

Synteza obserwatorów funkcyjnych liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu

Rafał Kociszewski

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny

Streszczenie: W pracy rozpatrzono problematykę syntezy obserwatorów funkcyjnych ciągłych układów niecałkowitego rzędu. Pokazano, że synteza obserwatora niecałkowitego rzędu polegająca na wyznaczeniu poszczególnych macierzy występujących w jego równaniu może być najpierw zapisana w postaci warunku LMI, a następnie efektywnie rozwiązana za pomocą dedykowanego oprogramowania do optymalizacji wypukłej. Rozważania zilustrowano przykładem symulacyjnym.

Słowa kluczowe: obserwator, funkcyjny, liniowy, ciągły, rząd niecałkowity

DOI: 10.14313/PAR_206/94

W systemach sterowania ważne znaczenie w kształtowaniu właściwości dynamicznych obiektu sterowania ma dostępność pomiarowa wektora (współrzędnych) stanu. W praktyce warunek ten nie zawsze jest spełniony. Zwykle wszystkie zmienne stanu lub ich część nie są bezpośrednio mierzalne. Układ dynamiczny, który na podstawie znajomości modelu dynamicznego obiektu sterowania oraz pomiarowo dostępnej informacji o wartościach wymuszeń i odpowiedzi układu odtwarza na bieżąco estymatę wektora stanu obiektu nazywamy obserwatorem. Koncepcja stosowania obserwatorów ma dość długą historię i wywodzi się z pracy [9]. W przypadku, gdy obserwator odtwarza liniową funkcję wektora stanu (tzw. liniowe prawo sterowania), mówimy o obserwatorze funkcyjnym [14].

W ostatnich latach można zaobserwować znaczne zainteresowanie rachunkiem całkowym i różniczkowym niecałkowitego rzędu oraz zastosowaniem tej teorii w naukach technicznych. Literatura z tego zakresu liczy obecnie wiele pozycji. Podstawy rachunku niecałkowitego rzędu, problemy osiągalności, stabilności układów ciągłych oraz dyskretnych można znaleźć w monografii [4] oraz cytowanych tam pracach, zaś zastosowanie tej teorii w pewnych obszarach automatyki jest opisane w monografii [13].

Synteze obserwatorów funkcyjnych układów ciągłych i dyskretnych całkowitego (naturalnego) rzędu są poświęcone prace [2, 3, 7, 11, 12, 15, 17, 18] (i cytowana tam

literatura) oraz wybrane rozdziały monografii [4, 14]. W części tych prac rozważane są głównie funkcyjne obserwatory zredukowane i związane z tym określanie minimalnego rzędu tychże układów.

Niniejsza praca jest poświęcona syntezie obserwatorów funkcyjnych układów ciągłych niecałkowitego rzędu. Proponowane w pracy alternatywne podejście do syntezy obserwatorów funkcyjnych jest oparte na pewnych warunkach zapisanych w ramach liniowych nierówności macierzowych (LMI). Zaletą takiego podejścia polega na tym, że sprowadzając dany problem do zadania optymalizacji z ograniczeniami w postaci nierówności LMI, można go uważać praktycznie za rozwiązany, nawet jeżeli wcześniej nie dysponujemy analityczną formułą na jego rozwiązanie.

1. Sformułowanie problemu

Niech $\mathfrak{R}^{n \times m}$ będzie zbiorem macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach rzeczywistych oraz $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n \times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich oznaczamy będziemy przez Z_+ , przez I_n macierz jednostkową wymiaru $n \times n$, zaś przez S^n zbiór macierzy symetrycznych. Macierz kwadratowa $Q \in S^n$ jest dodatnio (ujemnie) określona $Q \succ 0$ ($Q \prec 0$), jeżeli jej forma kwadratowa jest dodatnia (ujemna), tzn. $x^T Q x > 0$ ($x^T Q x < 0$) dla każdego niezerowego \mathfrak{R}^n .

Weźmy pod uwagę liniowy układ ciągły opisany za pomocą równań stanu w poniższej postaci

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie α jest rzędem układu, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wejścia (wymuszenia) i wyjścia (odpowiedzi) zaś $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$.

Załóżmy do dalszych rozważań, że układ opisany równaniami (1) jest asymptotycznie stabilny i obserwowalny.

Obserwatorem funkcyjnym niecałkowitego rzędu układu ciągłego (1) nazywamy układ dynamiczny, który na podstawie znajomości wartości wymuszenia $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ oraz odpowiedzi $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ układu (1) wyznacza estymatę liniowej funkcji wektora stanu $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, tj.

$$u(t) = Kx(t) \quad (2)$$

tego układu, przy czym $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ jest znaną macierzą.

Zazwyczaj (2) wyraża tzw. liniowe prawo sterowania, które jest stosowane w celu poprawy właściwości dynamicznych układu regulacji (lub jego stabilizacji) przez przesuwanie biegunów tego układu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej [4]. Macierz K to tzw. macierz wzmocnień, zawierająca stałe wartości, przez które są wyznaczone poszczególne współrzędne wektora stanu $x(t)$. W przypadku zmian tych parametrów (wzmocnień) reakcja układu może odbiegać od założeń projektowych. Ważne zatem jest monitorowanie (śledzenie) na bieżąco przebiegu funkcji $Kx(t)$, tak aby mieć pewność, że w projektowanym układzie są zachowane wszystkie postawione mu założenia.

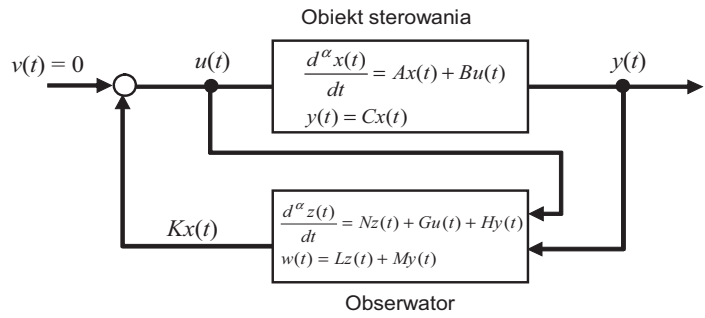
Zasadniczym celem pracy jest podanie, przy wykorzystaniu aparatu liniowych nierówności macierzowych (LMI), prostej i wygodnej w zastosowaniu metody syntezy obserwatorów funkcyjnych układów liniowych ciągłych opisanych równaniami stanu (1).

2. Główny rezultat

Rząd α układu (1) może mieć wartości w przedziale $0 < \alpha < 1$ lub $1 < \alpha < 2$. Z tym faktem wiążą się różne obszary stabilności (rys. 1), w których są położone wartości własne macierzy $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ [10].

W dalszej części pracy do rozważań przyjmiemy, że układ ciągły (1) ma rząd $1 < \alpha < 2$.

Korzystając z teorii obserwatorów funkcyjnych układów całkowitego (naturalnego) rzędu [14] można rozpatrywany obserwator układu rzędu niecałkowitego (1) opisać za pomocą poniższego równania



Rys. 2. Schemat blokowy układu niecałkowitego rzędu (1) oraz obserwatora funkcjonalnego (3)

Fig. 2. Block diagram of a fractional order system (1) and functional observer (3)

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha z(t)}{dt^\alpha} &= Nz(t) + Gu(t) + Hy(t) \\ w(t) &= Lz(t) + My(t) \end{aligned} \quad (3)$$

przy czym $z(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $y(t)$, $w(t) \in \mathfrak{R}^p$, $G \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $N \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $H \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $M \in \mathfrak{R}^{p \times p}$. Rząd α obserwatora (3) jest równy rzędowi układu (1).

Schemat blokowy układu (1) z obserwatorem (3), podobnie jak w przypadku układów naturalnego rzędu [14], można przedstawić jak na rys. 2.

Na podstawie równania wyjścia (3), można stwierdzić, że asymptotycznie stabilny obserwator funkcyjny (3) odtwarza (asymptotycznie), tzn.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [w(t) - Kx(t)] = 0 \quad (4)$$

liniową funkcję (2). Oznacza to, że wektor $w(t)$ jest estymatą $Kx(t)$, a $z(t) \in \mathfrak{R}^n$ jest estymatą $x(t)$.

Wektor błędu (uchybu) można zdefiniować w poniższy sposób

$$e(t) = [z(t) - x(t)] \in \mathfrak{R}^n \quad (5)$$

Różniczkując obustronnie (5) i korzystając z równania (1), (3) otrzymamy

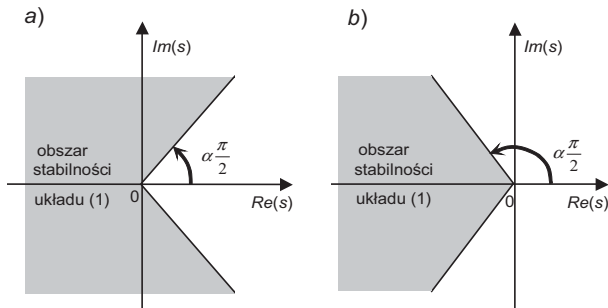
$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha e(t)}{dt^\alpha} &= \frac{d^\alpha z(t)}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \\ &= Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) - Ax(t) - Bu(t) = \\ &= Nz(t) + (N + HC - A)x(t) + (G - B)u(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Jeżeli

$$N = A - HC, \quad G = B \quad (7)$$

wówczas z (6) otrzymamy

$$\frac{d^\alpha e(t)}{dt^\alpha} = Ne(t) \quad (8)$$



Rys. 1. Obszar stabilności układu (1) dla rzędu: a) $0 < \alpha < 1$, b) $1 < \alpha < 2$

Fig. 1. Stability region of a system (1) for order: a) $0 < \alpha < 1$, b) $1 < \alpha < 2$

Z równania (8) wynika, że jeśli wartości własne macierzy N (7) będą położone w obszarze stabilności (rys. 1b), to błąd estymacji będzie asymptotycznie dążył do zera. Oznacza to, że $z(t) \rightarrow x(t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow \infty$. W stanie ustalonym mamy

$$Kx(t) = (L + MC)x(t) \Rightarrow K = L + MC \quad (9)$$

Uwzględniając powyższe rozważania, zadanie syntezy obserwatora (1) można sformułować w postaci:

Dla układu niecałkowitego rzędu (1) o znanych macierzach $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ należy wyznaczyć macierze $N \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $H \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $M \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ obserwatora niecałkowitego rzędu (3) takie, że $w(t) \rightarrow Kx(t)$, zaś macierz $(A - HC) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ jest asymptotycznie stabilna.

Układ ciągle opisany równaniem (1), lecz rzędu naturalnego ($\alpha=1$) jest asymptotycznie stabilny, jeżeli nierówność (Lapunova) LMI o postaci [1]

$$A^T P + PA < 0 \quad (10)$$

jest spełniona względem zmiennej $P = P^T > 0$.

W przypadku układów niecałkowitego rzędu (1) dla $1 < \alpha < 2$ należy stosować kryterium (stabilności) LMI, które zostało podane w pracy [10].

Twierdzenie 1. Układ ciągle niecałkowitego rzędu (1) z $1 < \alpha < 2$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $P = P^T > 0$, taka że jest spełniona poniższa nierówność

$$\begin{bmatrix} (A^T P + PA) \sin \alpha \frac{\pi}{2} & (A^T P - PA) \cos \alpha \frac{\pi}{2} \\ (PA - A^T P) \cos \alpha \frac{\pi}{2} & (A^T P + PA) \sin \alpha \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} < 0 \quad \blacksquare \quad (11)$$

Wykorzystując podany warunek (11) oraz pewne rezultaty pracy [6] sprowadzimy problem syntezy obserwatora funkcyjnego do standardowego problemu LMI dopuszczalności (tj. istnienia rozwiązania) z dodatkowym warunkiem do spełnienia nałożonym na macierz K o postaci (9). Warunek ten będzie zapisany i rozwiązany w dedykowanym środowisku programowym, opisanym w dalszej części pracy.

Liniowa nierówność macierzowa (LMI) w formie kanonicznej jest wyrażeniem o postaci [1]

$$F(x) = F + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (12)$$

gdzie $x \in \mathfrak{R}^m$ jest zmienną, zaś $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ są to znane macierze symetryczne. Warunek LMI (11) jest spełniony, jeżeli wypukły zbiór rozwiązań $\{x \mid F(x) > 0\}$ jest niepusty.

W rozważanym przypadku, w którym obszar stabilności dla $1 < \alpha < 2$ (rys. 1b) jest zbiorem wypukłym, będziemy

w ramach zadania LMI poszukiwać macierz $P = P^T > 0$ oraz macierz H taką, dla których jest spełniona nierówność o postaci

$$\begin{bmatrix} (N^T P + PN) \sin \alpha \frac{\pi}{2} & (N^T P - PN) \cos \alpha \frac{\pi}{2} \\ (PN - N^T P) \cos \alpha \frac{\pi}{2} & (N^T P + PN) \sin \alpha \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

gdzie $N = A - HC$

Dokonyując niezbędnych podstawień dla wyrażeń występujących w nawiasach w nierówności (13) otrzymamy

$$N^T P + PN \Rightarrow A^T P - C^T H^T P + PA - PHC \quad (14a)$$

$$N^T P - PN \Rightarrow A^T P - C^T H^T P - (PA - PHC) \quad (14b)$$

$$PN + N^T P \Rightarrow PA - PHC + A^T P - C^T H^T P \quad (14c)$$

Powyższe wyrażenia utworzą w efekcie biliniową nierówność macierzową (BMI), ponieważ niewiadoma P oraz H występuje w iloczynie. Dokonyjąc podstawienia $Y = PH$ otrzymamy liniową nierówność macierzową o postaci

$$\begin{bmatrix} (1) \sin \alpha \frac{\pi}{2} & (2) \cos \alpha \frac{\pi}{2} \\ (3) \cos \alpha \frac{\pi}{2} & (4) \sin \alpha \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$(1), (4) \rightarrow A^T P - C^T Y^T + PA - YC \quad (16)$$

$$(2) \rightarrow A^T P - C^T Y^T - PA + YC \quad (17)$$

$$(3) \rightarrow PA - YC - A^T P + C^T Y^T \quad (18)$$

Po rozwiązaniu warunku LMI (15) macierz H , przy której obserwator jest asymptotycznie stabilny możemy obliczyć ze wzoru

$$H = YP^{-1} \quad (19)$$

Powyższe rozważania można podsumować w postaci podanych niżej twierdzeń.

Twierdzenie 2. Dla układu niecałkowitego rzędu (1) istnieje obserwator funkcyjny (3) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze $L \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $M \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ oraz $H \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ taka, że wartości własne macierzy $N = (A - HC) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ są położone w obszarze stabilności (rys. 1b). ■

Twierdzenie 3. Obserwator funkcjonalny (3) układu niecałkowitego rzędu (1) jest asymptotycznie stabilny jeżeli nierówność LMI (15) dopuszcza rozwiązanie względem zmiennej $P = P^T > 0$ oraz $Y = PH$. W tym przypadku macierz H jest dana wzorem (19). ■

Warunek (15) można sprawdzić (rozwiązać) w środowisku programowym, przeznaczonym do rozwiązywania zagadnień optymalizacji wypukłej, w której warunki LMI są zapisane w postaci definicyjnej (12). Możliwość taką oferuje np. pakiet SeDuMi [16] oraz preprocesor YALMIP [8], działające integralnie w środowisku MATLAB. W rozważanym przypadku, jeżeli jest spełniona nierówność LMI (15) wówczas mamy gwarancję, że z obliczoną macierzą H obserwator jest asymptotycznie stabilny. Pozostałe macierze obserwatora, tj. $L \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $M \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ można wyznaczyć formułując w ramach danego środowiska optymalizacyjnego problem istnienia określonego rozwiązania, tj. poszukiwania takich macierzy L , M , dla których jest spełniony warunek (9), tj.

$$K = L + MC, \quad M \neq 0, L \neq 0 \quad (20)$$

przy czym macierze $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ są znane. Warto dodać, że zgodnie z definicją obserwatora, projektant ma możliwość swobodnego kształtowania jego dynamiki. Korzystając zatem ze wskazanych wyżej programów narzędziowych można przy poszukiwaniu rozwiązania podstawowego warunku LMI (15), nałożyć dodatkowe wymagania odnośnie wartości poszczególnych zmiennych. Przykładowo podczas rozwiązywania LMI (15) można równoległe określić, że zmienna $Y > C$, $Y > 2C$ (elementy macierzy Y mają być odpowiednio większe niż odpowiadające im elementy macierzy C). Często dodatkowym założeniem, pojawiającym się w teorii sterowania przy sprawdzaniu warunku stabilności (10) jest warunek w postaci $\text{tr}(P) = 1$. Oznacza to, że ślad macierzy tr (suma elementów na głównej przekątnej) powinien wynosić 1. Efekt wprowadzenia takiego warunku przy większej wartości sumy tych elementów prowadzi do uzyskania obserwatora o większej dynamice niż układu, dla którego jest on projektowany. Z założenia rozwiązywanie zadań formułowanych w ramach LMI przy poprawnym ich zapisaniu powinno zwracać akceptowalne przez projektanta rezultaty. Można zatem swobodnie formułować tego rodzaju dodatkowe warunki, jeśli uzyskuje się oczekiwane rezultaty, poprawiające w efekcie funkcjonowanie projektowanego układu: obiekt–obserwator.

2.1. Przykład

Weźmy pod uwagę układ ciągły niecałkowitego rzędu rozważany w pracy [12], gdzie rząd $\alpha = 1,76$, zaś macierze

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Należy zaprojektować obserwator funkcjonalny dla tego układu, który odtwarza asymptotycznie funkcję $Kx(t)$, przy czym

$$K = \begin{bmatrix} 0,5 & 2 & -1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

W rozpatrywanym układzie $n=4$, $m=1$, $p=2$.

Wykonując obliczenia w środowisku MATLAB z wykorzystaniem programów optymalizacyjnych SeDuMi, YALMIP uzyskano zaprezentowane dalej wyniki. Warunek LMI (18) jest spełniony dla macierzy

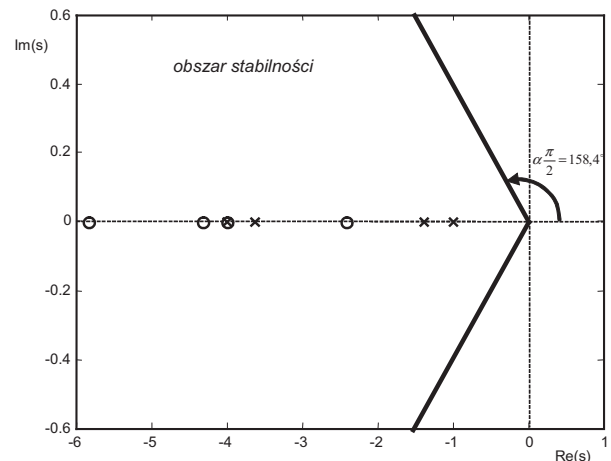
$$P = P^T = \begin{bmatrix} 0,82 & 0,11 & 0,04 & 0 \\ 0,11 & 0,54 & 0,13 & 0 \\ 0,04 & 0,13 & 0,41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,30 \end{bmatrix} > 0, \quad Y = \begin{bmatrix} 4,22 & 2,28 \\ 2,28 & 4,20 \\ 1,78 & 1,87 \\ 1,81 & 1,04 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Macierz H obserwatora obliczona ze wzoru (19), z uwzględnieniem powyższych macierzy, ma postać

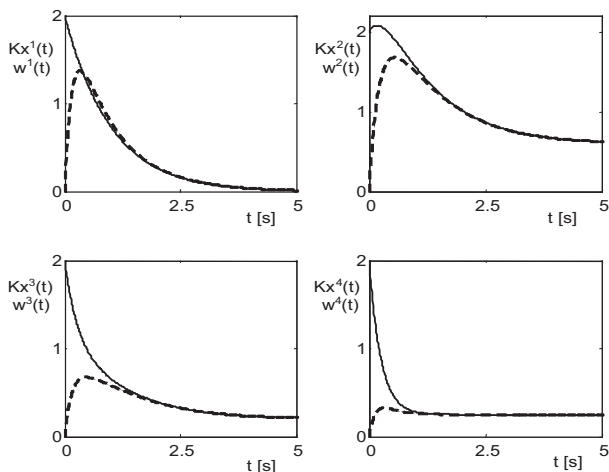
$$H = \begin{bmatrix} 3,77 & 2,41 \\ 1,85 & 2,77 \\ 1,20 & 1,42 \\ 0,54 & 0,55 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Macierz N (7) ma postać

$$N = A - HC = \begin{bmatrix} -4,77 & -2,41 & 0 & 0 \\ -0,85 & -4,77 & 1,0 & 0 \\ -1,20 & -0,42 & -3,0 & 0 \\ -0,54 & -0,55 & 0 & -4,0 \end{bmatrix} \quad (25)$$



Rys. 3. Położenie wartości własnych macierzy A ('x'), N ('o')
Fig. 3. Location of eigenvalues of matrices A ('x'), N ('o')



Rys. 4. Funkcje $Kx^i(t)$, $i=1, \dots, 4$ (linia ciągła) oraz ich estymaty $w^i(t)$, $i=1, \dots, 4$ (linia przerywana)

Fig. 4. Functions $Kx^i(t)$, $i=1, \dots, 4$ (solid line) and their estimates $w^i(t)$, $i=1, \dots, 4$ (dashed line)

Macierze L , M występujące w warunku (2) mają postać

$$L = \begin{bmatrix} 0,25 & 1,33 & -1 & 0,7 \\ -0,57 & 0,1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,67 \\ 0,67 & 0,10 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Łatwo sprawdzić, że warunek $K=L+MC$ jest spełniony, przy czym K ma strukturę (22). Podsumowanie poprawnych obliczeń dla tego warunku, pochodzące z programu optymalizacyjnego, jest zaprezentowane niżej.

```

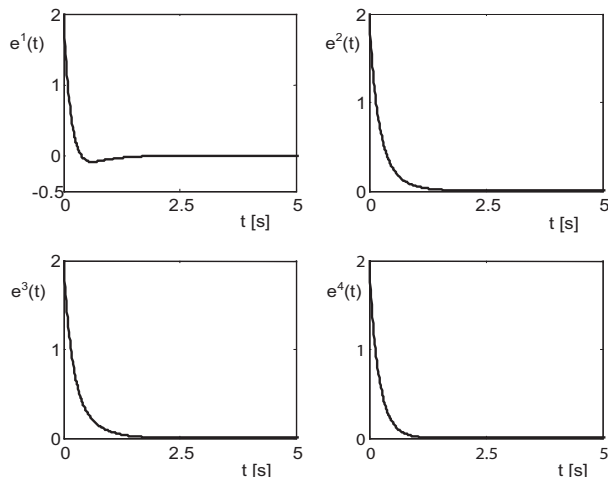
+++++
+
|ID| Constraint| Type| Primal residual | Dual residual |
+++++
+
|#1| K == L+M*C| Equality constraint| -5.7294e-007|-2.2915e-012|
+++++
+
No problems detected (SeDuMi-1.1)
    
```

Pozostałe informacje dotyczące deklaracji warunków LMI są podobne, przy czym liczba iteracji, w których program zwraca wynik obliczeń może być większa (pole *Primal* oraz *Dual residual*). W przypadku błędnego sformułowania zadania użytkownik otrzymuje informację: Infeasible problem (SeDuMi-1.1).

Położenie wartości własnych macierzy A (21) rozważanego układu niecałkowitego rzędu oraz macierzy N (25) obserwatora jest pokazane na rys. 3.

Z rozkładu wartości własnych macierzy N (25) wynika, że macierz H (24) została obliczona poprawnie i obserwator z tą macierzą jest asymptotycznie stabilny.

Na kolejnych rysunkach przedstawiono estymaty funkcji $Kx(t)$ dla wszystkich współrzędnych wektora stanu $x(t) = [x^1(t) \ x^2(t) \ x^3(t) \ x^4(t)]^T$ oraz przebieg błędu esty-



Rys. 5. Błąd estymacji funkcji $Kx^i(t)$, $i=1, \dots, 4$

Fig. 5. Estimates error of function $Kx^i(t)$, $i=1, \dots, 4$

macji dla każdego przypadku. W przypadku układu niecałkowitego rzędu (1) o macierzach (21) przyjęto taki sam warunek początkowy $x_0(t)=2$ dla każdej zmiennej stanu, natomiast w obserwatorze ustawiono zerowy warunek początkowy. Układ został zamodelowany w środowisku MATLAB/Simulink z wykorzystaniem dodatkowych elementów z biblioteki [19].

Uzyskane rezultaty symulacji potwierdzają, że obserwator funkcjonalny rzędu $\alpha=1,76$ o równaniu (3) z macierzami (24), (25), (26) oraz macierzą $G=B$ został zaprojektowany poprawnie. Jest on asymptotycznie stabilny, zaś błąd estymacji $e(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow \infty$.

3. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem syntezy obserwatorów funkcyjnych układów ciągłych niecałkowitego rzędu. Stosując podejście oparte na liniowych nierównościach macierzowych (LMI) podano metodykę wyznaczania nieznanych macierzy obserwatora niecałkowitego rzędu. Rozważania podsumowano dwoma kryteriami (twierdzenie 2, 3) i zilustrowano na przykładzie symulacyjnym.

Zaletą proponowanego podejścia do syntezy obserwatora funkcyjnego jest proste sformułowanie warunków istnienia i wyznaczania macierzy obserwatora, bez konieczności uogólniania metod analitycznych znanych dla układów naturalnego rzędu [4, 14]. Użytkownik stosujący proponowane podejście ma możliwość określania dynamiki obserwatora przez nakładanie dodatkowych warunków (ograniczeń). Mogą one dotyczyć formułowania wartości śladu macierzy P , warunku na macierz Y (np. $Y > C$) występujących w podstawowym warunku LMI (15) lub macierz M (20) (np. $M > 0$, $M > C$).

Proponowaną w niniejszej pracy syntezę obserwatorów można zastosować dla dodatknych układów ciągłych niecałkowitego jak i naturalnego rzędu. Można na podstawie

proponowanej metodyki wyznaczyć obserwator zredukowanego rzędu. Możliwe jest także uogólnienie przedstawionych rozważań dla układów singularnych niecałkowitego rzędu lecz przy pewnych ograniczeniach.

Podziękowanie

Pracę wykonano w ramach grantu NN 514 6389 40 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

Bibliografia

1. Boyd S., ElGhaoui L., Feron E., Balakrishnan V., *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM 1994.
2. Darouach M., *Existence and design of functional observers for linear systems*, "IEEE Trans. on Autom. Control", Vol. 45, No. 5, 2000, 940–943.
3. Darouach M., *Linear functional observers for system with delays in state variables: The discrete-time case*, "IEEE Trans. on Autom. Control", Vol. 50, No. 2, 2005, 228–233.
4. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia matematyki i teorii układów dynamicznych*, Wyd. Politechniki Białostockiej, Białystok 2007.
5. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wyd. Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
6. Kociszewski R., *Sterowalność i obserwowalność liniowych stacjonarnych układów dodatnich dyskretnych z opóźnieniami*. Rozprawa doktorska. Politechnika Białostocka, Białystok 2008.
7. Korovin S.K., Il'in A.V., Medvedev I.S., Fomichev V.V., *On the theory of functional observers and stabilizers of given order*. "Doklady Mathematics", 2006, Vol. 74, No. 1, 619–622. DOI: 10.1134/S1064562406040387
8. Löfberg J., YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. [<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>].
9. Luenberger D.G., *An introduction to observers*, "IEEE Transactions on Automatic Control", Vol. 16, No. 6, 1971, 596–602. DOI: 10.1109/TAC.1971.1099826
10. Moze M., Sabatier J., Oustaloup A., *LMI characterization of fractional systems stability*. [in:] *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer 2007, 419–434. DOI: 10.1007/978-1-4020-6042-7_29.
11. Nakade P.K., Galgati G.G., *Design of linear functional observer for MIMO LTI systems*, "International Journal of Computer Applications", Vol. 1, No. 6, 2010, 121–129. DOI: 10.5120/132-249.
12. N'Doye, Darouach M., Voos H., Zasadzinski M., *Design of unknown input fractional-order observers for fractional-order systems*, "Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.", 2013, Vol. 23, No. 3, 491–500.
13. Ostalczyk P., *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*, Wyd. Politechniki Łódzkiej, 2008.
14. O'Reilly J., *Observers for linear systems*. Academic Press, London 1983.
15. Raff T., Menold P., Ebenbauer Ch., Allgower F., *A finite time functional observer for linear systems*, [in:] Proc. of the 44th IEEE Conf. Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12–15, 2005, 7198–7203. DOI: 10.1109/CDC.2005.1583322
16. Sturm J.F., *Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones*. [in:] idem, *Optimization Methods and Software*, 1999, 625–653. DOI: 10.1080/10556789908805766
17. Suzuki R., Kudou T., Ikemoto M., Minami M., Kobayashi N., *Linear functional observer design for unknown input system and its application to disturbance attenuation problems*. [in:] Proc. of the IEEE Conference on Control Applications, Toronto, Canada, August 28–31, 2005. DOI: 10.1109/CCA.2005.1507156
18. Trinh H., Fernando T., Nahavandi S., *Design of reduced-order functional observers for linear systems with unknown inputs*, "Asian Journal of Control", Vol. 6, No. 4, 2004, 514–520. DOI: 10.1111/j.1934-6093.2004.tb00372.x
19. Valerio D., *Ninteger v.2.3 Fractional control toolbox for Matlab*. Techn. Univ. of Lisboa, 2005. ■

Functional observer synthesis for linear continuous-time fractional systems

Abstract: The paper presents a problem of synthesis of functional observers for fractional order continuous-time linear systems. It has been shown that this problem can be formulated and solved by the use of linear matrix inequalities (LMI) method. Necessary and sufficient conditions for solvability of the problem for computation of an unknown matrices of asymptotically stable observers have been given. The proposed approach is illustrated by a numerical example.

Keywords: observer, functional, continuous-time, fractional order

Artykuł recenzowany; nadesłany 19.11.2013 r.; przyjęty do druku 11.03.2014 r.

dr inż. Rafał Kociszewski

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej (2001 r.). Obecnie adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Zainteresowania naukowe autora są skoncentrowane na syntezie liniowych układów dynamicznych niecałkowitego rzędu, optymalizacyjnych metodach sterowania oraz wykorzystaniu techniki mikroprocesorowej do realizacji algorytmów sterowania.

e-mail: rafko@pb.edu.pl

