

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
 Politechnika Białostocka
 Wydział Elektryczny

KOMPUTEROWE METODY BADANIA STABILNOŚCI MODELU FORNASINIEGO-MARCHESINIEGO LINIOWYCH UKŁADÓW 2D

Rozpatrzone problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów dynamicznych dwuwymiarowych (2D). Podano komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Fornasini-Marchesini w przypadku ogólnym oraz analityczne metody w przypadku szczególnym układu skalarne. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

COMPUTER METHODS FOR STABILITY INVESTIGATION OF THE FORNASINI-MARCHESINI MODEL OF LINEAR 2D SYSTEMS

The problem of asymptotic stability of linear dynamic 2D systems is considered. Computer methods for asymptotic stability analysis of the Fornasini-Marchesini model in the general case and analytic methods in the case of scalar systems are given. The considerations are illustrated by numerical examples.

1. WSTĘP

Istnieje kilka modeli liniowych układów dwuwymiarowych (2D) [7, 8, 9]. Do najbardziej popularnych należy model Fornasini-Marchesini wprowadzony w pracy [3].

Problematyka analizy i syntezy układów dwuwymiarowych jest rozwijana w literaturze światowej od około 40 lat. W okresie ostatnich kilkunastu lat w literaturze rozpatruje się nie tylko klasyczne modele układów 2D, ale także modele dodatnie (w tym modele niecałkowitych rzędów) [8–18].

Problem asymptotycznej stabilności układów 2D był rozpatrywany w wielu publikacjach, np. [1, 2, 4–7, 13–28]. Wynika to nie tylko z dużego praktycznego znaczenia tego problemu, ale przede wszystkim z faktu jego złożoności. Funkcja charakterystyczna układów 2D jest bowiem wielomianem dwóch niezależnych zmiennych zespolonych i badanie rozkładu jej zer jest problemem trudnym. Do badania asymptotycznej stabilności układów 2D wykorzystuje się m.in. metody analityczne, podobne jak w przypadku badania stabilności w sensie Schura układów 1D (np. [1]), metody wykorzystujące teorię stabilności Lapunowa ([21, 23]), czy też metody bazujące na LMI ([2, 13, 27]).

W niniejszej pracy zostaną podane komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Fornasini-Marchesini w przypadku ogólnym oraz metody analityczne w przypadku układu skalarne.

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia: $|\lambda_i(X)|$ – i -ta wartość własna macierzy X ; $|\rho(X)| = \max_i |\lambda_i(X)|$ – promień spektralny macierzy X ; $|X|$ – macierz o nieujemnych elementach $|x_{ij}|$ otrzymana z rzeczywistej kwadratowej macierzy $X = [x_{ij}]$; $\|x(\cdot)\|$ – norma wektora $x(\cdot)$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ – zbiór macierzy o wymiarach $n \times m$, przy czym $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$; $\mathbb{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty]$.

2. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę model Fornasini-Marchesini liniowego układu 2D, którego równanie stanu ma postać [3, 7, 8, 9]

$$), \quad x(i+1, j+1) = A_0 x(i, j) + A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) + Bu(i, j) \quad i \in Z_+, \quad t \in \mathfrak{R}_+, \quad (1)$$

gdzie $x(i, j) \in \mathfrak{R}^n$, $u(i, j) \in \mathfrak{R}^m$ zaś stałe macierze A_0 , A_1 , A_2 i B mają odpowiednie wymiary.

Warunki brzegowe dla równania (1) są następujące

$$x(i, 0) = x_{i0}, \quad x(0, j) = x_{0j}, \quad i, j \in Z_+. \quad (2)$$

Macierz charakterystyczna modelu (1) wyraża się wzorem

$$H(z_1, z_2) = z_1 z_2 I_n - A_0 - z_1 A_1 - z_2 A_2 \quad (3)$$

zaś funkcja charakterystyczna tego modelu, którą oblicza się ze wzoru

$$], \quad w(z_1, z_2) = \det H(z_1, z_2) = \det[z_1 z_2 I_n - A_0 - z_1 A_1 - z_2 A_2] \quad (4)$$

jest wielomianem dwóch zmiennych niezależnych z_1 i z_2 . Można ją napisać w postaci

$$w(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_{kj} z_1^k z_2^j, \quad a_{nn} = 1. \quad (5)$$

Definicja 1. Model Fornasini-Marchesini (1) układu 2D będziemy nazywać asymptotycznie stabilnym, jeżeli przy $u(i, j) \equiv 0$ oraz ograniczonych warunkach brzegowych (2) zachodzi zależność $\lim_{i, j \rightarrow \infty} \|x(i, j)\| = 0$.

Na podstawie np. prac [1], [7] możemy sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. Model Fornasini-Marchesini (1) układu 2D jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny (4) spełnia warunek

$$w(z_1, z_2) \neq 0, \quad |z_1| \geq 1, \quad |z_2| \geq 1. \quad (6)$$

Wielomian $w(z_1, z_2)$ dwóch zmiennych niezależnych spełniający warunek (6) będziemy nazywać wielomianem stabilnym.

Stosując we wzorze (3) podstawienie $d_1 = z_1^{-1}$ oraz $d_2 = z_2^{-1}$ otrzymamy

$$], \quad \tilde{H}(d_1, d_2) = d_1^{-1} d_2^{-1} [I_n - d_1 d_2 A_0 - d_2 A_1 - d_1 A_2] \quad (7)$$

Z powyższego wynika, że przy badaniu asymptotycznej stabilności modelu (1) możemy równoważnie rozpatrywać wielomian charakterystyczny

$$\tilde{w}(d_1, d_2) = \det(I_n - d_1 d_2 A_0 - d_2 A_1 - d_1 A_2) \quad (8)$$

zamiast wielomianu (4).

W takim przypadku warunek asymptotycznej stabilności przyjmuje postać

$$\tilde{w}(d_1, d_2) \neq 0, \quad |d_1| \leq 1, \quad |d_2| \leq 1. \quad (9)$$

Należy zaznaczyć, że w literaturze (np. [5, 6, 19, 20, 24–26]) zamiast wielomianu charakterystycznego (8) rozpatruje się wielomian

$$), \quad \tilde{w}(d_1, d_2) = \det(I_n - d_1 d_2 A_0 - d_1 A_1 - d_2 A_2) \quad (8a)$$

Z warunku (9) asymptotycznej stabilności wynika, że przyjęcie do rozważań postaci (8a) zamiast (8) wielomianu charakterystycznego nie ma wpływu na stabilność modelu (1).

Uwzględniając prace [6, 20, 24], warunki asymptotycznej stabilności modelu (1) możemy sformułować w postaci poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Model Fornasini-Marchesini (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki

- 1) $\tilde{w}(d_1, 0) \neq 0, |d_1| \leq 1$,
- 2) $\tilde{w}(d_1, d_2) \neq 0, |d_1| = 1, |d_2| \leq 1$.

Bazując na twierdzeniu 2, w pracach [5, 6, 19, 20, 26, 29] podano warunki asymptotycznej stabilności modelu (1) wyrażone w terminach promieni spektralnych odpowiednich macierzy. Są to najczęściej warunki wystarczające. Jeden z nich jest podany poniżej.

Twierdzenie 3 [20]. Model Fornasini-Marchesini (1) jest asymptotycznie stabilny, jeżeli jest spełniona przynajmniej jedna z poniższych grup warunków:

$$\rho(|A_1|) < 1 \text{ i } \rho(V_0) < 1, \quad (10)$$

gdzie

$$V_0 = |A_2| + |A_1 A_2 + A_0| + (I_n - |A_1|)^{-1} |A_1(A_1 A_2 + A_0)| \quad (11)$$

oraz

$$\rho(|A_2|) < 1 \text{ i } \rho(W_0) < 1, \quad (12)$$

gdzie

$$W_0 = |A_1| + |A_1 A_2 + A_0| + (I_n - |A_2|)^{-1} |A_2(A_1 A_2 + A_0)|. \quad (13)$$

Celem pracy jest podanie nowych komputerowych metod badania asymptotycznej stabilności modelu Fornasini-Marchesini (1) układu 2D. Proponowane metody bazują na warunkach koniecznych i wystarczających asymptotycznej stabilności, służących do sprawdzania spełnienia warunku (6).

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Wzór (4) można przekształcić do dwóch równoważnych sobie postaci

$$)], \quad w(z_1, z_2) = \det[z_1 I_n - A_2] \det[z_2 I_n - S_1(z_1)] \quad (14)$$

$$)], \quad w(z_1, z_2) = \det[z_2 I_n - A_1] \det[z_1 I_n - S_2(z_2)] \quad (15)$$

przy czym

$$), \quad S_1(z_1) = (z_1 I_n - A_2)^{-1} (A_0 + z_1 A_1) \quad (16)$$

$$), \quad S_2(z_2) = (z_2 I_n - A_1)^{-1} (A_0 + z_2 A_2) \quad (17)$$

Z powyższych wzorów i twierdzenia 1 wynika następujący lemat.

Lemat 1. Proste warunki konieczne asymptotycznej stabilności modelu (1) mają postaci:

$$|\lambda_i(A_1)| < 1, \quad |\lambda_i(A_2)| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Spełnienie warunków (18) oznacza, że macierze A_1 i A_2 są stabilne w sensie Schura.

Twierdzenie 4. Liniowy układ 2D o wielomianie charakterystycznym $w(z_1, z_2)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki

- 1) $w(z_1, 1) \neq 0, |z_1| \geq 1$,
- 2) $w(e^{j\omega}, z_2) \neq 0, \omega \in [0, 2\pi], |z_2| \geq 1$.

Dowód. Z pracy [1] wynika, że wielomian $w(z_1, z_2)$ jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa warunki:

- $w(z_1, a) \neq 0$ dla $|z_1| \geq 1$ i pewnego a spełniającego warunek $|a| \geq 1$,
- $w(z_1, z_2) \neq 0, |z_1| = 1, |z_2| \geq 1$.

Warunki 1) i 2) wynikają bezpośrednio z powyższych warunków dla $a = 1$ i $z_1 = e^{j\omega}$, $\omega \in [0, 2\pi]$. ■

Spełnienie warunku 1) twierdzenia 4 oznacza, że wszystkie zera wielomianu $w(z_1, 1)$ jednej zmiennej mają wartości bezwzględne mniejsze od 1, czyli ten wielomian jest stabilny w sensie Schura (jest wielomianem Schura). Do badania jego stabilności można stosować znane kryteria stabilności układów dyskretnych 1D.

Spełnienie warunku 2) twierdzenia 4 oznacza, że dla każdego ustalonego $\omega \in [0, 2\pi]$ wielomian zespolony $w(e^{j\omega}, z_2)$ nie ma zer o wartościach bezwzględnych większych lub równych jeden, czyli jest on stabilny w sensie Schura. Łatwo zauważyć, że możemy ograniczyć się do przedziału $[0, \pi]$ wartości parametru ω .

Lemat 2. Jeżeli jest spełniony pierwszy z warunków (18), to warunek 1) twierdzenia 4 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy

$$S_2(1) = (I_n - A_1)^{-1}(A_0 + A_2) \quad (19)$$

mają wartości bezwzględne mniejsze od 1.

Dowód. Podstawiając $z_2 = 1$ we wzorze (15) otrzymamy

$$)], \quad w(z_1, 1) = \det[I_n - A_1] \det[z_1 I_n - S_2(1) \quad (20)$$

Jeżeli jest spełniony pierwszy z warunków (18), to $A_1 \neq I_n$ i macierz (19) jest dobrze określona. Zatem wartości własne macierzy (19) są miejscami zerowymi wielomianu (20). ■

Lemat 3. Jeżeli jest spełniony drugi z warunków (18), to warunek 2) twierdzenia 4 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy $S_1(e^{j\omega})$ mają wartości bezwzględne mniejsze od 1 dla każdego $\omega \in [0, 2\pi]$ gdzie

$$), \quad S_1(e^{j\omega}) = (e^{j\omega} I_n - A_2)^{-1}(e^{j\omega} A_1 + A_0) \quad (21)$$

Dowód. Podstawiając $z_1 = e^{j\omega}$ we wzorze (14) otrzymamy

$$)], \quad w(e^{j\omega}, z_2) = \det(e^{j\omega} I_n - A_2) \det[z_2 I_n - S_1(e^{j\omega}) \quad (22)$$

gdzie $S_1(e^{j\omega})$ ma postać (21). Jeżeli jest spełniony drugi z warunków (18), to $A_2 \neq \pm I_n$ i wartości własne macierzy (21) są zerami wielomianu zespolonego $w(e^{j\omega}, z_2)$. ■

Twierdzenie 5. Model (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (18) i warunki podane w lematach 2 i 3, tj.

$$|\lambda_i(S_2(1))| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

$$|\lambda_i(S_1(e^{j\omega}))| < 1, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

gdzie macierze $S_2(1)$ i $S_1(e^{j\omega})$ mają postaci (19) i (21), odpowiednio.

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 4 i lematów 2 i 3. ■

Zauważmy, że w twierdzeniu 4 możemy zamienić rolami zmienne z_1 i z_2 . Otrzymamy wtedy dwa poniższe twierdzenia, równoważne z twierdzeniami 4 i 5, odpowiednio.

Twierdzenie 6. Liniowy układ 2D o wielomianie charakterystycznym $w(z_1, z_2)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- 1) $w(1, z_2) \neq 0, \quad |z_2| \geq 1,$
- 2) $w(z_1, e^{j\omega}) \neq 0, \quad \omega \in [0, 2\pi], \quad |z_1| \geq 1.$

Ze wzorów (14) i (15) dla $z_1 = 1$ otrzymamy odpowiednio

$$)], \quad w(1, z_2) = \det[I_n - A_2] \det[z_2 I_n - S_1(1) \quad (25)$$

$$)], \quad w(1, z_2) = \det[z_2 I_n - A_1] \det[I_n - S_2(z_2) \quad (26)$$

przy czym $S_2(z_2)$ ma postać (17) zaś

$$). \quad S_1(1) = (I_n - A_2)^{-1} (A_0 + A_1 \quad (27)$$

Twierdzenie 7. Model (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione nierówności (18) oraz warunki

$$|\lambda_i(S_1(1))| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

$$|\lambda_i(S_2(e^{j\omega}))| < 1, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (29)$$

gdzie macierz $S_1(1)$ ma postać (27) zaś

$$). \quad S_2(e^{j\omega}) = (e^{j\omega} I_n - A_1)^{-1} (A_0 + e^{j\omega} A_2 \quad (30)$$

3.1. Przypadek szczególny – model układu skalarnego

Równanie stanu modelu Fornasini-Marchesini skalarnego układu 2D ma postać

$$), \quad x(i+1, j+1) = a_0 x(i, j) + a_1 x(i+1, j) + a_2 x(i, j+1) + b u(i, j) \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (31)$$

gdzie a_0, a_1, a_2 i b są stałymi rzeczywistymi współczynnikami.

W przypadku układu skalarnego proste warunki konieczne (18) asymptotycznej stabilności przyjmują postać:

$$|a_1| < 1, \quad |a_2| < 1. \quad (32)$$

Natomiast ze wzorów (19) i (21) odpowiednio otrzymamy

$$S_2(1) = \frac{a_0 + a_2}{1 - a_1}, \quad (33)$$

$$S_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}a_1 + a_0}{e^{j\omega} - a_2}. \quad (34)$$

Łatwo sprawdzić, że wykres funkcji (34) dla $\omega \in [0, 2\pi]$ jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej okręgiem o środku w punkcie s_{r1} i o promieniu r_1 przy czym

$$s_{r1} = \frac{a_0a_2 - a_1}{1 - a_2^2}, \quad r_1 = \frac{a_0 + a_2 - a_1}{1 - a_2^2}. \quad (35)$$

Okrąg ten przecina oś rzeczywistą w punktach

$$S_1(1) = \frac{a_1 + a_0}{1 - a_2}, \quad S_1(-1) = \frac{a_1 - a_0}{1 + a_2}. \quad (36)$$

Zatem wykres funkcji $S_1(e^{j\omega})$, $\omega \in [0, 2\pi]$ leży na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w okręgu jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left| \frac{a_1 + a_0}{1 - a_2} \right| < 1 \quad \text{i} \quad \left| \frac{a_1 - a_0}{1 + a_2} \right| < 1. \quad (37)$$

Z powyższych rozważań i twierdzenia 5 wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. Skalarny model (31) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki konieczne (32) i nierówności

$$|, \quad a_1 < 1 - |a_0 + a_2| \quad (38a)$$

$$|, \quad a_2 < 1 - |a_0 + a_1| \quad (38b)$$

$$a_2 > |a_1 - a_0| - 1. \quad (38c)$$

Dowód. Jeżeli są spełnione proste warunki konieczne (32), to dla modelu (31) nierówności (23) i (24) przyjmują postaci: $|S_2(1)| < 1$ oraz (37). Można je napisać w postaci (38). ■

Korzystając z twierdzenia 7 i postępując podobnie jak w powyższych rozważaniach, otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9. Skalarny model (31) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki konieczne (32) i nierówności

$$|, \quad a_2 < 1 - |a_0 + a_1| \quad (39a)$$

$$|, \quad a_1 < 1 - |a_0 + a_2| \quad (39b)$$

$$a_1 > |a_2 - a_0| - 1. \quad (39c)$$

4. PRZYKŁADY

Przykład 1. Należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu Fornasini-Marchesini (1) układu 2D o macierzach

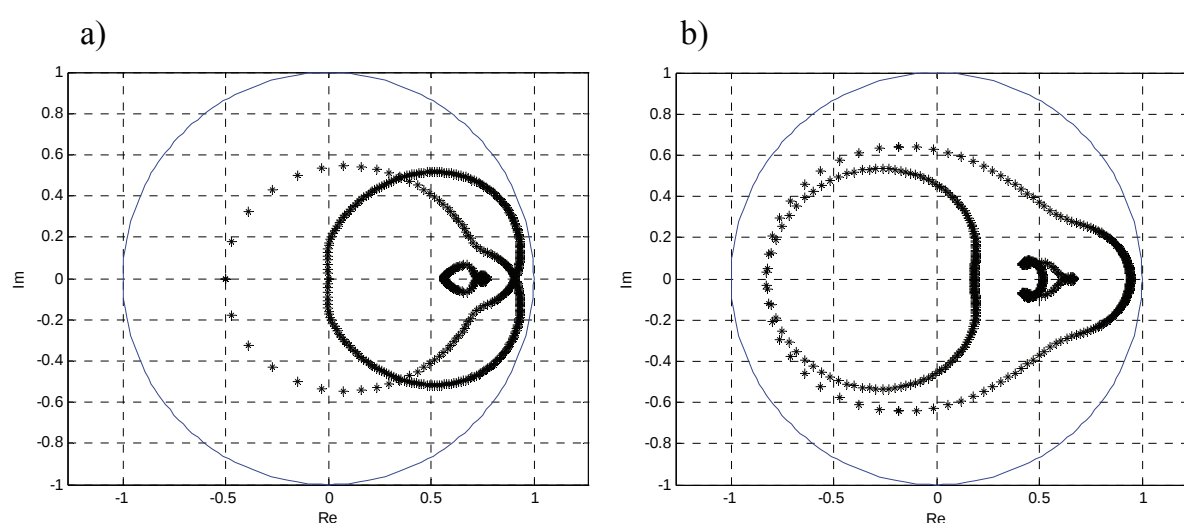
$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & -0.4 & 0 \\ 0 & -0.3 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Obliczając wartości własne macierzy A_1 , A_2 , $S_2(1)$ (19) i $S_1(1)$ (27), otrzymamy:

- wartości własne A_1 : 0.5; 0.6; 0.7
- wartości własne A_2 : 0.8305; 0.4105; -0.0411 .
- wartości własne $S_2(1)$: 0.6699; $-0.1850 \pm j0.6431$
- wartości własne $S_1(1)$: 0.0; 0.7692; -0.5 .

Wszystkie obliczone wartości własne mają wartości bezwzględne mniejsze od 1, zatem proste warunki konieczne (18) oraz warunki (23) i (28) są spełnione.

Obliczając z kolei wartości własne macierzy $S_1(e^{j\omega})$ (21) oraz macierzy $S_2(e^{j\omega})$ (30) przy wartościach parametru ω zmieniających się od 0 do 2π z krokiem $\Delta\omega = 0.01\pi$ otrzymamy wykresy pokazane na rys. 1.



Rys. 1. Wartości własne: a) macierzy $S_1(e^{j\omega})$, b) macierzy $S_2(e^{j\omega})$

Z rys. 1 wynika, że warunki (24) i (29) twierdzeń 5 i 7 są spełnione, co oznacza, że rozpatrywany model jest asymptotycznie stabilny.

Zastosujemy teraz do badania asymptotycznej stabilności rozpatrywanego modelu warunki konieczne podane w twierdzeniu 3.

Łatwo sprawdzić, że warunki wystarczające (10) i (12) nie są spełnione, bowiem

$$\rho(|A_1|) = 0.7 < 1, \text{ ale } \rho(V_0) = 2.8361 > 1 \text{ oraz}$$

$$\rho(|A_2|) = 0.8305 < 1, \text{ ale } \rho(W_0) = 2.2289 > 1.$$

Na bazie twierdzenia 3 nic nie można powiedzieć o stabilności modelu (1) o macierzach (40).

Przykład 2. Należy wyznaczyć wartości współczynnika a_0 dla których jest asymptotycznie stabilny model (31) przy $a_1 = 0.8$ i $a_2 = -0.7$.

Łatwo zauważyć, że proste warunki konieczne (32) są spełnione.

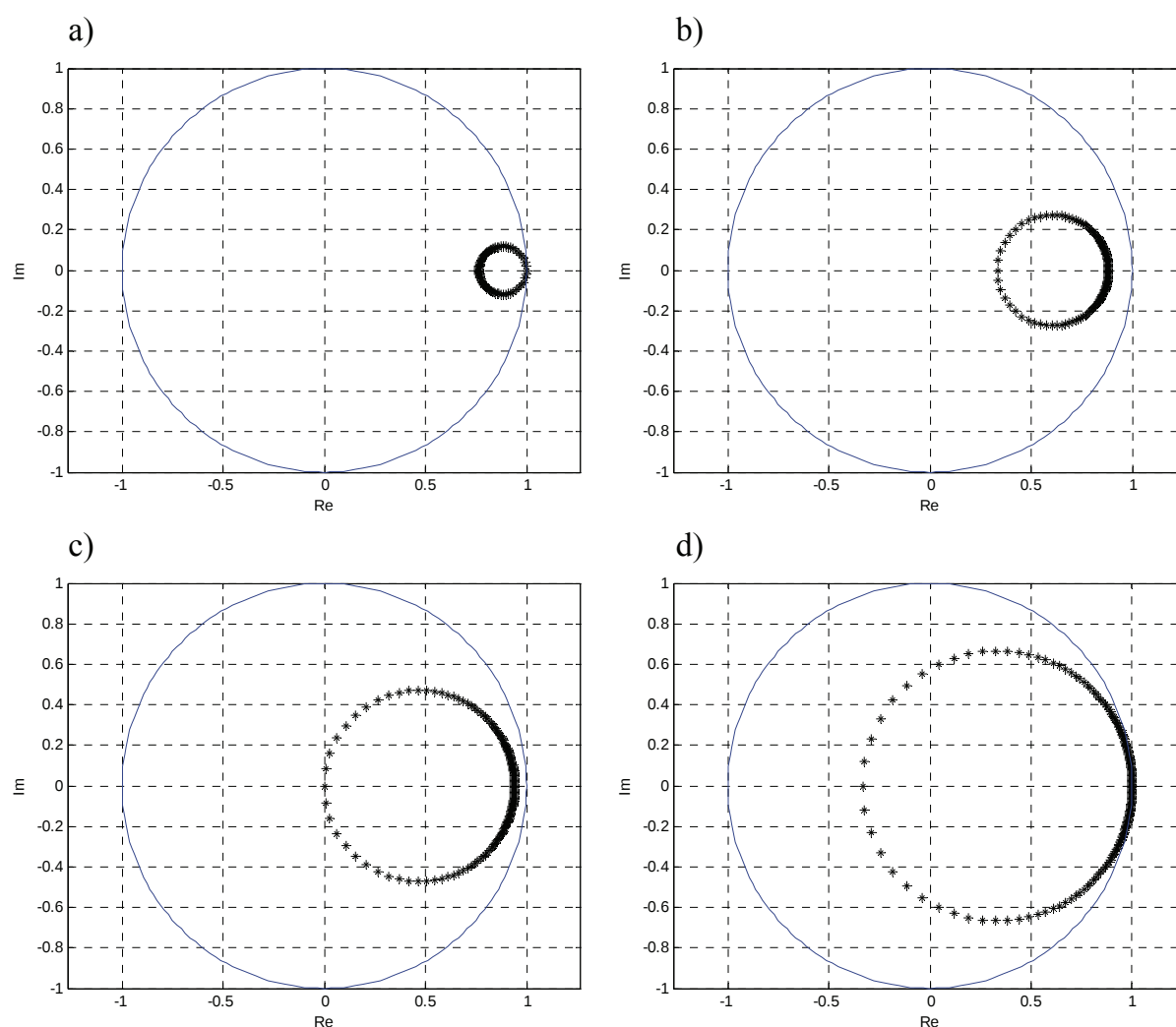
Obliczając wartości współczynnika a_0 dla których są spełnione nierówności (38a), (38b) i (38c) otrzymamy odpowiednio: $-0.5 < a_0 < 0.9$, $-2.5 < a_0 < 0$ i $0.5 < a_0 < 1.1$.

Warunek wspólny ma zatem postać

$$0.5 < a_0 < 0.9. \quad (41)$$

Z twierdzenia 8 wynika, że rozpatrywany skalarny model Fornasini-Marchesini układu 2D jest asymptotycznie stabilny dla wartości a_0 spełniających nierówność (41). Takie same wartości współczynnika a_0 otrzymamy na bazie twierdzenia 9.

Przyjmując $\tilde{a}_0 = 0$, $\tilde{b}_0 = 0$, $\tilde{d}_0 = 0$ i $a_0 = 0.9$ oraz obliczając wartości własne macierzy $S_1(e^{j\omega})$ (21) przy wartościach parametru ω zmieniających się od 0 do 2π z krokiem $\Delta\omega = 0.01\pi$ otrzymamy wykresy pokazane na rys. 2. Potwierdzą one rezultat otrzymany w drodze obliczeń analitycznych, że rozpatrywany model jest asymptotycznie stabilny dla wartości a_0 spełniających nierówność (41).



Rys. 2. Wartości własne macierzy $S_1(e^{j\omega})$, $\omega \in [0, 2\pi]$,

a) $a_0 = 0.5$, b) $a_0 = 0.7$, c) $a_0 = 0.8$, d) $a_0 = 0.9$

Zastosujmy teraz twierdzenie 3 do badania asymptotycznej stabilności rozpatrywanego modelu układu 2D.

Ze wzorów (11) i (13) dla $a_1 = 0.8$ i $a_2 = -0.7$ odpowiednio otrzymamy

$$V_0 = 0.7 + |a_0 - 0.56| + (1 - 0.8)^{-1} |0.8(a_0 - 0.56)| = 0.7 + 5|a_0 - 0.56|$$

$$W_0 = 0.8 + |a_0 - 0.56| + (1 - 0.7)^{-1} |-0.7(a_0 - 0.56)| = 0.8 + |a_0 - 0.56| \cdot 10/3.$$

Warunki $\rho(V_0) = V_0 < 1$ i $\rho(W_0) = W_0 < 1$ są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$0.5 < a_0 < 0.62. \quad (42)$$

Z twierdzenia 3 wynika zatem, że rozpatrywany model skalarny jest asymptotycznie stabilny, jeżeli jest spełniony warunek (42). Zauważmy, że przedział (42) jest znacznie mniejszy od przedziału (41) wyznaczonego na bazie zaproponowanej metody.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów 2D. Podano komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Fornasini-Marchesini w przypadku ogólnym (twierdzenia 5 i 7) oraz analityczne warunki asymptotycznej stabilności w przypadku układu skalarnego (twierdzenia 8 i 9). Metody te mogą być bezpośrednio wykorzystane do badania asymptotycznej stabilności modelu ogólnego układów 2D, np. [7, 8]. Mogą one też być uogólnione na klasę modeli Roessera oraz na modele niecałkowitych rzędów.

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Bistriz Y.: On an inviable approach for derivation of 2-D stability tests. IEEE Trans. Circuit Syst. II, vol. 52, no. 11, pp. 713–718, 2005.
2. Du C., Xie L.: Stability analysis and stabilization of uncertain two-dimensional discrete systems: an LMI approach. IEEE Trans. Circuit Syst., I 46, pp. 1371–1374, 1999.
3. Fornasini E, Marchesini G.: State-space realization theory of two-dimensional filters. IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-21, pp. 484–492, 1976.
4. Hu X., Jury E. I.: On two-dimensional filter stability test. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 41, no. 7, pp. 457–462, 1994.
5. Hu G. D., Liu M.: Simple criteria for stability of two-dimensional linear systems. IEEE Trans. Signal Processing, 53, pp. 4720–4723, 2005.
6. Huang T. S.: Stability of two-dimensional recursive filters. IEEE Trans. Audio Electroacoustics, vol. AU-20, pp. 158–163, 1972.
7. Kaczorek T.: Two-Dimensional Linear Systems. Springer, Berlin 1985.
8. Kaczorek T.: Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
9. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer, London 2002.
10. Kaczorek T.: Positive different orders fractional 2D linear systems. Acta Mechanica et Automatica, vol. 2, no. 2, pp. 51–58, 2008.
11. Kaczorek T.: Fractional 2D linear systems. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, vol. 2, no. 2, pp. 5–9, 2008.

12. Kaczorek T.: Positive 2D fractional linear system s. *International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, COMPEL*, vol. 28, no. 2, pp. 341–352, 2009.
13. Kaczorek T.: LMI approach to stability of 2D positive system s with delays. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 20, pp. 39–54, 2009.
14. Kaczorek T.: Asym ptotic stability of positive fractional 2D linear system s. *Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci.*, vol. 57, no. 3, pp. 289–292, 2009.
15. Kaczorek T.: Positivity and stabilization of 2D linear system s. *Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization*, no. 29, pp. 43–52, 2009.
16. Kaczorek T.: W ybrane zagadnienia teorii uk ładów nieca łkowitego rz ędu. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
17. Kaczorek T.: Practical stability of positive fractional 2D linear system s. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 21, pp. 231–238, 2010.
18. Kurek J.: Stability of positive 2D system s described by the Roesser m odel. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 49, no. 4, pp. 531–533, 2002.
19. Kar H., Sigh V.: Stability of 2-D system s described by the Fornasini–Marchesini first model. *IEEE Trans. Signal Processing*, 51, pp. 1675–1676, 2003.
20. Liu T.: Stability analysis of linear 2-D systems. *Signal Processing*, 88, pp. 2078–2084, 2008.
21. Lu W.-S.: On a Lyapunov approach to stability analysis of 2-D digital filters. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 45, pp. 665–669, 1994.
22. Maria G. A., Fahmy M. M.: On the stability of two-dimensional digital filters. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-21, no. 4, pp. 470–472, 1973.
23. Ooba T.: On stability analysis of 2-D systems based on 2-D Lyapunov matrix inequalities. *IEEE Trans. Circuit Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 47, pp. 1263–1265, 2000.
24. Siljak D. D.: Stability criteria for two-variable polynomials. *IEEE Trans. Circuit Syst.*, 22, pp. 185–189, 1975.
25. Strintzis M. G.: Test of stability of multidimensional filters. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-24, pp. 432–437, 1977.
26. Su Y., Bhaya A.: On the Bose-Trautman condition for stability of two-dimensional linear systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 46, pp. 2069–2070, 1998.
27. Twardy M.: An LMI approach to checking stability of 2D positive system s. *Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci.*, vol. 55, no. 4, pp. 385–395, 2007.
28. Xiao X., Unbehauen R.: New stability test algorithm for two-dimensional digital filters. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 45, no. 7, pp. 739–741, 1998.
29. Yang S.-F., Hwang C.: An improved stability test algorithm for two-dimensional digital filters. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 47, no. 7, pp. 1120–1123, 2000.