

# Estymacja niepewności rozszerzonej punktów charakterystyki z dwóch pomiarów kontrolnych

Zygmunt Lech Warszawa

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-001 Warszawa

**Streszczenie:** Omówiono zasady szacowania niepewności punktów funkcji opisującej charakterystykę na podstawie wyników pomiarów w dwu punktach kontrolnych. Niepewności typu B o rozkładzie równomiernym szacuje się na podstawie wartości dopuszczalnych maksymalnych błędów przyrządu przyjmując współczynnik korelacji równy 1 dla pomiarów tym samym przyrządem oraz 0 dla różnych przyrządów. Niepewności typu A pomiarów w punktach kontrolnych szacuje się metodą statystyczną. Przy pomiarach tych przeprowadzonych synchronicznie estymuje się też współczynnik korelacji. Następnie metodą Monte Carlo estymuje się niepewności składowe, złożone i rozszerzone oraz korelację punktów funkcji opisującej badaną charakterystykę.

**Słowa kluczowe:** interpolacja, niepewność typu A i B, współczynnik korelacji, metoda Monte Carlo

## 1. Wprowadzenie

W pomiarach laboratoryjnych i przemysłowych, w badaniu systemów pomiarowych, ich członów i elementów oraz w kontroli aparatury, procesów produkcji i wyrobów rozróżniamy dwa rodzaje zagadnień:

- wyznaczanie przebiegów funkcji opisujących badaną charakterystykę i dokładności jej modelu wg określonego kryterium, np. najmniejszych kwadratów, dla zbioru wyników obserwacji pomiarowych rozmieszczonych dowolnie, lub w sposób określony, np. równomiernie w badanym zakresie  $x_{max} - x_0$ ;
- ustalenie, w których punktach i z jaką dokładnością należy kontrolować badaną charakterystykę, by stwierdzić czy nie przekroczono wymaganej niepewności bezwzględnej lub względnej.

Dotyczy to m.in. kalibracji przyrządów, czujników, przetworników i innych członów systemów pomiarowych, analizy właściwości substancji pod wpływem zmian jej składu, kontroli wytwarzania elementów i podzespołów, monitorowania i diagnostyki urządzeń oraz statystycznej kontroli jakości i sterowania ciągłymi i dyskretnymi procesami produkcji masowej. W badaniach użytkowych istnieje wiele ograniczeń dotyczących gęstości punktów pomiarowych, czasu podejmowania i trwania

eksperymentu, dostępności obiektu badań, próbek i zautomatyzowanej aparatury oraz kosztów wykonania pomiarów. Niezbędne staje się zminimalizowanie liczby pomiarów w punktach kontrolnych oraz wybór odpowiedniego ich rozmieszczenia, czasu i wielkości pozyskiwanych zbiorów danych. Zależy to od rodzaju badań i zakresu wartości badanych wielkości oraz od możliwości uzyskania wymaganej w tych badaniach niepewności pomiarów i od dokładności użytej aparatury pomiarowej. Występuje też wymaganie dotyczące rozmieszczenia punktów kontrolnych zależne z innych przyczyn niż dokładność pomiarów, np. ograniczenie objętości, wymiarów, przepływów, mocy i energii, zużycie użytych substancji itp.

## 2. Zasady estymacji niepewności punktów charakterystyki

W pomiarach występują błędy o przebiegu zdeterminowanym, zwane błędami systematycznymi i błędy przypadkowe. Błędy systematyczne o znanym przebiegu i wartościach eliminuje się za pomocą poprawek. Pozostałe, tj. nieznanne błędy systematyczne i błędy przypadkowe podlegają ocenie dokładności wyników pomiaru, w której stosuje się obecnie zalecenia zawarte w międzynarodowym przewodniku GUM [1]. Podstawą tej oceny jest estymacja niepewności standardowej  $u$ , zwanej złożoną, jako sumy geometrycznej dwu niepewności składowych

$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ . Składnik  $u_A$ , czyli niepewność typu A, wyznacza

się w znany sposób z rozrzutu wartości określonej liczby powtarzanych pomiarów wielkości mierzonej.

Składnik  $u_B$ , czyli niepewność typu B, ujmuje zrandomizowany łączny wpływ przewidywanych oddziaływań na obiekt badany, system pomiarowy i na wskazania przyrządów

**Autor korespondujący:**

Zygmunt Lech Warszawa, zlw1936@gmail.com

**Artykuł recenzowany**

nadesłany 04.02.2020 r., przyjęty do druku 10.03.2020 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

w określonych dopuszczalnych warunkach i w znamionowym okresie eksploatacji, nieznanymi co do wartości w danym eksperymencie [1, 2]. Oszacowanie to opiera się na wiedzy o przewidywanych zakresach i rozkładach prawdopodobieństwa tych oddziaływań. Szacuje się też heurystycznie cząstkowe ich udziały w niepewności  $u_B$  i łączną estymatę jej wartości wg określonego kryterium.

Autorzy w kilku publikacjach [3–6] omówili szczegółowo proponowaną metodę estymacji niepewności punktów charakterystyki przetwornika pomiarowego lub badanego urządzenia na podstawie pomiarów kontrolnych w dwu lub więcej określonych, np. krańcowych punktach zakresu badanej charakterystyki. Taką kontrolę przetwornika można przeprowadzić *in situ* podczas pracy w rzeczywistych warunkach użytkownika. Omówiono dwie metody estymacji wartości i niepewności dla dwu punktów funkcji opisującej tę charakterystykę. Metoda I – deterministyczna – służy do wyznaczania niepewności  $u_{B1}$ ,  $u_{B2}$  z wartości dopuszczalnego błędu maksymalnego podanego przez producenta lub otrzymanego w wyniku wiarygodnej kalibracji. Metodą II – statystyczną – z rozrzutu wartości  $x_1$ ,  $x_2$  powtarzanych pomiarów w obu punktach kontrolnych szacuje się niepewności składowe  $u_{A1}$ ,  $u_{A2}$ . Z nich, dla dowolnych wartości  $x_{ci}$  badanej charakterystyki, których nie mierzy się bezpośrednio, znajduje się oszacowania odchyłeń standardowych  $u_{nc}$  niepewności bezwzględnych i względnych  $\delta_i \equiv (u_{xi} - u_{x0})/x_i$ . Są one funkcją względnego położenia  $k_i$  punktu  $x_{ci}$  w przedziale między punktami kontrolnymi. Można też wyznaczyć zakres zmiennej  $x$  o zadanych granicznych wartościach niepewności oraz niepewności punktów  $y_i$  wielkości zależnych od  $x$  wg funkcji opisującej charakterystykę  $y = f(x)$  przetwornika lub badanego urządzenia [3–6]. Rozważania uogólnia się przez normalizację niepewności  $u_{nc}$ , tj. odniesieniu ich do niepewności  $u_{x2}$  (rys. 1), do szerokości przedziału między punktami kontrolnymi  $x_2 - x_1$ , do zakresu pomiarowego  $x_{max} - x_0$  lub do wartości  $x_{max}$ .

Do wyznaczenia relacji między niepewnościami w punkcie estymowanym oraz jednym z punktów kontrolnych, lub między dwoma punktami estymowanymi, autorzy zastosowali macierzowe prawo propagacji wariancji w pomiarach pośrednich wieloparametrowych [3–6]. Macierze kowariancji  $U_X$  i  $U_Y$  wieloparametrowych menzurandów, tj. mierzonych bezpośrednio, czyli wejściowego  $X$  i wyznaczanego pośrednio menzurandu wyjściowego  $Y = F(X)$ , powiązane są wynikającym z prawa propagacji wariancji ogólnym równaniem macierzowym (1a) o postaci rozwiniętej (1b) dla macierzy składowych typów A i B:

$$U_Y = S U_X S^T \quad (1a)$$

$$U_Y = U_{YA} + U_{YB} = S U_{XA} S^T + S U_{XB} S^T \quad (1b)$$

gdzie:  $S = \frac{\partial F}{\partial X}$  – macierz czułości (jakobian) o elementach  $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$  tak samo wyznaczanych dla funkcji liniowych, jak i nieliniowych.

Jako przykład podano poniżej macierz kowariancji  $U_x$  menzurandu dwuelementowego (2D)  $X = [x_1, x_2]^T$  o współczynniku korelacji  $\rho_{x1,2}$  i jej macierze składowe typów A i B, tj.:  $U_{XA}$ ,  $U_{XB}$ .

$$U_X = \begin{bmatrix} u_{1X}^2 & \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} \\ \rho_{x1,2} u_{x1} u_{x2} & u_{2X}^2 \end{bmatrix} = U_{XA} + U_{XB} = \begin{bmatrix} u_{1A}^2 & \rho_A u_{1A} u_{2A} \\ \rho_A u_{1A} u_{2A} & u_{2A}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1B}^2 & \rho_B u_{1B} u_{2B} \\ \rho_B u_{1B} u_{2B} & u_{2B}^2 \end{bmatrix} \quad (1c)$$

Pozostałe macierze we wzorze (1a) dla pomiarów pośrednich menzurandu 2D  $Y = [y_1, y_2]^T$  i elementy diagonalne jego macierzy  $U_Y$  oraz współczynnik korelacji, są następujące:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad U_Y = \begin{bmatrix} u_{y1}^2 & \rho_{y1,2} u_{y1} u_{y2} \\ \rho_{y1,2} u_{y1} u_{y2} & u_{y2}^2 \end{bmatrix},$$

$$u_{y1}^2 = u_{y1A}^2 + u_{y1B}^2, \quad u_{y2}^2 = u_{y2A}^2 + u_{y2B}^2,$$

$$\rho_{y1,2} = \frac{\rho_A u_{y1A} u_{y2A} + \rho_B u_{y1B} u_{y2B}}{\sqrt{u_{y1A}^2 + u_{y1B}^2} \sqrt{u_{y2A}^2 + u_{y2B}^2}}$$

W praktyce należy korzystać ze wzoru (1b), tj. osobno szacować niepewności typu A i B. Wynika to z przyjętej w przewodniku GUM definicji niepewności  $u_A$  i  $u_B$ . Pierwszą z nich wyznacza się dla rzeczywistych odchyłeń losowych w krótkim czasie zbierania wyników pomiarów, a druga jest przyjmowana heurystycznie dla odchyłeń przewidywanych w okresie ważności kalibracji użytych przyrządów. Skorelowane mogą być tylko zbiory odchyłeń menzurandu o niepewnościach jednego typu.

Pomiary kontrolne wartości punktów  $x_1$ ,  $x_2$  charakterystyki, np. do celów monitoringu lub diagnostyki, powinno się wykonywać wielokrotnie i synchronicznie w podobnych warunkach, tymi samymi lub podobnymi przyrządami i na zakresach o jednakowej lub zbliżonej dokładności. Umożliwia to wyznaczenie współczynnika korelacji  $\rho_A(x_1, x_2)$  między zbiorami odchyłeń w obu punktach kontrolnych. Od wartości tego współczynnika zależy wartość niepewności typu A estymowanej w punktach  $x_{ci}$  i korelacja między wartościami  $x_{ci}$  dwu dowolnych punktów charakterystyki. Jeśli te warunki nie są spełnione, to dla bezpieczeństwa należy założyć, że ich niepewności nie są skorelowane i przyjmuje się współczynnik korelacji  $\rho_{1,2} = 0$ . Przy wyznaczaniu wartości niepewności  $u_B$  służącej do oceny niepewności złożonej  $u$  podczas dalszych badań obiektu z użyciem tego samego przyrządu, należy uwzględnić jego niepewność typu B oraz współczynnik korelacji 1. Metodą II – statystyczną – z rozrzutów wyników pomiarów wartości punktów kontrolnych szacuje się ich estymatory i odchylenia jako niepewności standardowe typu A o oznaczeniach  $u_{1A}$ ,  $u_{2A}$ . Jeśli dla niepewności składowych  $u_A$  i  $u_B$  przyjmie się jako przybliżenie rozkładu normalne, to wg przewodnika GUM niepewności złożone i rozszerzone wyznacza się metodą klasyczną. Dla próbek z innych rozkładów i rozkładu równomiernego błędu stosuje się metodą Monte Carlo wg Suplementu 1 do przewodnika GUM [1].

### 3. Estymacja niepewności złożonych punktów charakterystyki

#### 3.1. Niepewność interpolowana typu A

Niepewność typu A, wyznacza się z serii wielokrotnych pomiarów w danym punkcie pomiarowym. Zwykle przyjmuje się, że rozkład odchyłeń wielkości mierzonej ma rozkład gaussowski. Niepewność estymowana w punkcie znormalizowana względem końcowego punktu kontrolnego dla skorelowanych odchyłeń (błędów) od estymatorów wartości mierzonych w dwu punktach kontrolnych ma, wg [5], następującą postać

$$u_{nA}(k) = \frac{u_A(k)}{u_{A2}} = \sqrt{\varepsilon_A^2(1-k)^2 + k^2 + 2\rho_A\varepsilon_A(1-k)k} \quad (2)$$

gdzie:  $u_A(k)$ ,  $u_{nA}$  – niepewność typu A i jej wartość znormalizowana do  $u_{A2}$ ;  $u_{A1}$ ,  $u_{A2}$  – niepewności typu A w początkowym i końcowym punkcie kontrolnym;  $\varepsilon_A = u_{A1}/u_{A2}$ ;  $\rho_A$  – współczynnik korelacji między danymi pomiarowymi w punktach kontrolnych  $x_1$ ,  $x_2$ ;  $k$  – względna pozycja punktu  $x_c$  w przedziale między punktami kontrolnymi  $0 \leq k \leq 1$  o estymowanej niepewności  $u_A$ .

### 3.2. Niepewność interpolowana typu B

Niepewność typu B ma z założenia odmienny charakter statystyczny niż typu A. Wyznacza się ją heurystycznie na podstawie dopuszczalnego błędu maksymalnego użytych przyrządów i wiedzy uzyskanej o warunkach pomiarów i ich oddziaływań przewidywanych w długim okresie użytkowania przyrządu w danym eksperymencie pomiarowym, nie dłuższym jednak niż ważność jego kalibracji. Przyjmuje się zwykle, że rozkład statystyczny przewidywanych błędów opisanych niepewnością typu B ma rozkład prostokątny (jednostajny). Przykładowo dla typowego miernika uniwersalnego niepewność ta jest opisana liniową charakterystyką wyznaczoną przez dwa parametry: składnik addytywny i multiplikatywny. Jej znormalizowaną formułę można przedstawić w postaci:

$$u_{nB}(k) = \frac{u_B(k)}{u_{B2}} = \sqrt{[\varepsilon_B(1-k) + k]^2} = |(1-\varepsilon_B)k + \varepsilon_B| \quad (3)$$

gdzie:  $u_B(k)$  – interpolowana niepewność typu B,  $\varepsilon_B = u_{B1}/u_{B2}$ ,  $u_{B1}$ ,  $u_{B2}$  – niepewności typu B w punktach pomiarowych. Formułę (3) otrzymuje się z (2) przy założeniu pełnej korelacji, tj.  $\rho_B = 1$ . Przebiegi znormalizowanych niepewności standardowych typu A (metoda II) i typu B (Metoda I) podano na rys. 1.

### 3.3. Niepewność złożona

Do wyznaczenia całkowitej niepewności stosuje się ogólnie przyjętą zasadę splotu nieskorelowanych wielkości typu A i typu B. Dla punktu  $x_c$  otrzymuje się niepewność złożoną geometrycznie jako:

$$u_c^2(k) = u_A^2(k) + u_B^2(k) = u_{nA}^2(k)u_{A2}^2 + u_{nB}^2(k)u_{B2}^2 \quad (4)$$

Po oznaczeniu stosunku niepewności typu A i B w punkcie końcowym przez  $r = u_{A2}/u_{B2}$ , otrzymuje się wzór dla niepewności  $u_c$  znormalizowanej do jej wartości w punkcie końcowym:

$$u_n^2(k) = \frac{u_c^2(k)}{u_{A2}^2 + u_{B2}^2} = \frac{1}{1+r^2} \left\{ r^2 [\varepsilon_A^2(1-k)^2 + k^2 + 2\rho_A\varepsilon_A(1-k)k] + [(1-\varepsilon_B)k + \varepsilon_B]^2 \right\} \quad (5)$$

lub po uproszczeniu:

$$u_n^2(k) = \frac{k^2 [r^2(1+\varepsilon_A^2 - 2\rho_A\varepsilon_A) + (1-\varepsilon_B)^2] + 2k[r^2\varepsilon_A(\rho_A - \varepsilon_A) + \varepsilon_B(1-\varepsilon_B)] + r^2\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2}{1+r^2} \quad (6)$$

Wariancję jako kwadrat znormalizowanej niepewności w funkcji  $r$  opisuje parabola o ramionach skierowanych w górę, gdyż współczynnik przy składniku kwadratowym, niezależnie od współczynnika korelacji  $\rho_A$ , jest nieujemny. Współczynnik równa

się zero, gdy  $\varepsilon_B = 1$  oraz  $r = 0$  lub  $\rho_A = \frac{1+\varepsilon_A^2}{2\varepsilon_A}$ .

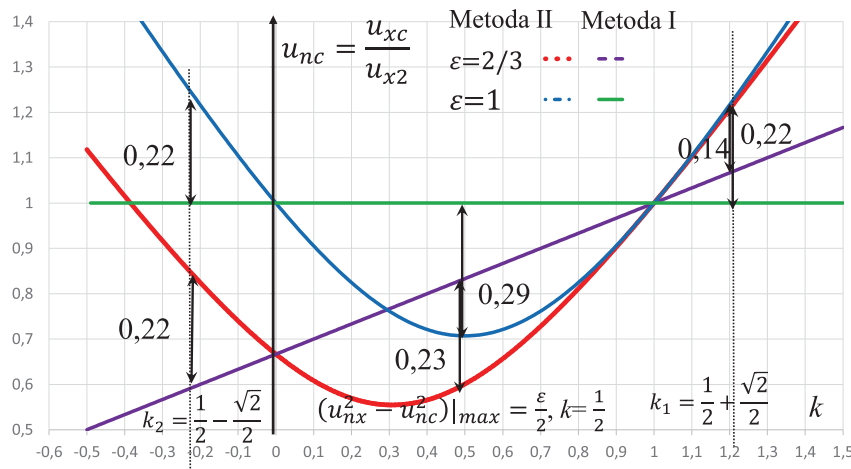
Na rysunkach 2a-f podano znormalizowane charakterystyki niepewności złożonej (5) dla różnych parametrów  $r$ ,  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  i  $\rho_A$ .

Są to wyrażenia  $\frac{u_{B2}}{u_{C2}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$  oraz  $\frac{u_{A2}}{u_{C2}} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$  stanowiące

udziały niepewności odpowiednio typu B i typu A w estymowanej niepewności złożonej.

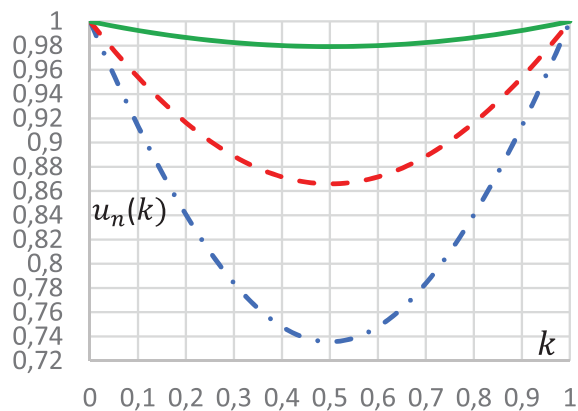
Dla krzywych na rysunkach 2a-f przyjęto parametry  $r$  odpowiadające udziałom niepewności typu A i B w niepewności całkowitej, tj.: linia zielona —  $r = 3,33$ ,  $u_{A2}/u_{C2} = 96\%$ ,  $u_{B2}/u_{C2} = 29\%$ ; linia czerwona  $\cdots$   $r = 1$ ,  $u_{A2}/u_{C2} = u_{B2}/u_{C2} = 71\%$ ; linia niebieska  $\cdots$   $r = 0,3$ ,  $u_{A2}/u_{C2} = 29\%$ ,  $u_{B2}/u_{C2} = 96\%$ .

Z rysunków 2 wynika, że wzrost udziału niepewności typu A (linia zielona —) powoduje zwiększenie całkowitej niepewno-

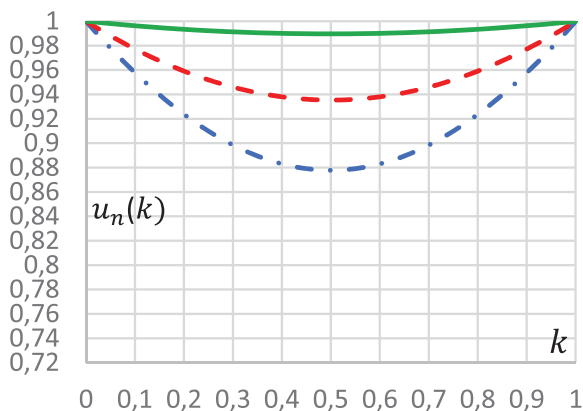


Rys. 1. Znormalizowane niepewności bezwzględne jako funkcje  $u_{nc} = f(k)$  względnego położenia  $k$  dla ilorazu niepewności  $\varepsilon = 2/3$ ;  $\varepsilon = 1$  oraz współczynnika korelacji  $\rho_{1,2} = 1$ ;  $\rho_{1,2} = 0$  punktów kontrolnych (metody: I i II) [7]

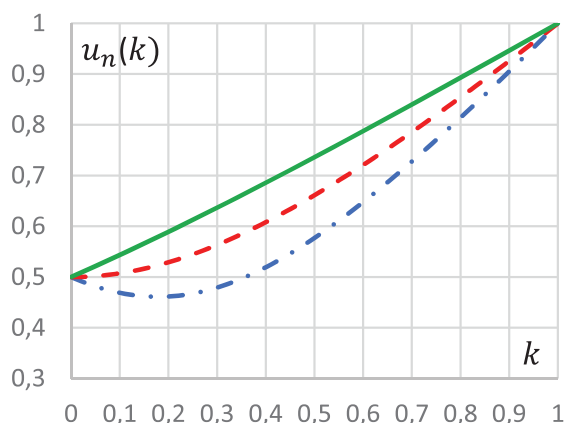
Fig. 1. Normalized absolute uncertainty as a function of  $u_{nc} = f(k)$  of the relative position  $k$  for the quotient of uncertainties  $\varepsilon = 2/3$ ;  $\varepsilon = 1$  and a correlation coefficient  $\rho_{1,2} = 1$  and  $\rho_{1,2} = 0$  (methods: I and II) of control points data [7]



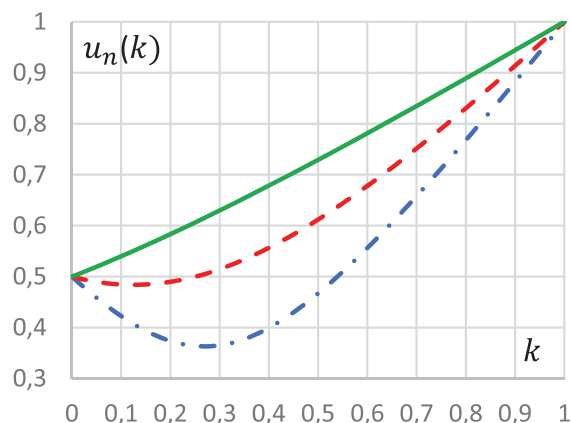
a)



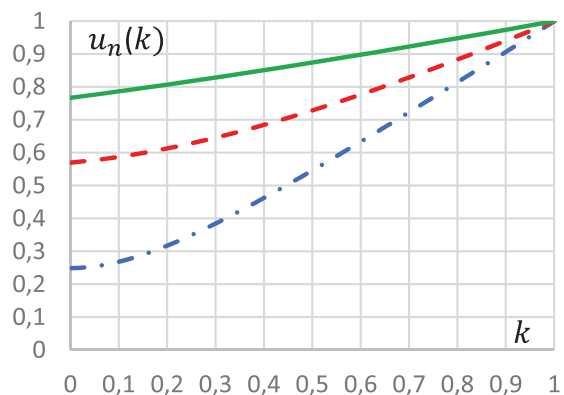
b)



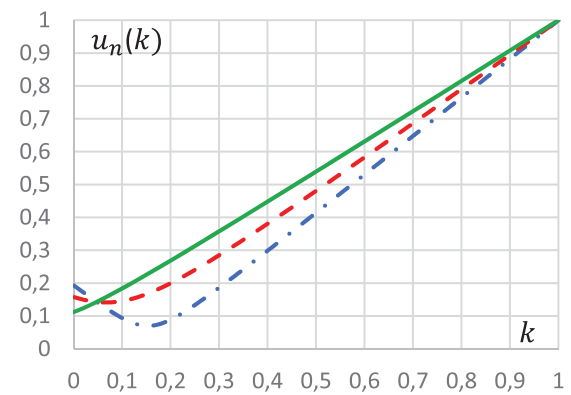
c)



d)



e)



f)

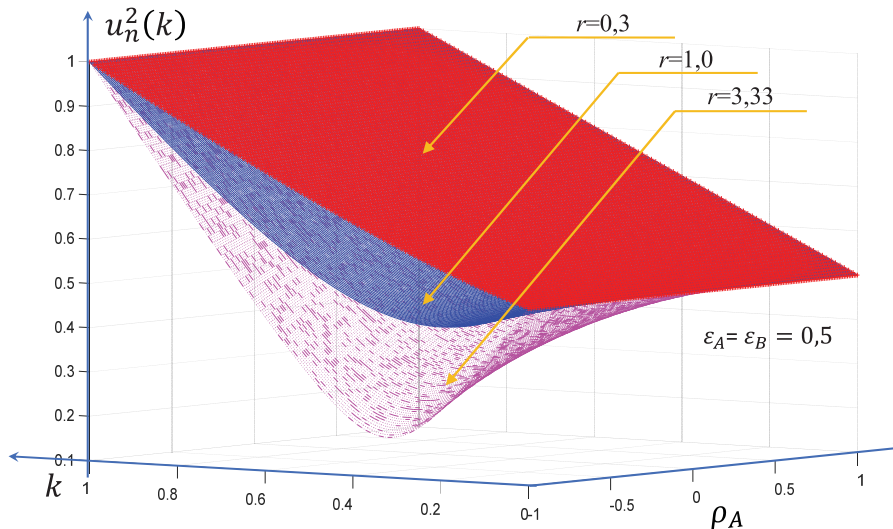
Rys. 2. Znormalizowana standardowa niepewność złożona  $u_n$  w funkcji względnego położenia  $k$  punktu  $x_c$  dla różnych wartości parametru  $r$  – udziału niepewności składowych typu A, B w niepewności  $u_n$  dla:  $\epsilon_A = \epsilon_B = 1$  i a)  $\rho_A = 0$ ; b)  $\rho_A = 0,5$ ; dla  $\epsilon_A = \epsilon_B = 0,5$  i c)  $\rho_A = 0$ ; d)  $\rho_A = -0,5$ ; oraz dla e)  $\epsilon_A = 0,1$ ;  $\epsilon_B = 0,8$ ;  $\rho_A = 0$ ; i f)  $\epsilon_A = 0,2$ ;  $\epsilon_B = 0,1$ ;  $\rho_A = -1$   
 Fig. 2. Normalized combined standard uncertainty  $u_n$  as a function of relative location parameter  $k$  of point  $x_c$  for various values of parameter  $r$  – share of component uncertainties types A, B in uncertainty  $u_n$  for:  $\epsilon_A = \epsilon_B = 1$  and a)  $\rho_A = 0$ ; b)  $\rho_A = 0,5$ ; for  $\epsilon_A = \epsilon_B = 0,5$  and c)  $\rho_A = 0$ ; d)  $\rho_A = -0,5$ ; and e)  $\epsilon_A = 0,1$ ;  $\epsilon_B = 0,8$ ;  $\rho_A = 0$ ; f)  $\epsilon_A = 0,2$ ;  $\epsilon_B = 0,1$ ;  $\rho_A = -1$

ści w interpolowanym przedziale w porównaniu do sytuacji, gdy dominuje udział niepewności typu B. Tylko na wykresie (rys. 2f) dla współczynnika korelacji 1, w niedużym początkowym przedziale interpolacji, jest na odwrót, tj. dominacja niepewności B powoduje zwiększenie niepewności całkowitej. Przy współczynnikach korelacji między obserwacjami w punktach kontrolnych  $k = 0$ ,  $k = 1$  w przebiegach interpolowanej niepewności typu

A występuje minimum. Natomiast przy braku korelacji przebieg zbliża się do liniowego. Trójwymiarową zależność niepewności znormalizowanej (6) w funkcji parametru położenia  $k$  i współczynnika korelacji  $\rho_A$  dla wybranych parametrów  $\epsilon_A = \epsilon_B$  dla różnych wartości parametru  $r$  przedstawia rysunek 3.

W przypadku pełnej korelacji dla odchyżeń o niepewności typu A, tj.  $\rho_A = 1$ , niezależnie od jej udziału  $r$  w niepewności





Rys. 3. Zależności znormalizowanej niepewności  $u_n$  w funkcji  $0 \leq k \leq 1$  położenia w kontrolowanym przedziale i dla pełnego zakresu współczynników korelacji  $-1 \leq \rho_A \leq 1$  dla niepewności typu A przy różnych udziałach niepewności składowych typu A i B w  $u_n$ , tj.  $r = 0,3; 1; 3,33$  i wartościach stosunków niepewności punktów pomiarowych  $\varepsilon_A = \varepsilon_B = 0,5$

Fig. 3. Relationships of normalized uncertainty  $u_n$  in function  $0 \leq k \leq 1$  of place in the estimated range and for a full range of correlation coefficients  $-1 \leq \rho_A \leq 1$  for type A uncertainty with different participation of A and B uncertainty components in  $u_n$ , i.e.  $r = 0.3; 1; 3.33$ , and parameter values  $\varepsilon_A = \varepsilon_B = 0.5$

złożonej, zależność niepewności w funkcji  $k$  ma charakter liniowy. W miarę zmniejszania się współczynnika korelacji  $\rho_A$  zaznaczają się różnice w stosunku do nadal liniowego charakteru przy dominacji niepewności typu B ( $r = 0,3$ ). Zmniejszenie niepewności następuje ze zwiększeniem udziału niepewności typu A dla  $r = 1; 3,33$  (rys. 3) – powierzchnie niebieska i purpurowa, przy czym minima niepewności sytuują się dla wartości  $k$  mniejszych od 0,5 w pobliżu centrum przedziału interpolacji. Najmniejsze wartości uzyskuje się dla  $\rho_A = -1$  i całkowitej dominacji niepewności typu A.

#### 4. Wyznaczanie niepewności rozszerzonej

Miarą dokładności wg Przewodnika GUM jest niepewność rozszerzona wyznaczająca przedział, w którym może znaleźć się estymator wartości mierzonej z określonym prawdopodobieństwem  $p$ . Do jej oszacowania niezbędna jest znajomość współczynnika rozszerzenia  $k_p$  jako mnożnika złożonej niepewności standardowej. Zależy on od rodzaju rozkładu i liczności próbek i jest wyznaczany analitycznie dla rozkładu Gaussa, Studenta i kilku innych, np. prostokątnego i trapezowego [2]. W pozostałych typach rozkładów, splotach i sumach rozkładów stosuje się rozwiązania całkowania numerycznego czy też metody Monte Carlo bazujące na generatorach prób pseudolosowych. Dla przedziału interpolowanego znormalizowana niepewność rozszerzona wynosi:

$$U_n(k) = k_p(k) \cdot u_n(k) \quad (7)$$

Metoda propagacji niepewności pozwala wyłącznie na oszacowanie niepewności standardowych dla rozkładów wielkości wyjściowych (w tym tekście omawia się funkcję liniową i tego typu błędy nie występują). Wskutek linearyzacji funkcji pomiaru dla większych niepewności wielkości mierzonych pojawiają się dodatkowe błędy wielkości wyjściowych. W tej metodzie jest wyznaczany numerycznie przedział rozszerzenia. Do interpolacji zmiennej losowej wewnątrz przedziału wykorzystano sumę ważoną dwóch zmiennych losowych: w punkcie początkowym i końcowym. Zmienne te stanowią sploty dwóch rozkładów:

Gaussa dla niepewności typu A i jednostajnego dla niepewności typu B. Rozszerzony obszar pokrycia, odchylenie standardowe oraz współczynnik rozszerzenia dla prawdopodobieństwa  $p = 95\%$  rozkładu wypadkowego wyznaczono metodą Monte Carlo w środowisku programistycznym MATLAB. Wykreślono charakterystyki zależności współczynnika rozszerzenia  $k_p$  dla niepewności rozszerzonej w funkcji parametru położenia  $k$  w przedziale interpolowanym dla różnych stosunków niepewności  $\varepsilon_A, \varepsilon_B$  udziałów niepewności typu A/B zawartych w parametrze  $r$  i dla kilku współczynników korelacji  $\rho_A$ . Przyjęto uproszczenie zerowych wartości oczekiwanych zastosowanych rozkładów. Korelację dla rozkładów Gaussa otrzymano przez zastosowanie dwóch nieskorelowanych zmiennych losowych  $X_{A1}$  i  $X$  o rozkładzie Gaussa i o zerowych wartościach oczekiwanych oraz odchyleniach standardowych odpowiednio  $\varepsilon_A u_{A2}$  oraz

$$\frac{u_{A2} \sqrt{1 - \rho_A^2}}{\sqrt{1 - (\rho_A / \varepsilon_A)^2}}$$

Za pomocą  $X_{A1}$  i  $X_{A2} = \rho_A X_{A1} / \varepsilon_A + \sqrt{1 - (\rho_A / \varepsilon_A)^2} X$  opisane są zmienne losowe dla punktów skrajnych przedziału interpolacji niepewności typu A. Ich odchylenia standardowe wynoszą odpowiednio  $\varepsilon_A u_{A2}$  i  $u_{A2}$ . Są one skorelowane ze współczynnikiem korelacji  $\rho_A$ , a zmienna interpolowana dla typu A ma postać:

$$X_A = (1 - k)X_{A1} + kX_{A2} \quad (8)$$

Zmienna losowa  $X_B$  dla typu B jest sumą dwóch całkowicie skorelowanych zmiennych o różnych odchyleniach standardowych, tj.:

$$X_B = (1 - k)X_{B1} + kX_{B2} \quad (9)$$

Ich wartości oczekiwane są równe zero, a odchylenia standardowe wynoszą  $\varepsilon_B u_{B2}$  oraz  $u_{B2}$ .

Wypadkowa zmienna losowa  $X$  w przedziale interpolacji wyraża się wzorem:

$$X = X_A + X_B = (1 - k)(X_{A1} + X_{B1}) + k(X_{A2} + X_{B2}) \quad (10)$$

Po normalizacji do niepewności końcowego punktu przedziału interpolacji otrzymuje się:

$$X_n = \frac{(1-k)(X_{A1} + X_{B1}) + k(X_{A2} + X_{B2})}{\sqrt{u_{A2}^2 + u_{B2}^2}} \quad (11)$$

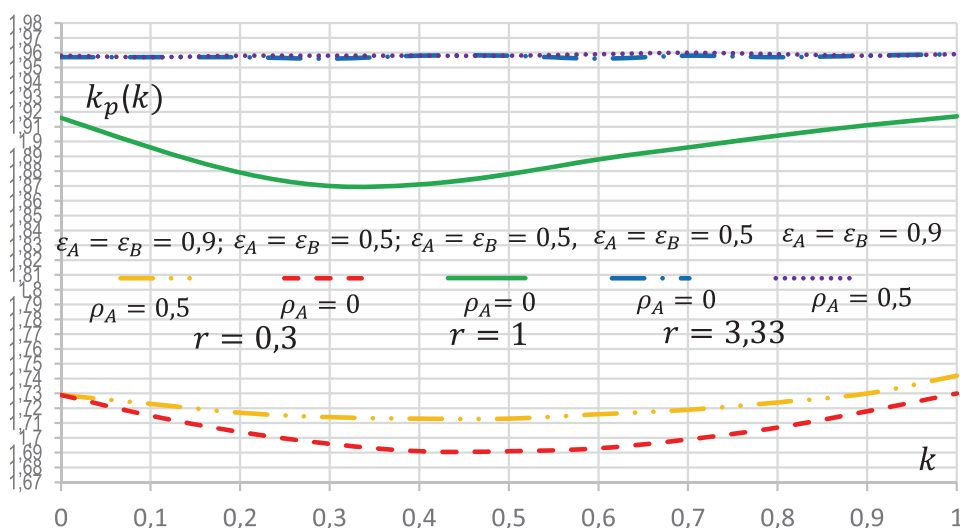
Współczynnik rozszerzenia  $k_p$  dla wartości  $x_c$  o położeniu  $k$  i  $p = 95\%$  podano na rysunku 4. Współczynnik ten wyznacza się ze średniej arytmetycznej sumy wartości granicznych o pokryciu 2,5% i 97,5%, znormalizowanej do odchylenia standardowego rozkładu wypadkowego. Skorzystano ze standardowych funkcji `prctile()` i `std()` środowiska MATLAB.

Z rysunku 4 wynika, że znormalizowana niepewność wypadkowa  $X_n$  osiąga minimum około  $k = 0,35$  dla  $k_p = 1,87$ , a na krańcach interpolowanego przedziału wzrasta do  $k_p = 1,91$ . Dominacja niepewności typu B o rozkładzie prostokątnym, sprawa,

że współczynnik rozszerzenia jest najmniejszy w środku przedziału i dla zerowej korelacji niepewności A, czyli dla  $\rho_A = 0$ , znajduje się dla  $k = 0,45$ ;  $k_p = 1,69$ . Przemieszcza się on do środka dla  $\rho_A = 0,5$  i  $k_p = 1,72$ , przy czym wartości jego rosną w kierunku końców przedziału do  $k_p = 1,73-1,74$ . Dla rozkładu o dominacji niepewności typu A, tj. rozkładu Gaussa, otrzymano współczynnik równy około 1,96.

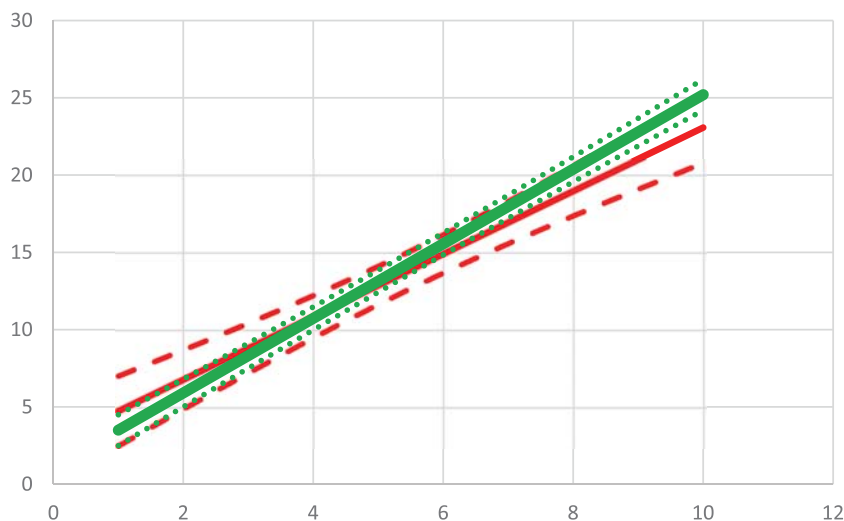
Na rysunku 5 porównano korytarze niepewności dla liniowej charakterystyki przetwornika.

Korytarz hiperboliczny wyznaczono metodą regresji dla jednakowej niepewności 10 punktów, a korytarz paraboliczny – wg metody dwupunktowej. Metoda ta służy głównie do estymacji niepewności typu A i jej zmian w warunkach pracy przetwornika. Natomiast charakterystykę znamionową tego przetwornika wyznacza się metodą wielopunktową w procesie kalibracji w warunkach laboratoryjnych.



Rys. 4. Zależność współczynnika rozszerzenia  $k_p$  estymowanej niepewności rozszerzonej w funkcji parametru  $k$  dla stopnia pokrycia 95% i różnych wartości  $r, \epsilon_A, \epsilon_B, \rho_A$

Fig. 4. Dependence of the expansion coefficient  $k_p$  of the estimated expanded uncertainty as a function of the parameter  $k$  for a coverage degree of 95% and various values of  $r, \epsilon_A, \epsilon_B, \rho_A$



Rys 5. Ilustracja charakterystyki liniowej wyznaczonej metodą regresji z hiperbolicznym korytarzem niepewności i metodą dwupunktową z korytarzem parabolicznym

Fig. 5. Illustration of the linear characteristic determined by the regression method with a hyperbolic corridor of uncertainty and a two-point method with a parabolic corridor

## 5. Podsumowanie i wnioski

W pracy zaprezentowano metodę estymacji niepewności złożonej i rozszerzonej dla punktów funkcji opisującej charakterystykę przetwornika pomiarowego lub badanego urządzenia w rzeczywistych warunkach jego pracy. Metoda bazuje na pomiarach kontrolnych w dwóch punktach tej charakterystyki. Z wyników pomiarów wyznacza się niepewności typu A. Natomiast niepewności typu B szacowane są heurystycznie z danych technicznych stosowanej aparatury oraz jej warunków pracy i warunków badanego obiektu.

Niepewność typu A estymuje się dla wybranego punktu funkcji jako ważoną sumę zmiennych losowych opisujących wyniki obu pomiarów kontrolnych, zależną od względnego położenia w przedziale interpolacyjnym.

Niepewność typu B przyrządu lub przetwornika zależy liniowo od mierzonej wielkości i opisuje odchylenie standardowe spodziewanego zbioru odchyleń od jej estymaty w okresie ważności kalibracji aparatury i w określonych warunkach pomiaru. Jeśli pomiary w obu kontrolowanych punktach wykonuje się tą samą aparaturą, to można traktować, że wskazania są w pełni skorelowane.

W pracy wyznaczono znormalizowaną niepewność złożoną i rozszerzoną mierzonego pośrednio menzurandu wyjściowego metodą propagacji niepewności składowych. Współczynnik rozszerzenia złożonej niepewności pomiaru wyznaczono dla niepewności typu A metodą propagacji rozkładu Gaussa, zaś dla niepewności typu B z propagacji rozkładu jednostajnego.

Zanalizowano zależności współczynnika rozszerzenia od przyjętych parametrów, w tym w funkcji położenia analizowanego punktu w interpolowanym przedziale i w zależności od udziałów wariancji (kwadratów niepewności) typu A, B w niepewności całkowitej.

W treści pracy sformułowano wnioski szczegółowe wynikające z analizy zależności zaprezentowanych na wykresach.

Przedstawioną metodę można wykorzystać m.in. do:

- kontroli niepewności aparatury *in situ*, pracującej w różnych rzeczywistych warunkach otoczenia, zarówno w przemyśle, jak i w innych dziedzinach,

- monitoringu i statystycznego sterowania jakością procesów wytwórczych i innych,
- szybkiego wyrównkowego sprawdzania wiarygodności stanowisk i systemów pomiarowych stosowanych w badaniach naukowych i technicznych w przemyśle, medycynie, badaniach środowiska i w technice wojskowej.

## Bibliografia

1. JCGM100:2008, Evaluation of measurement data -Guide to the expression of uncertainty in measurement; +JCGM101:2008 Supplement 1 – Propagation of distributions using a Monte Carlo method; JCGM102:2011 Supplement 2 – Extension to any number of output quantities.
2. Warszawa Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia PIAP 2016, ISBN 978-83-61278-31-3.
3. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estymacja niepewności charakterystyki z pomiarów w punktach kontrolnych*, „Pomiary Automatyka Robotyka”. R. 22, Nr 4, 2018, 39–50, DOI: 1014311/PAR\_230/39.
4. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Ocena niepewności charakterystyki z dwu pomiarów kontrolnych*, „Przemysł Chemiczny”, T. 98, Nr 6, 2019, 967–974, DOI: 10.15199/62.2019.6.22.
5. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Ocena niepewności punktów charakterystyki z dwu pomiarów kontrolnych*, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej, Nr 66, 2019, 101–108, DOI: 10.32016/1.66.21.
6. Warszawa Z.L., Puchalski J., Idzkowski A., *Application of the vector method for estimating characteristic function based on measurements uncertainty at two control points*. Proc. of AMSA V 18–20 Sept. 2019, Novosibirsk NSTU, 60–73, ISSN 2313-870X (amsa.conf.nstu.ru).
7. Warszawa Z.L., Puchalski J., *Estimation of the uncertainty in selected points of measured function from two control measurements*. Extended abstract and presentation on MATH-MET 2019, Lisbon, Portugal, 22. Nov. 2019.

## Estimation of the Extended Uncertainty of Points of the Characteristic from Two Control Measurements

**Abstract:** The idea of estimation the uncertainty of function points describing the characteristics on the basis of measurement results at two control points was discussed. The uncertainties type B are estimated as for data with uniform distribution based on the permissible maximum errors of instrument, assuming a correlation coefficient of 1 for the measurements by same instrument and 0 by different. The uncertainties type A are estimated by the statistical method as for data with normal distribution. For synchronous control measurements, a correlation coefficient is also estimated. On this basis, component, complex and extended uncertainties and correlation coefficient are estimated for other points of the function describing the examined characteristic of tested object, using the Monte Carlo method.

**Keywords:** interpolation, uncertainty types A and B, correlation coefficient, Monte Carlo method

## doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3537-6134

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatykacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



## dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

ORCID: 0000-0002-5055-8550

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

