

Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
Mgr inż. Tomasz Kalinowski
Studium Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB

ODPORNĄ STABILNOŚĆ CIĄGLYCH UKŁADÓW UŁAMKOWEGO RZĘDU WSPÓŁMIERNEGO O FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNEJ ZALEŻNEJ LINIOWO OD NIEPEWNYCH PARAMETRÓW

Rozpatrzono problem odpornej stabilności liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego, którego funkcja charakterystyczna zależy liniowo od niepewnych parametrów. Pokazano, że do badania odpornej stabilności takich układów można stosować twierdzenie krawędziowe, znane z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych naturalnego stopnia. Podano komputerową metodę służącą do sprawdzania warunków tego twierdzenia. Rozważania zilustrowano przykładem.

ROBUST STABILITY OF CONTINUOUS-TIME FRACTIONAL SYSTEMS OF COMMENSURATE ORDER WITH CHARACTERISTIC FUNCTION LINEARLY DEPENDENT ON UNCERTAIN PARAMETERS

The problem of robust stability of linear continuous-time fractional order systems of commensurate order with characteristic polynomial linearly dependent on uncertain parameters is considered. It is shown that the Edge Theorem known from the theory of robust stability of families of natural degree characteristic polynomials can be used to robust stability analysis of the systems. Computer method for checking of the conditions of this theorem is given. The considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

W ostatnich latach teoria analizy i syntezy liniowych układów ułamkowego rzędu jest intensywnie rozwijana w literaturze światowej, patrz np. monografie [12, 17, 21-22] i cytowaną tam literaturę. Problem badania stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów ułamkowych był rozpatrywany w pracach [7-11, 13-15, 23]. Nowa klasa układów ułamkowych, a mianowicie dodatnie układy ułamkowego rzędu, była rozpatrywana w [18-20].

W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem badania odpornej stabilności liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego, którego funkcja charakterystyczna (będąca wielomianem ułamkowego stopnia współmiernego) zależy liniowo od niepewnych parametrów. Problem ten w przypadku układów o wielomianach charakterystycznych naturalnego stopnia był tematem wielu publikacji (patrz np. [3] oraz monografie [1, 2, 4-6]). Według wiedzy autorów wyżej wymieniony problem w przypadku wielomianów charakterystycznych stopnia ułamkowego nie był dotychczas rozpatrywany w literaturze.

W pracy zostanie pokazane, że do badania odpornej stabilności rozpatrywanych układów ułamkowych o niepewnych parametrach można stosować tzw. twierdzenie krawędziowe (znane z teorii odpornej stabilności układów o wielomianach charakterystycznych stopnia naturalnego) oraz zostaną podane częstotliwościowe metody służące do sprawdzania warunków tego twierdzenia.

2. WPROWADZENIE

Weźmy pod uwagę liniowy układ dynamiczny ułamkowego rzędu współmiernego, którego wielomian charakterystyczny o rzeczywistych współczynnikach ma postać

$$w(s) = a_n s^{\alpha n} + a_{n-1} s^{\alpha(n-1)} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0, \quad (1)$$

przy czym $\alpha \in (0, 1]$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Podstawiając $\lambda = s^\alpha$ w (1) otrzymamy wielomian naturalnego stopnia stowarzyszony z wielomianem ułamkowym (1), o postaci

$$\tilde{w}(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \quad (2)$$

Uwzględniając rezultaty literaturowe (omówione np. w [8]) warunek stabilności rozpatrywanego układu możemy sformułować w postaci jak niżej.

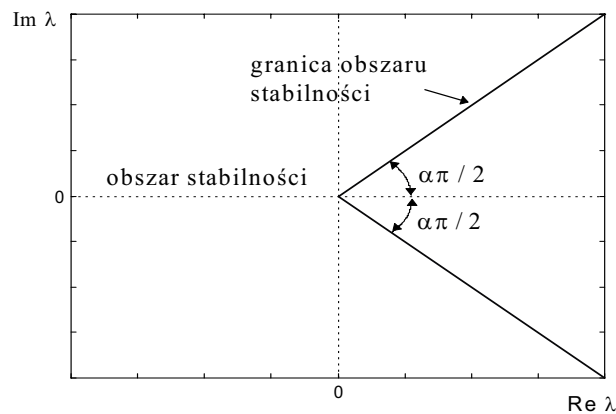
Twierdzenie 1. Ułamkowy układ dynamiczny, którego wielomian charakterystyczny ma postać (1) jest stabilny (w sensie ograniczone wejście – ograniczone wyjście) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zera wielomianu (1) mają ujemne części rzeczywiste, tzn.

$$w(s) \neq 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (3)$$

lub równoważnie, gdy wszystkie zera λ stowarzyszonego wielomianu (2) spełniają warunek

$$|\arg \lambda| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

czyli leżą w otwartym obszarze stabilności pokazanym na rys. 1 przy $\alpha \in (0, 1]$.



Rys. 1. Obszar stabilności na płaszczyźnie zespolonej $\lambda = s^\alpha$ przy $0 < \alpha \leq 1$

Wielomian (1) spełniający warunek (3) będziemy nazywać stabilnym wielomianem ułamkowym. Natomiast stowarzyszony wielomian naturalnego stopnia (2), którego zera spełniają warunek (4), będziemy nazywać wielomianem D-stabilnym, przy czym D jest obszarem stabilności pokazany na rys. 1. Jego brzegiem jest linia łamana o opisie parametrycznym

$$(j\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha e^{j\alpha\pi/2}, \quad \omega \in (-\infty, \infty). \quad (5)$$

Jeżeli $\alpha = 1$, to (5) staje się opisem parametrycznym osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej, czyli obszar D przy $\alpha = 1$ redukuje się do otwartej lewej półpłaszczyzny.

Twierdzenie 2 [8]. Wielomian ułamkowy (1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy przy ω zmieniającym się od $-\infty$ do ∞ wykres funkcji $\psi(j\omega)$ nie okrąży początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego, gdzie

$$\psi(s) = \frac{w(s)}{w_{od}(s)}, \quad (6)$$

przy czym $w(s)$ ma postać (1) zaś $w_{od}(s)$ jest stabilnym wielomianem odniesienia ułamkowego stopnia równego stopniowi wielomianu (1).

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy liniowy układ dynamiczny ułamkowego rzędu współmiernego, którego wielomian charakterystyczny o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów ma postać

$$w(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^{i\alpha}, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (7)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ jest wektorem odchyłek q_k ($k = 1, 2, \dots, m$) niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych, m jest liczbą niepewnych parametrów,

$$a_i(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^m q_k a_{ik} + a_{i0}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (8)$$

są to liniowe ciągłe funkcje swoich argumentów (a_{ik} są to znane współczynniki), zaś

$$Q = \{\mathbf{q}: q_k \in [b_k, c_k], b_k \leq 0, c_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\} \quad (9)$$

jest zbiorem wartości odchyłek niepewnych parametrów od ich wartości nominalnych.

Będziemy zakładać, że wielomian (7) jest stałego stopnia (tj. $\forall \mathbf{q} \in Q$ ma on stopień $n\alpha$) i nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że $a_n(\mathbf{q}) > 0$ dla każdego $\mathbf{q} \in Q$.

Wielomian (7) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów można napisać w postaci

$$w(s, \mathbf{q}) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + \dots + q_m w_m(s), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (10)$$

gdzie

$$w_k(s) = \sum_{i=0}^n a_{ik} s^{i\alpha}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (11)$$

są to znane wielomiany, przy czym $w_0(s) = w(s, 0)$ jest stabilnym wielomianem nominalnym stopnia $n\alpha$.

Na podstawie teorii odpornej stabilności ciągłych układów dynamicznych naturalnego rzędu o niepewnych parametrach możemy sformułować następującą definicję oraz twierdzenie.

Definicja 1. Ułamkowy układ dynamiczny o wielomianie charakterystycznym (7) nazywamy odporne stabilnym, jeżeli jest on stabilny dla każdej ustalonej wartości $\mathbf{q} \in Q$.

Twierdzenie 3. Ułamkowy układ dynamiczny, którego wielomian charakterystyczny ma postać (7) jest odporne stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego wielomian charakterystyczny (7) ułamkowego stopnia jest stabilny dla każdego $\mathbf{q} \in Q$, tzn. jest spełniony warunek

$$w(s, \mathbf{q}) \neq 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0, \mathbf{q} \in Q. \quad (12)$$

Zadanie badania odpornej stabilności układu ułamkowego o wielomianie charakterystycznym (7) jest równoważne z problemem badania odpornej stabilności rodziny wielomianów

$$W(s, \mathbf{q}) = \{w(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (13)$$

przy czym wielomian ułamkowy $w(s, \mathbf{q})$ ma postać (7) lub równoważną postać (10).

Celem pracy jest podanie komputerowych metod badania odpornej stabilności układu ułamkowego o wielomianie charakterystycznym (7). Ponieważ odporna stabilność tego układu jest równoważna z odporną stabilnością rodziny wielomianów (13), podane metody będą bezpośrednio dotyczyły ułamkowej rodziny wielomianów (13) o liniowej strukturze niepewności.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Podstawiając $\lambda = s^\alpha$ w wielomianie (7) otrzymamy stowarzyszoną rodzinę wielomianów naturalnego stopnia

$$\tilde{W}(\lambda, Q) = \{\tilde{w}(\lambda, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, \quad (14)$$

gdzie

$$\tilde{w}(\lambda, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) \lambda^i, \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (15)$$

przy czym współczynniki $a_i(\mathbf{q})$ o postaci (8) zależą liniowo od niepewnych parametrów.

Wielomian (15) naturalnego stopnia będziemy nazywać wielomianem stowarzyszonym z wielomianem ułamkowym (8).

Definicja 2. Rodzinę wielomianów (14) naturalnego stopnia nazywamy odpornie D-stabilną, jeżeli dla każdego ustalonego $\mathbf{q} \in Q$ wszystkie zera wielomianu (15) spełniają warunek (4), tzn. leżą w otwartym obszarze D pokazanym na rys. 1, którego brzeg ma opis parametryczny (5).

Z definicji 2 i twierdzenia 1 wynika bezpośrednio następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Rodzina wielomianów (13) ułamkowego stopnia jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy stowarzyszona rodzina wielomianów (14) naturalnego stopnia jest odpornie D-stabilna.

Metody badania odpornej stabilności i odpornej D-stabilności (przy odpowiednio zdefiniowanych obszarach D) rodziny wielomianów (14) naturalnego stopnia zostały szczegółowo przedstawione w monografii [6]. Są to metody częstotliwościowe bazujące na tzw. warunku wykluczenia zera. W teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych naturalnego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów fundamentalne znaczenie ma twierdzenie sformułowane i udowodnione w pracy [3], które później zostało nazwane twierdzeniem krawędziowym (ang. Edge Theorem). Twierdzenie to jest podane np. w monografiach [1, 2, 4–6]. Polska nazwa „twierdzenie krawędziowe” została zaproponowana w pracy [6].

Z twierdzenia 4 wynika, że do badania odpornej stabilności rodziny (13) wielomianów ułamkowego stopnia można stosować te same metody, które stosuje się do badania odpornej D-stabilności rodziny wielomianów (14) naturalnego stopnia. Można zatem stosować twierdzenie krawędziowe.

Zanim sformułujemy twierdzenie krawędziowe, najpierw podamy (uwzględniając pracę [6]) niezbędne wprowadzenie.

Zbiór Q zdefiniowany wzorem (9) jest m -wymiarowym prostopadłościem. Ma on $K = 2^m$ wierzchołków i $L = m2^{m-1}$ krawędzi. Oznaczmy przez $\mathbf{q}_k = [q_1^k, q_2^k, \dots, q_m^k]^T$, gdzie $q_i^k = b_i$ lub $q_i^k = c_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, k -ty wierzchołek zbioru Q . Każdemu wierzchołkowi \mathbf{q}_k , $k = 1, 2, \dots, K$, zbioru Q odpowiada w zbiorze wielomianów (7) tzw. wielomian wierzchołkowy

$$p_k(s) = w(s, \mathbf{q}_k) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}_k) s^i. \quad (16)$$

Każdej krawędzi

$$\mathbf{q}_{rk}(\beta) = (1 - \beta)\mathbf{q}_r + \beta\mathbf{q}_k, \quad \beta \in [0, 1], \quad (17)$$

zbioru Q , będącej odcinkiem linii prostej łączącym wierzchołki \mathbf{q}_r i \mathbf{q}_k , w zbiorze wielomianów (7) odpowiada tzw. wielomian krawędziowy o postaci

$$p_{rk}(s, \beta) = (1 - \beta)p_r(s) + \beta p_k(s), \quad \beta \in [0, 1], \quad (18)$$

gdzie $p_r(s)$ i $p_k(s)$ są to wielomiany wierzchołkowe (16), odpowiadające wierzchołkom \mathbf{q}_r i \mathbf{q}_k zbioru Q , odpowiednio.

Uwzględniając teorię odpornej stabilności rodziny wielomianów naturalnego stopnia o współczynnikach zależnych liniowo od niepewnych parametrów oraz twierdzenie 4 możemy sformułować poniższe twierdzenie, będące uogólnieniem twierdzenia krawędziowego na klasę rozpatrywanych układów ułamkowych o niepewnych parametrach.

Twierdzenie 5 (twierdzenie krawędziowe). Niech wielomian nominalny $w_0(s)$ rodziny wielomianów (13) będzie stabilny. Rodzina (13) wielomianów ułamkowych stałego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odporne stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są odporne stabilne wszystkie jej wielomiany krawędziowe $p_{rk}(s, \beta)$, odpowiadające poszczególnym krawędziom zbioru Q .

Twierdzenie krawędziowe 5 sprowadza zadanie badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (13) do badania odpornej stabilności skończonej liczby wielomianów krawędziowych, których jest $L = m2^{m-1}$. Zauważmy, że każdy wielomian krawędziowy (18) jest wypukłą kombinacją odpowiednich dwóch wielomianów wierzchołkowych.

Metody badania odpornej stabilności wielomianów krawędziowych są podane w pracy [6] w przypadku wielomianów naturalnego stopnia. Natomiast dogodna do obliczeń komputerowych metoda badania odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów stopnia ułamkowego jest podana w pracy [11]. Na bazie tej pracy można sformułować poniższe twierdzenie oraz lemat.

Weźmy pod uwagę wielomian krawędziowy $p_{rk}(s, \beta)$, $\beta \in [0, 1]$, o postaci (18) i założmy, że wielomian wierzchołkowy $p_r(s)$ jest stabilny.

Twierdzenie 6. Niech wielomian wierzchołkowy $p_r(s)$ będzie stabilny. Wielomian krawędziowy (18) jest odporne stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

$$\vartheta_{rk}(j\omega) = p_k(j\omega) / p_r(j\omega), \quad \omega \in \Omega = (-\infty, \infty), \quad (19)$$

nie przecina półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Sprawdzając warunek (19) można ograniczyć się do przedziału $\Omega = [0, \infty)$.

Łatwo zauważyć, że na płaszczyźnie zmiennej zespolonej wykres funkcji (19) rozpoczyna się (przy $\omega = -\infty$) i kończy (przy $\omega = +\infty$) w punkcie $\mathfrak{G}_{rk}(\pm j\infty)$, przy czym przy $\omega = 0$ przechodzi on przez punkt $\mathfrak{G}_{pr}(0)$, gdzie

$$\mathfrak{G}_{rk}(0) = \frac{p_k(0)}{p_r(0)} = \frac{a_0(\mathbf{q}_k)}{a_0(\mathbf{q}_r)}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{G}_{rk}(j\omega) = \frac{a_n(\mathbf{q}_k)}{a_n(\mathbf{q}_r)}, \quad (20)$$

przy czym współczynniki występujące w licznikach i mianownikach wzorów (20) oblicza się ze wzoru (8) dla $\mathbf{q} = \mathbf{q}_k$ oraz $\mathbf{q} = \mathbf{q}_r$ odpowiednio.

Lemat 1. Niech wielomian wierzchołkowy $p_r(s)$ będzie stabilny. Wielomian krawędziowy (18) nie jest odpornie stabilny, jeżeli

$$\frac{a_0(\mathbf{q}_k)}{a_0(\mathbf{q}_r)} \leq 0 \quad \text{lub} \quad \frac{a_n(\mathbf{q}_k)}{a_n(\mathbf{q}_r)} \leq 0. \quad (21)$$

Z twierdzenia krawędziowego 5 i z twierdzenia 6 wynika poniższy lemat.

Lemat 2. Rodzina (13) wielomianów ułamkowych stałego stopnia o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odpornie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- 1) wszystkie wielomiany wierzchołkowe $p_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, K = 2^m$ są stabilne,
- 2) każdy z $L = m2^{m-1}$ wykresów funkcji $\mathfrak{G}_{rk}(j\omega) = p_k(j\omega) / p_r(j\omega)$, $\omega \in \Omega = (-\infty, \infty)$, sporządzonych oddzielnie dla każdego wielomianu krawędziowego (18), nie przecina półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Z powyższych rozważań wynika następujący algorytm postępowania przy badaniu odpornej stabilności rodziny (13) wielomianów ułamkowych.

Algorytm postępowania:

Krok 1. Wyznaczamy wszystkie wierzchołki \mathbf{q}_k , $k = 1, 2, \dots, K = 2^m$, zbioru \mathcal{Q} i pary tych wierzchołków $(\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_k)$, $r, k = 1, 2, \dots, K$ ($r \neq k$), tworzących krawędzie zbioru \mathcal{Q} .

Krok 2. Wyznaczamy wielomiany wierzchołkowe $p_k(s) = w(s, \mathbf{q}_k)$ (16) odpowiadające poszczególnym wierzchołkom \mathbf{q}_k , $k = 1, 2, \dots, K = 2^m$, zbioru \mathcal{Q} oraz pary tych wielomianów tworzące wielomiany krawędziowe $p_{rk}(s, \beta)$ (18).

Krok 3. Stosując twierdzenie 2 sprawdzamy stabilność jednego z wielomianów wierzchołkowych, np. $p_1(s) = w(s, \mathbf{q}_1)$ odpowiadający pierwszemu (dowolnie wybranemu) wierzchołkowi zbioru \mathcal{Q} . Jeżeli nie jest on stabilny, to rodzina wielomianów (13) nie jest odpornie stabilna. Jeżeli jest on stabilny, to przechodzimy do następnego kroku.

Krok 4. Stosując twierdzenie 6 badamy odporną stabilność wielomianu krawędziowego $p_{rk}(s, \beta)$ przy $r = 1$ i dowolnym k , przy czym $\mathbf{q}_{1k}(\beta)$ jest krawędzią zbioru \mathcal{Q} , a następnie badamy odporną stabilność wszystkich pozostałych wielomianów krawędziowych poczynając od $p_{k, k+1}(s, \beta)$. Należy przy tym pamiętać, aby przed badaniem stabilności wielomianu krawędziowego $p_{rk}(s, \beta)$ mieć zbadaną stabilność wielomianu krawędziowego $p_{ir}(s, \beta)$, $i \neq r$. Jeżeli jest on odpornie stabilny, to jest też stabilny wielomian wierzchołkowy $p_r(s)$. Jeżeli przynajmniej jeden z wielomianów krawędziowych nie jest odpornie stabilny, to rodzina wielomianów (13) nie jest odpornie stabilna. W przypadku przeciwnym rodzina (13) jest odpornie stabilna, zgodnie z twierdzeniem krawędziowym 5.

5. PRZYKŁAD

Weźmy pod uwagę analizowany w pracach [24, 17, 10] układ regulacji automatycznej złożony z ułamkowego obiektu o transmitancji

$$G_0(s) = \frac{1}{0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1} = \frac{1}{M_0(s)} \quad (22)$$

i szeregowego ułamkowego regulatora PD o transmitancji

$$C(s) = 20.5 + 3.7343s^{1.15}, \quad (23)$$

objętych pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego.

Wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji ma postać

$$w_0(s) = M_0(s) + C(s) = 0.8s^{2.2} + 3.7343s^{1.15} + 0.5s^{0.9} + 21.5. \quad (24)$$

Stosując podstawienie $\alpha = 1/20$ i $\lambda = s^\alpha = s^{1/20}$ w (24) otrzymamy stowarzyszony wielomian naturalnego stopnia

$$\tilde{w}_0(\lambda) = 0.8\lambda^{44} + 3.7343\lambda^{23} + 0.5\lambda^{18} + 21.5. \quad (25)$$

Przyjmijmy, że mianownik transmitancji (22) nie jest dokładnie znany, przy czym

$$M_0(s, \mathbf{q}) = M_0(s) + q_1 w_1(s) + q_2 w_2(s), \quad (26)$$

gdzie

$$w_1(s) = 0.1s^{2.2} + 0.25, \quad w_2(s) = 0.2s^{0.9} + 0.1, \quad (27)$$

$$Q = \{\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T : q_1 \in [-0.5, 1], q_2 \in [-0.4, 1]\}. \quad (28)$$

Należy zadać odporną stabilność rozpatrywanego układu regulacji w przypadku, gdy transmitancja (22) obiektu nie jest dokładnie znana, przy czym jej mianownik zależy liniowo od niepewnych parametrów i ma postać (26).

Postawiony problem jest równoważny z badaniem odpornej stabilności rodziny wielomianów charakterystycznych

$$w(s, \mathbf{q}) = M_0(s, \mathbf{q}) + C(s) = w_0(s) + q_1 w_1(s) + q_2 w_2(s), \quad \mathbf{q} \in Q, \quad (29)$$

przy czym wielomian $w_0(s)$ oraz wielomiany $w_1(s)$ i $w_2(s)$ mają postaci (24) i (27), odpowiednio zaś zbiór Q jest zdefiniowany zależnością (28).

Do badania odpornej stabilności rodziny wielomianów (29) zastosujemy podany powyżej algorytm postępowania.

Krok 1. Zbiór (28) jest prostokątem na płaszczyźnie (q_1, q_2) o wierzchołkach

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.4 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Krawędzie zbioru (28) tworzą pary wierzchołków o indeksach (1,3), (3,2), (2,4) i (1,4).

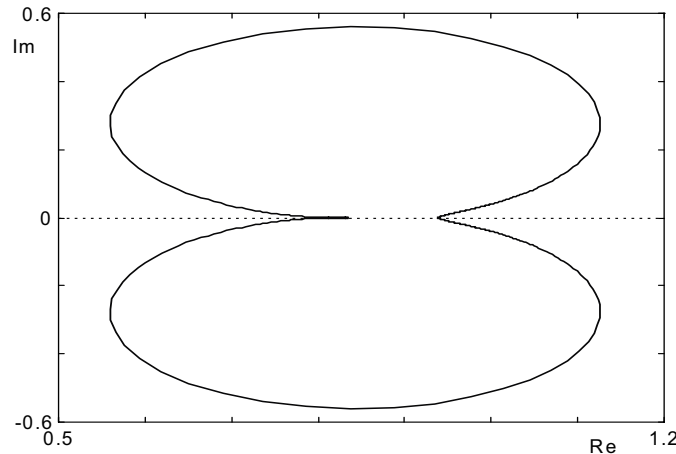
Krok 2. Wielomiany wierzchołkowe odpowiadające poszczególnym wierzchołkom (30) zbioru (28) wyznacza się ze wzorów

$$\begin{aligned} p_1(s) &= w_0(s) - 0.5w_1(s) - 0.4w_2(s), & p_2(s) &= w_0(s) + w_1(s) + w_2(s), \\ p_3(s) &= w_0(s) - 0.5w_1(s) + w_2(s), & p_4(s) &= w_0(s) + w_1(s) - 0.4w_2(s). \end{aligned}$$

Wielomianami krawędziowymi są wielomian $p_{rk}(s, \beta)$ o postaci (18), przy czym $(r, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4)$ i $(1, 4)$.

Krok 3. Stosując twierdzenie 2 sprawdzamy stabilność wielomianu wierzchołkowego $p_1(s)$. Za wielomian odniesienia $w_{od}(s)$ przyjmujemy wielomian $w_0(s)$ o postaci (24). Jest on stabilny [10].

Wykres funkcji $\psi(j\omega)$, przy czym $\psi(s) = p_1(s) / w_0(s)$, jest pokazany na rys. 2. Z rys. 2 wynika, że nie obejmuje on początku układu współrzędnych. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 2, że wielomian $p_1(s)$ jest stabilny.



Rys. 2. Wykres funkcji $\psi(s) = p_1(s) / w_0(s)$ przy $s = j\omega$, $\omega \in [-20, 20]$

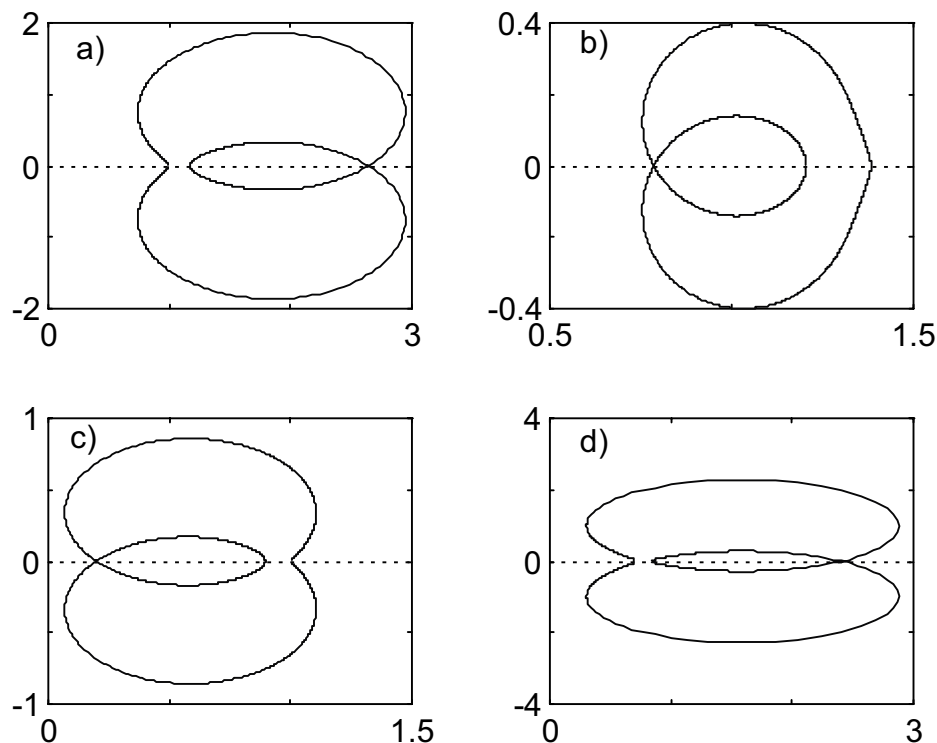
Krok 4. Wyznaczając wykresy funkcji $\mathfrak{S}_{rk}(j\omega) = p_k(j\omega) / p_r(j\omega)$ dla $\omega \in [-20, 20]$ i $(r, k) = (1, 3), (3, 2), (2, 4)$ i $(1, 4)$ otrzymamy przebiegi pokazane na rys. 2.

Żaden z wykresów pokazanych na rys. 3 nie obejmuje początku układu współrzędnych. Z twierdzenia 6 wynika zatem, że wszystkie wielomiany krawędziowe są odporne stabilne. Oznacza to z kolei, zgodnie z twierdzeniem krawędziowym 5, że rozpatrywany układ regulacji automatycznej o wielomianie charakterystycznym (29) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów jest odporne stabilny.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania odpornej stabilności liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego, którego wielomian charakterystyczny (7) zależy liniowo od niepewnych parametrów. Analizowany problem jest równoważny z problemem badania odpornej stabilności rodziny wielomianów ułamkowych (13) o współczynnikach liniowo zależnych od niepewnych parametrów. Pokazano, że do badania odpornej stabilności takiej rodziny wielomianów można stosować twierdzenie krawędziowe (twierdzenie 5) znane z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów naturalnego stopnia. Podano dogodną do obliczeń komputerowych metodę sprawdzania warunków twierdzenia krawędziowego oraz sposób postępowania przy badaniu odpornej stabilności rodziny wielomianów ułamkowych (13).

Proponowana metoda badania odpornej stabilności jest uogólnieniem na rozpatrywaną klasę układów ułamkowych metody podanej w monografii [6] w przypadku wielomianów stopnia naturalnego.



Rys. 3. Wykresy funkcji $\mathfrak{G}_{rk}(j\omega)$, $\omega \in [-20, 20]$: a) $\mathfrak{G}_{13}(j\omega)$, b) $\mathfrak{G}_{32}(j\omega)$,
c) $\mathfrak{G}_{24}(j\omega)$, d) $\mathfrak{G}_{14}(j\omega)$

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007–2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

LITERATURA

1. Ackermann J. (with Bartlett A., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R.): Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters. Springer-Verlag, London 1994.
2. Barmish B. R.: New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Publishing Company, New York 1995.
3. Bartlett A.C., Holot C.V., Lin H.: Root location of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. Math. Contr., Signals Syst., 1988, vol. 1, pp. 61–71.
4. Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H.: Robust Control: The Parametric Approach. Prentice Hall PTR, New York 1995.
5. Biały S.: Odporna stabilność wielomianów i macierzy. Uczelniane Wyd. Nauk.-Techn. AGH, Kraków 2002.
6. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.
7. Busłowicz M.: Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems. W: Malinowski K., Rutkowski L.: Recent Advances in Control and Automation, Academic Publishing House EXIT, Warszawa 2008, pp. 83–92.

8. Busłowicz M.: Stabilność liniowych ciągłych układów ułamkowych rzędu współmiernego. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2 (2008), str. 475–484 (CD-ROM).
9. Busłowicz M.: Robust stability of convex combination of two fractional degree characteristic polynomials. *Acta Mechanica et Automatica*, 2008, vol. 2, No. 2, pp. 5–10.
10. Busłowicz M.: Stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order. *Journal of Automation, Mobile Robots and Intelligent Systems* (w druku).
11. Busłowicz M., Kalinowski T.: Odporna stabilność liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego parametru. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2 (2008), str. 465–474.
12. Das. S.: *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, Berlin 2008.
13. Gałkowski K., Bachelier O., Kummert A.: Fractional polynomial and nD systems a continuous case. *Proc. of IEEE Conference on Decision & Control*, San Diego 2006, USA.
14. Matignon D.: Stability results on fractional differential equation with applications to control processing. *Proc. of IMACS*, Lille 1996, France.
15. Matignon D.: Stability properties for generalized fractional differential systems. *Proc. of ESAIM*, 1998, pp. 145–158.
16. Podlubny I., *Fractional order systems and fractional order controllers*. The Academy of Sciences Unstitute of Experimental Physis, Kosice, Slovask Republic, 1994.
17. Podlubny I.: *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego 1999.
18. Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems, *Machine Intelligence and Robotics Control*, 6 (2007).
19. Kaczorek T.: Reachability of fractional positive continuous-time linear systems. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2 (2008), str. 527–537 (CD-ROM).
20. Kaczorek T.: Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2008, vol. 18, No. 2, pp. 223–228.
21. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam 2006.
22. Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T. (Eds): *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, London 2007.
23. Vinagre B. M., Monje C. A., Calderon A. J.: Fractional order systems and fractional order control actions. Lecture 3 of IEEE CDC'02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 2002, Las Vegas.
24. Zhao Ch., Xue D., Chen Y.-Q.: A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plant. *Proc. IEEE Intern. Conf. on Mechatronics & Automation*, Niagara Falls 2005, Canada, pp. 216–221.