

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
 dr inż. Andrzej Ruszewski
 Politechnika Białostocka
 Wydział Elektryczny

BADANIE STABILNOŚCI LINIOWYCH UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH

Rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów ciągło-dyskretnych. Podano poprawioną komputerową metodę badania stabilności modelu typu Fornasini-Marchesini. Proponowana metoda może być wykorzystana do badania stabilności modeli innych typów liniowych układów ciągło-dyskretnych. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

STABILITY INVESTIGATION OF CONTINUOUS-DISCRETE LINEAR SYSTEMS

The problem of asymptotic stability of continuous-discrete linear systems is considered. Improved computer method for stability analysis of the Fornasini-Marchesini type model is given. The method proposed can be applied to stability analysis of the other type models of continuous-discrete linear systems. The considerations are illustrated by numerical examples.

1. WSTĘP

Układami ciągło-dyskretnymi (hybrydowymi) nazywamy takie układy dynamiczne, w modelu matematycznym, których jedna część zmiennych stanu jest z czasem ciągłym zaś druga część jest z czasem dyskretnym, przy czym nie da się je rozdzielić równań dynamiki opisujących część ciągłą oraz część dyskretną.

W niniejszej pracy rozpatrzmy problem badania stabilności liniowych układów ciągło-dyskretnych, których modele matematyczne mają strukturę podobną do modeli liniowych układów 2D. Takie modele były rozpatrywane w [13, 14] w przypadku układów dodatnich. Nowy model dodatniego układu ciągło-dyskretnego (hybrydowego) został wprowadzony w pracy [15] zaś w [16] rozpatrzono problem realizacji dodatnich układów ciągło-dyskretnych.

Problemowi badania stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów ciągło-dyskretnych są poświęcone prace [1, 4–9, 12, 17, 18–20] oraz [10, 11], odpowiednio. Niektóre z nich zawierają błędne rezultaty. Mianowicie, warunki stabilności podane w [4, 5] oraz odpornej stabilności podane w [10, 11] są tylko warunkami koniecznymi, a nie koniecznymi i wystarczającymi, co zostanie pokazane w niniejszej pracy. Ponadto, w [2] pokazano, że podany w [18] rezultat dotyczący stabilności układów ciągło-dyskretnych jest błędny. W pracach [19, 20] wykorzystano rezultaty pracy [18], a więc i one zawierają błędne rezultaty.

W niniejszej pracy zostanie podana poprawiona komputerowa metoda badania asymptotycznej stabilności modelu typu Fornasini-Marchesini liniowych układów ciągło-dyskretnych. Może ona być wykorzystana do badania asymptotycznej stabilności innych modeli takich układów.

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia: $\lambda_i\{X\}$ – i -ta wartość własna macierzy X , $\mathfrak{R}^{n \times m}$ – zbiór macierzy o wymiarach $n \times m$, przy czym $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n \times 1}$, Z_+ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych, $\mathfrak{R}_+ = [0, \infty]$.

2. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę model typu Fornasini-Marchesini układu ciągle-dyskretnego, którego równanie stanu ma postać

$$\dot{x}(t, i+1) = A_0 x(t, i) + A_1 \dot{x}(t, i) + A_2 x(t, i+1) + Bu(t, i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

gdzie $\dot{x}(t, i) = \partial x(t, i) / \partial t$, $x(t, i) \in \mathbb{R}^n$, $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ oraz $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Macierz charakterystyczna modelu (1) wyraża się wzorem

$$H(s, z) = szI_n - A_0 - sA_1 - zA_2 \quad (2)$$

zaś funkcja charakterystyczna tego modelu, którą oblicza się ze wzoru

$$w(s, z) = \det H(s, z) = \det[szI_n - A_0 - sA_1 - zA_2] \quad (3)$$

jest wielomianem dwóch zmiennych niezależnych s i z . Można ją napisać w ogólnej postaci

$$w(s, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} s^k z^j, \quad a_{nn} = 1. \quad (4)$$

Wielomiany charakterystyczne modeli innych typów układów ciągle-dyskretnych też można zapisać w postaci (4).

Twierdzenie 1 [1]. Model układu ciągle-dyskretnego o wielomianie charakterystycznym $w(s, z)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad |z| \geq 1. \quad (5)$$

Wielomian $w(s, z)$ dwóch zmiennych niezależnych spełniający warunek (5) będziemy nazywać wielomianem stabilnym w sensie Hurwitza-Schura albo krótko wielomianem Hurwitza-Schura.

Bezpośrednie sprawdzenie warunku (5) nie jest możliwe, ponieważ nie ma metod wyznaczania zer wielomianów wielu zmiennych. Warunek ten można sprawdzić pośrednio z wykorzystaniem m.in. obliczeń komputerowych.

Do podstawowych prac z zakresu stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu (4) należą: [1] oraz [12].

W pracy [1] podano algebraiczną, dosyć złożoną metodę badania stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianów dwóch zmiennych zespolonych. Jest to metoda będąca uogólnieniem na klasę wielomianów dwóch zmiennych algebraicznej metody badania stabilności układów dyskretnych 1D.

W pracy [12] podano kilka grup warunków równoważnych z (5). Zostały one sformułowane w drodze uogólnienia rezultatów pracy [17], w której rozpatrywano wielomian

$$w(s, z) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m a_{kj} s^k z^j, \quad (6)$$

będący przypadkiem szczególnym wielomianu (4).

Istotna różnica pomiędzy wielomianami (4) i (6) polega na tym, że wielomian (6) ma zawsze stały stopień (równy n) ze względu na zmienną s zaś w wielomianie (4) może nastąpić redukcja stopnia ze względu na zmienną s (dla pewnych wartości zmiennej z). Ta różnica powoduje, że warunki stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu (6) są tylko warunkami koniecznymi stabilności wielomianu (4).

W pracy [4], bazując na warunkach stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu (6) pokazano, że warunek (5) jest równoważny z warunkiem

$$w(s, e^{j\omega}) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, \forall \omega \in [0, \pi]. \quad (7)$$

Warunek (7) został następnie wykorzystany do badania stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu (4), co doprowadziło do błędnych rezultatów.

Jak wynika z pracy [12], w przypadku wielomianu (4) warunek (5) jest równoważny z dwoma poniższymi warunkami

$$w(s, z) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, |z|=1, \quad (8)$$

$$w(s, z) \neq 0, \operatorname{Re} s = 0, |z| \geq 1. \quad (9)$$

Warunki te można napisać w równoważnych postaciach [6]

$$w(s, e^{j\omega}) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0, \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad (10)$$

$$w(jy, z) \neq 0, |z| \geq 1, \forall y \in [0, \infty). \quad (11)$$

Z powyższego wynika, że warunek (7) jest tylko warunkiem koniecznym stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu (4).

W pracach [4, 5] oraz [10, 11], bazując na warunku (7) podano metody badania stabilności oraz odpornej stabilności, odpowiednio, modeli liniowych układów ciągło-dyskretnych. Metody te, jak to wynika z powyższych rozważań, bazują na warunkach tylko koniecznych asymptotycznej stabilności, a nie koniecznych i wystarczających.

Podane w [4] komputerowe metody badania stabilności modeli typu Fornasini-Marchesini oraz typu Roessera zostały skorygowane w pracy [6].

Celem niniejszej pracy jest skorygowanie rezultatów pracy [5] poprzez podanie poprawionej metody badania asymptotycznej stabilności modelu typu Fornasini-Marchesini liniowego układu ciągło-dyskretnego. Proponowana metoda bazuje na warunkach koniecznych i wystarczających (10), (11).

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Macierz charakterystyczną (2) można napisać w dwóch równoważnych postaciach

$$H(s, z) = [zI - A_1][sI - S_1(z)], \quad (12)$$

$$H(s, z) = [sI - A_2][zI - S_2(s)], \quad (13)$$

gdzie

$$S_1(z) = (zI - A_1)^{-1}(A_0 + zA_2), \quad (14)$$

$$S_2(s) = (sI - A_2)^{-1}(A_0 + sA_1). \quad (15)$$

Z (12) i (13) wynika, że wielomian charakterystyczny (3) można napisać w dwóch równoważnych postaciach

$$w(s, z) = \det[zI - A_1] \det[sI - S_1(z)], \quad (16)$$

$$w(s, z) = \det[sI - A_2] \det[zI - S_2(s)]. \quad (17)$$

Z powyższych wzorów i twierdzenia 1 wynika następujący lemat.

Lemat 1. Proste warunki konieczne asymptotycznej stabilności modelu (1) mają postaci:

$$|\lambda_i(A_1)| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda_i(A_2) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Spełnienie warunków (18) oznacza, że macierz A_1 jest stabilna w sensie Schur'a zaś macierz A_2 jest stabilna w sensie Hurwitza.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że warunki konieczne (18) są spełnione.

Ze wzorów (16) i (17) i warunków (10), (11) wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Model (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki konieczne (18) oraz dwa poniższe warunki

$$\operatorname{Re} \lambda_i \{S_1(e^{j\omega})\} < 0, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

$$|\lambda_i \{S_2(jy)\}| < 1, \quad \forall y \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

gdzie

$$S_1(e^{j\omega}) = (e^{j\omega}I - A_1)^{-1}(A_0 + e^{j\omega}A_2), \quad (21)$$

$$S_2(jy) = (jyI - A_2)^{-1}(A_0 + jyA_1). \quad (22)$$

Spełnienie warunku (19) oznacza, że linie wartości własnych macierzy (21), wyznaczone w funkcji parametru $\omega \in [0, 2\pi]$, leżą całkowicie w otwartej lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Spełnienie warunku (20) natomiast oznacza, że linie wartości własnych macierzy (22), wyznaczone w funkcji parametru $y \in [0, \infty)$, leżą całkowicie w otwartym kole jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Komputerowe metody sprawdzania warunków (19) i (20) dla modeli typu Fornasini-Marchesini oraz typu Roessera, bazujące na sprawdzaniu położenia linii wartości własnych macierzy (21) i (22), zostały podane w pracy [6].

Poniżej podany inną metodę sprawdzania warunków twierdzenia 2, która wymaga obliczania wartości odpowiednich wielomianów dla zadanych wartości zmiennych i dlatego jest prostsza w stosowaniu. W pracy [5] metoda ta została zastosowana do sprawdzania warunku (19).

Wprowadźmy oznaczenie

$$w_1(s, e^{j\omega}) = \det(sI - S_1(e^{j\omega})), \quad (23)$$

gdzie macierz $S_1(e^{j\omega})$ jest zdefiniowana wzorem (21).

Z kryterium stabilności Michajłowa (np. [3]) wynika, że warunek (19) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $\omega \in [0, 2\pi]$ wykres funkcji $w_1(jy, e^{j\omega})$ przy y zmieniającym się od 0 do nieskończoności (hodograf Michajłowa), nie trafiając w początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, o krąży go $n/2$ razy w kierunku matematycznie dodatnim, gdzie n jest stopniem wielomianu (23) ze względu na zmienną s .

Oznaczmy przez $w_{1o}(s)$ stabilny w sensie Hurwitza wielomian stopnia n , który będziemy traktować jako wielomian odniesienia dla wielomianu (23).

Ze zmodyfikowanego kryterium stabilności Michajłowa [3] wynika poniższy lemat.

Lemat 2. Warunek (19) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji

$$\phi_1(jy, e^{j\omega}) = \frac{w_1(jy, e^{j\omega})}{w_{1o}(jy)}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi], \quad (24)$$

nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego, przy czym $w_1(jy, e^{j\omega})$ ma postać (23) dla $s = jy$.

Dowód. Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ wykres funkcji $w_1(jy, e^{j\omega})$, sporządzony w funkcji parametru $y \in [0, \infty)$, obejmuje tyle samo razy początek płaszczyzny zmiennej zespolonej co wykres funkcji $w_{1o}(jy)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_{y \in [0, \infty)} \arg \phi_1(jy, e^{j\omega}) = 0. \quad (25)$$

Jeżeli zatem wielomian $w_{1o}(s)$ jest stabilny w sensie Hurwitza, to (25) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności w sensie Hurwitza wielomianu zespolonego (23) dla każdego $\omega \in \Omega$. ■

Za wielomian odniesienia $w_{1o}(s)$ możemy przyjąć np. wielomian

$$w_1(s, 1) = \det(sI - S_1(1)), \quad S_1(1) = (I - A_1)^{-1}(A_0 + A_2), \quad (26)$$

który otrzymuje się z wielomianu (23) podstawiając $\omega = 0$. Stabilność w sensie Hurwitza tego wielomianu jest warunkiem koniecznym stabilności w sensie Hurwitza wielomianu zespolonego (23) dla każdego $\omega \in \Omega$.

Jeżeli przyjmiemy $w_{1o}(s) = w_1(s, 1)$, to

$$\phi_1(jy, e^{j\omega}) = \frac{w_1(jy, e^{j\omega})}{w_1(jy, 1)}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi]. \quad (27)$$

Zauważmy, że dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji (27) jest linią krzywą zamkniętą. Rozpoczyna się ona przy $\omega = 0$ i kończy się przy $\omega = 2\pi$ w punkcie $\phi_1(jy, 1) = 1$. Łatwo sprawdzić, że jeżeli $y \rightarrow \infty$, to wykres (27) dąży do punktu $(1, j0)$.

Podamy teraz komputerową metodę sprawdzania warunku (20).

Wprowadźmy oznaczenie

$$w_2(jy, z) = \det(zI - S_2(jy)), \quad (28)$$

gdzie macierz $S_2(jy)$ jest zdefiniowana wzorem (22).

Oznaczmy przez $w_{2o}(z)$ stabilny w sensie Schura wielomian stopnia n , który będziemy traktować jako wielomian odniesienia dla wielomianu (28).

Postępując podobnie jak w przypadku warunku (19), otrzymamy następujący lemat.

Lemat 3. Warunek (20) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji

$$\phi_2(jy, e^{j\omega}) = \frac{w_2(jy, e^{j\omega})}{w_{2o}(e^{j\omega})}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi], \quad (29)$$

nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego, przy czym $w_2(jy, e^{j\omega})$ ma postać (28) dla $z = e^{j\omega}$.

Za wielomian odniesienia $w_{2o}(z)$ możemy przyjąć np. wielomian

$$w_2(0, z) = \det(zI - S_2(0)), \quad S_2(0) = (-A_2)^{-1} A_0, \quad (30)$$

który otrzymuje się z wielomianu (28) podstawiając $y = 0$. Stabilność w sensie Schura tego wielomianu jest warunkiem koniecznym stabilności w sensie Schura wielomianu zespolonego (28) dla każdego $y \geq 0$.

Jeżeli przyjmiemy $w_{2o}(z) = w_2(0, z)$, to dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji

$$\phi_2(jy, e^{j\omega}) = \frac{w_2(jy, e^{j\omega})}{w_2(0, e^{j\omega})}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi], \quad (31)$$

jest linią krzywa zamknięta. Rozpoczyna się ona przy $\omega = 0$ i kończy się przy $\omega = 2\pi$ w punkcie

$$\phi_2(jy, 1) = \frac{w_2(jy, 1)}{w_2(0, 1)} = \frac{\det(I - S_2(jy))}{\det(I - S_2(0))}. \quad (32)$$

Z twierdzenia 2 oraz lematów 2 i 3 wynika bezpośrednio poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3. Model (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki konieczne (18) i dwa poniższe warunki:

1. dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji (27), sporządzony dla $\omega \in \Omega = [0, 2\pi]$, nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego,
2. dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji (31), sporządzony dla $\omega \in \Omega = [0, 2\pi]$, nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego.

Przy komputerowym sprawdzaniu warunków twierdzenia 3 obliczenia należy przeprowadzić zgodnie z poniższą uwagą.

Uwaga 1. Należy przyjąć odpowiednio do przedziału $Y = [0, y_{kon}]$ wartości parametru $y \geq 0$. Dla każdego ustalonego $y \in Y$, wyznaczonego z odpowiednim małym krokiem Δy , sporządzamy oddzielnie wykresy funkcji (27) i (31). Dokonujemy w tym celu dyskretyzacji przedziału $\Omega = [0, 2\pi]$ z odpowiednim małym krokiem $\Delta\omega$ i dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ obliczamy wartości odpowiedniej funkcji. Wartość y_{kon} należy przyjąć odpowiednio do tego, taką aby na podstawie wyznaczonych wykresów stwierdzić spełnienie (lub niespełnienie) warunków 1. i 2. twierdzenia 3 dla wszystkich $y \geq 0$.

4. PRZYKŁADY

Przykład 1. Należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu (1) układu cią-gło-dyskretnego o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0.4 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 2 \\ 0 & -0.2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -0.3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Dla rozpatrywanego modelu warunek 1. twierdzenia 3 jest spełniony, co zostało pokazane w pracy [5]. Należy więc sprawdzić warunek 2. tego twierdzenia.

Sprawdzimy najpierw stabilność w sensie Schura wielomianu (30). Miejsca zerowe tego wielomianu są wartościami własnymi macierzy $S_2(0) = (-A_2)^{-1}A_0$.

Obliczając wartości własne macierzy $S_2(0)$ otrzymamy: $z_1 = -3.2909$; $z_2 = -0.2340$; $z_3 = 7.3582$. Ponieważ nie wszystkie wartości własne mają wartości bezwzględne mniejsze od 1, wielomian (30) nie jest stabilny w sensie Schura. Oznacza to, że nie jest spełniony warunek (20) dla $y = 0$. Z twierdzenia 2 wynika zatem, że rozpatrywany model nie jest asymptotycznie stabilny.

Obliczając wartości własne macierzy A_1 otrzymamy: $z_1 = -5$; $z_2 = 0.3411$; $z_3 = 7.5891$. Nie spełniają one pierwszego z warunków koniecznych (18), co potwierdza, że rozpatrywany model układu cią-gło-dyskretnego nie jest asymptotycznie stabilny.

Problem stabilności modelu (1) o macierzach (33) był rozpatrywany w pracy [5]. Pokazano w niej na bazie analizy wykresu funkcji (27), że warunek 1. twierdzenia 3 jest spełniony i na tej podstawie, bez analizy spełnienia warunku 2. tego twierdzenia błędnie stwierdzono, że rozpatrywany model jest asymptotycznie stabilny.

Przykład 2. Zbadać asymptotyczną stabilność modelu (1) układu cią-gło-dyskretnego o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.4 & -1.8 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Obliczając wartości własne macierzy A_1 oraz A_2 odpowiednio otrzymamy:

- wartości własne macierzy A_1 : $z_1 = -0.5$; $z_{2,3} = 0.15 \pm j0.2784$.
- wartości własne macierzy A_2 : $s_1 = -0.7$; $s_{2,3} = -0.4 \pm j0.4243$.

Łatwo zauważyć, że warunki konieczne (18) są spełnione.

Stabilność modelu sprawdzimy korzystając z twierdzenia 3. Zanim wyznaczymy wykresy funkcji (27) i (31), sprawdzimy stabilność wielomianów doniesienia.

Wielomian odniesienia (26), o postaci

$$w_1(s,1) = \det(sI - (I - A_1)^{-1}(A_0 + A_2)) \quad (35)$$

ma miejsca zerowe: $s_1 = -0.6996$; $s_{2,3} = -0.3760 \pm j0.3674$.

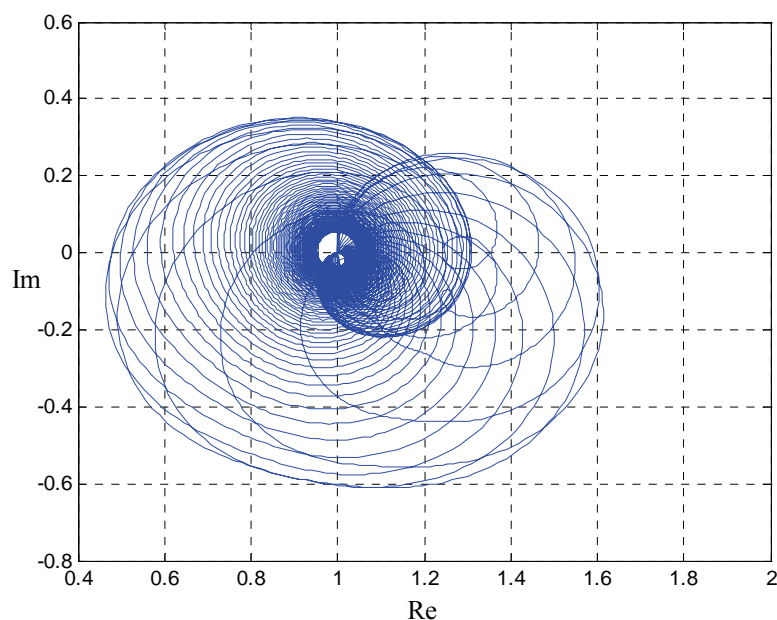
Natomiast wielomian odniesienia (30)

$$w_2(0, z) = \det(zI - (-A_2)^{-1} A_0) \quad (36)$$

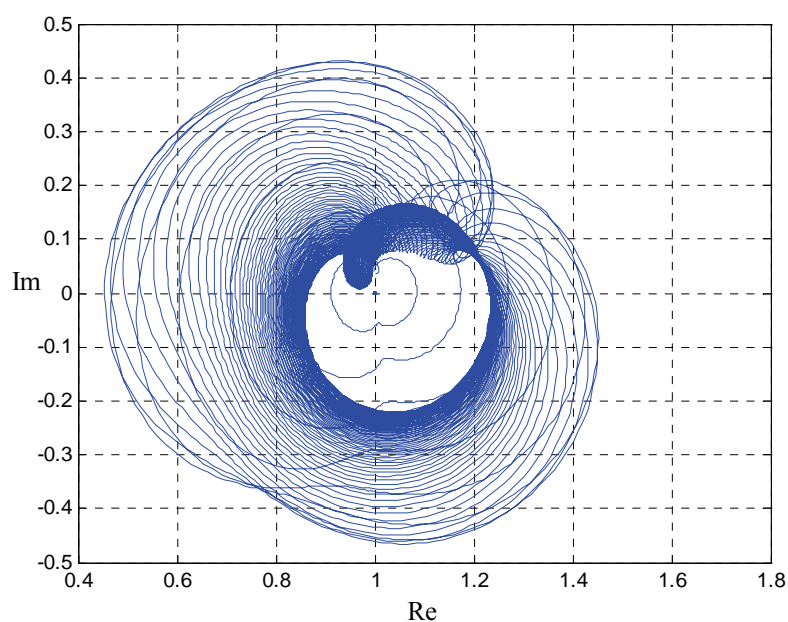
ma miejsca zerowe: $z_1 = 0.5458$; $z_{2,3} = -0.2309 \pm j0.1977$.

Z powyższego wynika, że wielomian (35) jest stabilny w sensie Hurwitza zaś wielomian (36) jest stabilny w sensie Schura.

Wyznaczając, z uwzględnieniem uwagi 1, wykresy funkcji (27) i (31) przy wielomianach odniesienia (35) i (36), odpowiednio, otrzymamy przebiegi pokazane na rys. 1 i 2.



Rys. 1. Wykresy funkcji (27) dla $y \in Y = [0, 10]$



Rys. 2. Wykresy funkcji (31) dla $y \in Y = [0, 10]$

Pokazane na rys. 1 i 2 wykresy zostały sporządzone dla wartości parametru $y \in Y = [0, y_{kon}] = [0, 10]$ zmieniającego z krokiem $\Delta y = 0.1$. Dla każdego ustalonego $y \in Y$ przyjmowano dyskretyzację przedziału $\Omega = [0, 2\pi]$ z krokiem $\Delta\omega = 0.01\pi$.

Wykresy te nie obejmują początku układu w spólrzędnych dla rozpatrywanego przedziału wartości parametru y . Łatwo sprawdzić, że powyższe zachodzi też dla wszystkich $y > y_{kon} = 10$. Warunki twierdzenia 3 są zatem spełnione i rozpatrywany model jest asymptotycznie stabilny.

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy skorygowano podany w [5] rezultat dotyczący badania asymptotycznej stabilności modelu typu Fornasini-Marchesini (1) układu ciągle-dyskretnego. Pokazano, że główny rezultat pracy [5] bazuje na warunkach koniecznych, a nie na koniecznych i wystarczających asymptotycznej stabilności modeli liniowych układów ciągle-dyskretnych.

Podano proste warunki konieczne (lemmat 1) oraz konieczne i wystarczające (twierdzenie 2) asymptotycznej stabilności modelu typu Fornasini-Marchesini (1) oraz komputerowe metody sprawdzania warunków tego twierdzenia (lemmaty 2 i 3 oraz twierdzenie 3). Metody te bazują na zmodyfikowanym kryterium stabilności Michajłowa [3].

Proponowane metody mogą być wykorzystane do badania asymptotycznej stabilności innych modeli układów ciągle-dyskretnych, takich jak model typu Roessera oraz model ogólny.

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

5. BIBLIOGRAFIA

1. Bistriz Y.: A stability test for continuous-discrete bivariate polynomials, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 3, pp. III682–685, 2003.
2. Bistriz Y.: On an inviable approach for derivation of 2-D stability tests. IEEE Trans. Circuit Syst. II, vol. 52, no. 11, pp. 713–718, 2005.
3. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.
4. Busłowicz M.: Stabilność modeli liniowych układów ciągle-dyskretnych, Pomiar Automatyka Robotyka, nr 2/2009, str. 425–434 (CD-ROM).
5. Busłowicz M.: Komputerowe metody badania stabilności modeli ogólnych liniowych układów ciągle-dyskretnych, Pomiar Automatyka Robotyka, nr 2/2010, str. 396–405 (CD-ROM).
6. Busłowicz M.: Computational methods for investigation of stability of models of 2D continuous-discrete linear systems, Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems (in press).
7. Busłowicz M.: Stability and robust stability conditions for a general model of scalar continuous-discrete linear systems, Pomiar Automatyka Kontrola, vol. 56, nr 2, str. 133–135, 2010.
8. Busłowicz M.: Improved stability and robust stability conditions for a general model of scalar continuous-discrete linear systems, Pomiar Automatyka Kontrola, praca zgłoszona do publikacji.

9. Busłowicz M.: Robust stability of the new general 2D model of a class of continuous-discrete linear systems, *Bull. Pol. Ac.: Tech.*, vol. 57, no. 4, 2010 (in press).
10. Busłowicz M., Sokólski M.: Odporna stabilność układow ci ągło-dyskretnych o f unkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego param etru, *Pomiary Automatyka Robotyka*, nr 2/2009, str. 435–444 (CD-ROM).
11. Busłowicz M., Sokólski M.: Odporna stabilność układow ci ągło-dyskretnych o f unkcji charakterystycznej zależnej liniowo od niepewnych param etrów, *Pomiary Automatyka Robotyka*, nr 2/2010, str. 416–425 (CD-ROM).
12. Guiver J. P., Bose N. K.: On test for zero-sets of multivariate polynomials in noncompact polydomains. *Proc. of the IEEE*, vol. 69, no. 4, 467-496, 1981.
13. Kaczorek T.: *Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
14. Kaczorek T.: *Positive 1D and 2D Systems*, Springer-Verlag, London 2002.
15. Kaczorek T.: Positive 2D hybrid linear systems, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, Vol. 55, No. 4, pp. 351–358, 2007.
16. Kaczorek T.: Realization problem for positive 2D hybrid systems, *COMPEL*, vol. 27, no. 3, pp. 613–623, 2008.
17. Kamen E. W.: On the relationship between zero criteria for two-variable polynomials and asymptotic stability of delay differential equations. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. AC-25, no. 5, 983–984, 1980.
18. Xiao Y.: Stability test for 2-D continuous-discrete systems, *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, vol. 4, pp. 3649–3654, 2001.
19. Xiao Y.: Robust Hurwitz-Schur stability conditions of polytopes of 2-D polynomials, *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, vol. 4, pp. 3643–3648, 2001.
20. Xiao Y.: Stability, controllability and observability of 2-D continuous-discrete systems, *Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems*, vol. 4, pp. IV468–IV471, 2003.