowymiarowym grafem skierowanym oddziaływań $D^{(n)}$ (krótko grafem oddziaływań) nazywamy $(\mathbb{S}, \mathbb{V}, A_1, A_2, \dots; B_1, B_2, \dots)$ gdzie $\mathbb{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ jest źródłem (wejściem), $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest zbiorem wierzchołków, A_1, A_2, \dots ; są podzbiorami $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$, których elementy nazywamy A_1 -lukami, A_2 -lukami, ...; oraz B_1, B_2, \dots ; są podzbiorami $\mathbb{S} \times \mathbb{V}$, których elementy nazywamy B_1 -lukami, B_2 -lukami, ...;

Wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań $D^{(n)}$ możemy wyznaczyć za pomocą jego macierzy sąsiedztwa. Należy zauważyć, iż w przypadku wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań mamy wiele macierzy stanu, które podobnie jak w przypadku jednowymiarowym są macierzami sąsiedztwa.

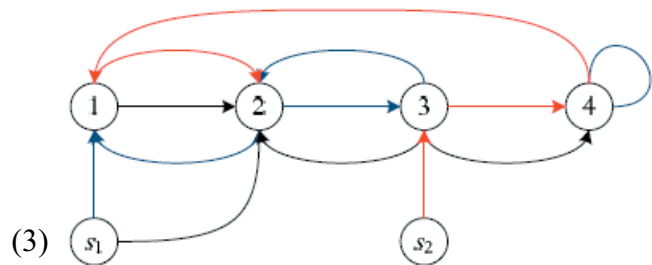
W przypadku, gdy mamy pary macierzy $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots$; łuki powstające od odpowiednich par macierzy rysujemy jednymi kolorem i innymi stylami linii.

Przykładowo dla macierzy stanu (3) układu dwuwymiarowego opisanego modelem ogólnym (D3) mamy następujący wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań (rys. 5).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Rys. 5. Wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań $D^{(n)}$ odpowiadający macierzy stanu (3).

Z definicji wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań (Definicja 8) wynika, iż grafy te są odpowiednio złożeniem wielu grafów jednowymiarowych. A zatem definicje słuszne dla grafów jednowymiarowych przenoszą się również na grafy wielowymiarowe.

Z powyższych rozważań wynikają następujące wnioski:

- Jednowymiarowe grafy skierowane oddziaływań (G) stosujemy do analizy dodatnich układów jednowymiarowych opisanych równaniami (D1).
- Dwuwymiarowe grafy skierowane oddziaływań ($D^{(2)}$) stosujemy do analizy dodatnich układów jednowymiarowych z jednym opóźnieniem ($p = 1, q = 1$) opisanych równaniem (D2) oraz do analizy układów dwuwymiarowych opisanych pierwszym i drugim modelem Fornasiniiego-Marchesiniiego (przypadki szczególne układu 2D opisanego modelem ogólnym D3).
- Wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań ($D^{(n)}$) stosujemy do analizy układów 1D z wieloma opóźnieniami opisanych równaniem (D2), oraz układów D2 opisanych modelem ogólnym bez opóźnień (D3) i z opóźnieniami (D4).

3.2. Podstawowe własności wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań

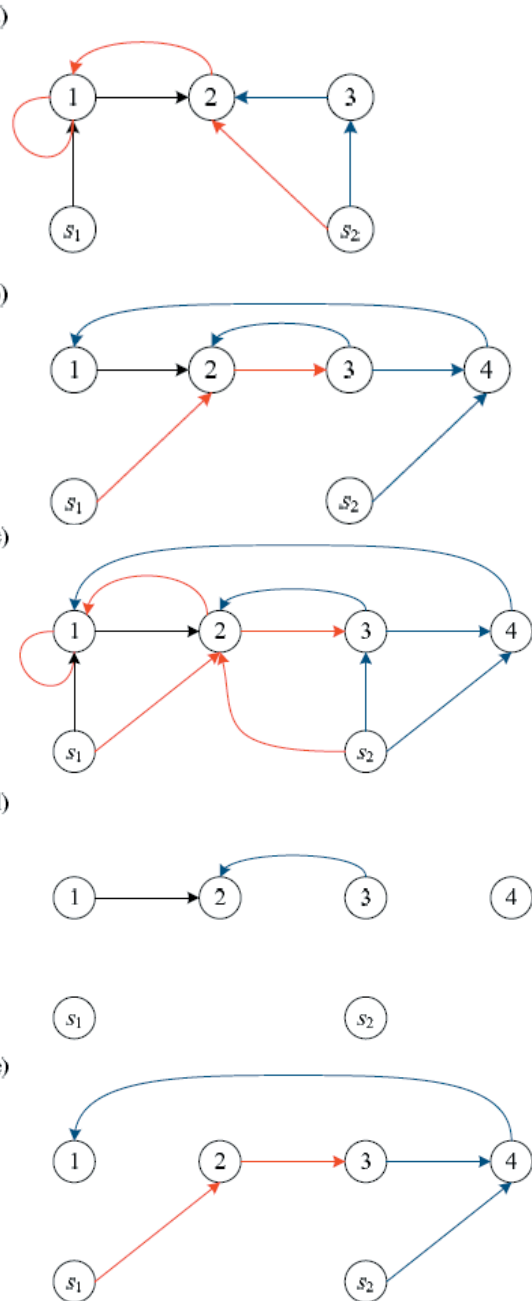
Do podstawowych własności grafów nieskierowanych należą: suma prosta (Definicja 4), iloczyn (Definicja 5) oraz różnica symetryczna (Definicja 6). Własności te zostały przedstawione w części 2.3.

Jako, że wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań są odpowiednim złożeniem grafów jednowymiarowych zatem definicje sumy prostej, iloczynu oraz różnicy symetrycznej są dualne i przyjmują następującą postać.

Definicja 9. Sumą prostą dwóch wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań $D^{(n)}_1 = (\mathbb{S}^1; \mathbb{V}^1; A_1^1; A_2^1, \dots; B_1^1; B_2^1, \dots;)$ oraz $D^{(n)}_2 = (\mathbb{S}^2; \mathbb{V}^2; A_1^2; A_2^2, \dots; B_1^2; B_2^2, \dots;)$ nazywamy wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań $D^{(n)} = (\mathbb{S}; \mathbb{V}; A_1; A_2, \dots; B_1; B_2, \dots;)$, gdzie $\mathbb{S} = \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^2$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}^1 \cup \mathbb{V}^2$, $A_1 = A_1^1 \cup A_1^2$, $A_2 = A_1^1 \cup A_2^2$, $B_1 = B_1^1 \cup B_1^2$, $B_2 = B_1^1 \cup B_2^2$ i oznaczamy $D^{(n)} = D^{(n)}_1 \oplus D^{(n)}_2$.

Definicja 10. Iloczynem dwóch wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań $D^{(n)}_1 = (\mathbb{S}^1; \mathbb{V}^1; A_1^1; A_2^1, \dots; B_1^1; B_2^1, \dots;)$ oraz $D^{(n)}_2 = (\mathbb{S}^2; \mathbb{V}^2; A_1^2; A_2^2, \dots; B_1^2; B_2^2, \dots;)$ nazywamy wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań $D^{(n)} = (\mathbb{S}; \mathbb{V}; A_1; A_2, \dots; B_1; B_2, \dots;)$, gdzie $\mathbb{S} = \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}^1 \cap \mathbb{V}^2$, $A_1 = A_1^1 \cap A_1^2$, $A_2 = A_1^1 \cap A_2^2$, $B_1 = B_1^1 \cap B_1^2$, $B_2 = B_1^1 \cap B_2^2$ i oznaczamy $D^{(n)} = D^{(n)}_1 \cap D^{(n)}_2$.

Definicja 11. Różnicą symetryczną dwóch wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań $D^{(n)}_1 = (\mathbb{S}^1; \mathbb{V}^1; A_1^1; A_2^1, \dots; B_1^1; B_2^1, \dots;)$ oraz $D^{(n)}_2 = (\mathbb{S}^2; \mathbb{V}^2; A_1^2; A_2^2, \dots; B_1^2; B_2^2, \dots;)$ nazywamy wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań $D^{(n)} = (\mathbb{S}; \mathbb{V}; A_1; A_2, \dots; B_1; B_2, \dots;)$, gdzie $\mathbb{S} = \mathbb{S}^1 \setminus \mathbb{S}^2$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}^1 \setminus \mathbb{V}^2$, $A_1 = A_1^1 \setminus A_1^2$, $A_2 = A_1^1 \setminus A_2^2$, $B_1 = B_1^1 \setminus B_1^2$, $B_2 = B_1^1 \setminus B_2^2$ i oznaczamy $D^{(n)} = D^{(n)}_1 \setminus D^{(n)}_2$.



Rys. 6. (a), (b) przykładowe grafy skierowane oddziaływań, (c) suma, (d) iloczyn, (e) różnica symetryczna

Sposób konstruowania sumy prostej, iloczynu oraz różnicy symetrycznej jest analogiczny jak dla grafów klasycznych z tą różnicą, że w grafach skierowanych należy zwracać uwagę na kierunek łuku oraz na fakt istnienia łuku odpowiedniego koloru.

Z powyższych rozważań wynika, iż każdy graf można w dowolny sposób zdekomponować na wiele podgrafów bez utraty informacji na temat struktury takiego grafu. Uwaga ta tyczy się zarówno jednowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań jak również wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań.

3.3. Topologia grafów skierowanych oddziaływań

Definicja 13. *Trasą w danym wielowymiarowym grafie skierowanym oddziaływań $D^{(n)}$ nazywamy skończony ciąg luków, w którym każde dwa kolejne wierzchołki v_i , $i = 1, 2, \dots$, są albo sąsiednie albo identyczne co zapisujemy $(v_i, v_{i+1}) \in K$, gdzie v_i jest początkiem luku, v_{i+1} jest końcem luku a K jest $(A_1, A_2, \dots; B_1, B_2, \dots)$ -lukiem.*

Definicja 14. *Trasa, w której wszystkie luki są różne nazywamy ścieżką*

Ścieżka długości k z wierzchołka u do wierzchołka u' w wielowymiarowym grafie skierowanym oddziaływań jest ciągiem wierzchołków $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ takich, że $u = v_1$, $u' = v_k$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Długość ścieżki jest liczbą jej krawędzi. Jeżeli istnieje ścieżka p z wierzchołka u do wierzchołka u' to mówimy że wierzchołek u' jest osiągalny z wierzchołka u po ścieżce p co zapisujemy $u \rightarrow u'$.

Definicja 15. *Trasa, nazywamy drogą lub ścieżką prostą, jeżeli wszystkie wierzchołki są różne.*

Definicja 16. *Drogę $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ nazywamy cyklem, jeżeli początkowy i końcowy wierzchołek w drodze jest taki sam $v_1 = v_k$ i droga zawiera co najmniej jedną krawędź.*

Definicja 17. *Cykl nazywamy prostym, jeżeli wierzchołki $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ są różne.*

4. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano podstawy klasycznej teorii grafów. Wprowadzono podstawowe definicje oraz omówiono podstawowe własności. Następnie zaprezentowano podstawy jednowymiarowych grafów skierowanych oraz zaproponowano uogólnienie tych grafów na wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań. Następnie pokazano sposób powiązanie wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań z układami jedno- i dwuwymiarowymi.

Wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań mogą być wykorzystywane w analizie zarówno dodatnich układów jednowymiarowych jak również do analizy dodatnich układów wielowymiarowych. Stanowią one alternatywne narzędzie do obliczeń analitycznych przy tak trudnych problemach jak:

- Problem wyznaczanie indeksów osiągalności oraz obszaru indeksów osiągalności,
- Problem wyznaczania realizacji dodatniej układów jedno- i wielowymiarowych bez opóźnień jak i z opóźnieniami
- Problem wyznaczania realizacji minimalnej dodatnich układów jedno- i wielowymiarowych bez opóźnień jak i z opóźnieniami

Aby pokazać metodologię rozwiązywania wyżej wymienionych problemów przedstawiono w pracy autorską koncepcję wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań.

Do najważniejszych osiągnięć związanych z autorską koncepcją wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań autor zalicza:

- Rozszerzenie teorii dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań oraz wprowadzenie wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań.
- Podanie koncepcji wyznaczania elementów macierzy stanu układów jednowymiarowych i dwuwymiarowych opisanych modelem ogólnym, pierwszym i drugim modelem Fornasini-Marchesini bez opóźnień i z opóźnieniami oraz układów trójwymiarowych bez opóźnień opartej na teorii jedno-, dwu- i wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań.

- Podanie koncepcji wyznaczania dodatniej realizacji opartej na teorii jedno-, dwu- i wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań.
- Podanie algorytmu wyznaczania dróg skończonych w wielowymiarowym grafie skierowanym oddziaływań.
- Podanie metody wyznaczania obszaru indeksów osiągalności dla układów dwu- wymiarowych bez opóźnień bazującą na teorii dwuwymiarowych grafów skierowanych oddziaływań

Dalsze prace nad problemem wyznaczania elementów macierzy stanu czy wreszcie problemem realizacji, zdaniem autora należałoby przede wszystkim prowadzić w kierunku układów słabododatnich jednowymiarowych i dwuwymiarowych. Zasadne wydaje się także skonstruowanie oprogramowania do analizy i syntezy wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań.

Problemem otwartym jest:

- Możliwość przeniesienia proponowanych metod na układy dwuwymiarowe opisane modelem Roessera
- Możliwość przeniesienia proponowanych metod na jednowymiarowe i dwuwymiarowe dyskretne układy ułamkowego rzędu,
- Możliwość przeniesienia proponowanych metod na dodatnie układy hybrydowe,
- Możliwość zastosowania wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań do wyznaczania sterowalności oraz dodatniej realizacji przy założeniu, że jest ona sterowalna a następnie przy założeniu że jest ona sterowalna i obserwowalna.

LITERATURA

1. Bang- Jensen J. and Gut in, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, London 2001.
2. Chartrand G., Lesniak L. *Graphs & Digraphs*. Chapman & Hall/CRC.
3. Cormen Thomas H. [et al.] *Wprowadzenie do algorytmów* WNTechniczne, Warszawa 2007.
4. Farina L. and Rinaldi S., *Positive linear systems: theory and applications*. Wiley, New York, 2000.
5. Fornasini E. and Marchesini G, *Double indexed dynamical systems*. Math. Sys. Theory, 12:59-72, 1978.
6. Fornasini E. and Valcher M.E., *Directed Graphs, 2D State Models, and Characteristic Polynomials of Irreducible Matrix Pairs*. Linear Algebra and Its Applications, 263:275-310 (1997).
7. Fornasini E. and Valcher M.E., *On the positive reachability of 2D positive systems*. Positive Systems, LCNIS (2003), 297-304.
8. Fornasini E. and Valcher M.E., *Controllability and reachability of 2D positive systems: a graph theoretic approach*. IEEE Transaction on Circuits and Systems I.
9. Foulds L. R. *Graph theory applications*. Springer-Verlag, New York 1992.
10. Kaczorek T., *Positive Systems*. Springer-Verlag London 1980.
11. Kaczorek T., *Positive 1D and 2D Systems*. Springer-Verlag London 2002.
12. Kaczorek T. and Busłowicz M., *Recent developments in theory of positive discrete-time linear systems with delays - reachability, minimum energy control and realization problem*. Pomiary, Automatyka, Kontrola, Nr 10, 2004, pp. 12-15.
13. Kaczorek T. *Positive 2D systems with delays*. 11th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (CD), Międzyzdroje 2005.
14. Kaczorek T. *Wybrane zagadnienia dodatnich układów z opóźnieniami*. Konferencja Naukowo-Techniczna Automatykacja Nowości i Perspektywy. Automation 2006, Warszawa, pp. 10-33.
15. Korzan B. *Elementy teorii grafów i sieci: metody i zastosowania*. WNT, Warszawa 1978.

16. Markowski K. *Wyznaczanie macierzy stanu dodatniego układu 2D na podstawie wielomianu charakterystycznego*. Przegląd Elektrotechniczny Luty 2007.
17. Markowski K. *Wyznaczanie elementów macierzy stanu na podstawie wielomianu charakterystycznego*. Automation 2006
18. Markowski K. *Algorithm for Determination Entries of the State Matrices of the Positive Second Fornasini-Marchesini Model*. MMAR 2006
19. Markowski K. *Wyznaczanie obszaru osiągalności dodatnich układów dwuwymiarowych opisanych modelem ogólnym zawierających wiele wejść*. XXVIII IC-SPETO, 11-14. V. 2005, Ustroń.
20. Markowski K., Kaczorek T. *New method of determination reachability index set of 2D systems*. XIII International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET 2005, Lwów
21. Markowski K. *Obszar indeksów osiągalności dodatnich układów 2D*. Międzynarodowe Warsztaty Doktoranckie OWD, 22-25. X. 2005, Wiśła
22. Nowak A. *Grafy - teoria i zadania*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2006.
23. Ross Kenneth A., Wright Charles R. B. *Matematyka dyskretna*. PWN, Warszawa 2006

DODATEK

Układ 1D. Układ jednowymiarowy bez opóźnień dany jest równaniem

$$x_{i+1} = \mathbf{A}x_i + \mathbf{B}u_i; \quad y_i = \mathbf{C}x_i + \mathbf{D}u_i \quad (\text{D1})$$

przy czym $x_i \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu w chwili dyskretnej $i \in \mathbb{Z}_+$, $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wymuszeń, $y_i \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Układ 1D z opóźnieniami. Układ jednowymiarowy z q opóźnieniami w wektorze stanu oraz p opóźnieniami w wektorze wymuszenia dany jest równaniami

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \mathbf{A}_0 x_i + \mathbf{A}_1 x_{i-1} + \dots + \mathbf{A}_q x_{i-q} + \mathbf{B}_0 u_i + \mathbf{B}_1 u_{i-1} + \dots + \mathbf{B}_p u_{i-p} + \mathbf{B} u_i; \\ y_i &= \mathbf{C}x_i + \mathbf{D}u_i \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

Układ 2D. Układ dwuwymiarowy opisany modelem ogólnym dany jest równaniami

$$\begin{aligned} x_{i+1,j+1} &= \mathbf{A}_0 x_{ij} + \mathbf{A}_1 x_{i+1,j} + \mathbf{A}_2 x_{i,j+1} + \mathbf{B}_0 u_{ij} + \mathbf{B}_1 u_{i+1,j} + \mathbf{B}_2 u_{i,j+1}; \\ y_{ij} &= \mathbf{C}x_{ij} + \mathbf{D}u_{ij} \end{aligned} \quad (\text{D3})$$

przy czym $x_{ij} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu w punkcie (i,j) , $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ i $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ są odpowiednio wektorem wymuszeń (sterowań) i wektorem odpowiedzi, a $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $k = 0, 1, 2$; $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Istnieją dwa przypadki szczególne modelu ogólnego. Podstawiając:

- $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0$ oraz $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$ do równania (D3) otrzymujemy pierwszy model Fornasiniiego-Marchesiniiego;
- $\mathbf{A}_0 = 0$ oraz $\mathbf{B}_0 = 0$ do równania (D3) otrzymujemy drugi model Fornasiniiego-Marchesiniiego.

Układ 2D z opóźnieniami. Układ dwuwymiarowy z opóźnieniami opisany modelem ogólnym dany jest równaniami

$$x_{i+1,j+1} = \sum_{k_1=0}^{q_1} \sum_{l_1=0}^{q_2} (\mathbf{A}_{k_1 l_1}^0 x_{i-k_1, j-l_1} + \mathbf{A}_{k_1 l_1}^1 x_{i-k_1+1, j-l_1} + \mathbf{A}_{k_1 l_1}^2 x_{i-k_1, j-l_1+1}) + \sum_{k_2=0}^{p_1} \sum_{l_2=0}^{p_2} (\mathbf{B}_{k_2 l_2}^0 u_{i-k_2, j-l_2} + \mathbf{B}_{k_2 l_2}^1 u_{i-k_2+1, j-l_2} + \mathbf{B}_{k_2 l_2}^2 u_{i-k_2, j-l_2+1}); \quad (\text{D4})$$

$$y_{ij} = \mathbf{C}x_{ij} + \mathbf{D}u_{ij}$$

gdzie $x_{ij} \in \mathbb{R}^n$, $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$, $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi $\mathbf{A}_{k_1 l_1}^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_{k_2 l_2}^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $t = 0, 1, 2$; $k_1 = 0, 1, \dots, q_1$; $l_1 = 0, 1, \dots, q_2$; $k_2 = 0, 1, \dots, p_1$; $l_2 = 0, 1, \dots, p_2$; $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Istnieją dwa przypadki szczególne modelu ogólnego z opóźnieniami. Podstawiając:

- $\mathbf{B}_{k_2 l_2}^1 = \mathbf{B}_{k_2 l_2}^2 = 0$ oraz $\mathbf{B}_{k_2 l_2}^0 = \mathbf{B}$ do równania (D4) otrzymujemy pierwszy model Fornasiniiego-Marchesiniiego;
- $\mathbf{A}_{k_1 l_1}^0 = 0$ oraz $\mathbf{B}_{k_2 l_2}^0 = 0$ do równania (D4) otrzymujemy drugi model Fornasiniiego-Marchesiniiego.