

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz  
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny  
mgr inż. Tomasz Nartowicz  
Studium Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB

## **PROJEKTOWANIE REGULATORA UŁAMKOWEGO RZĘDU DLA OKREŚLONEJ KLASY OBIEKTÓW Z OPÓŹNIENIEM**

*Rozpatrzono problem projektowania regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu regulacji z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu z całkowaniem i opóźnieniem. Proponowana metoda projektowania bazuje na zastosowaniu idealnej transmitancji Bodego jako wzorca dla układu otwartego z regulatorem. Podano komputerową metodę syntezy regulatora ułamkowego rzędu. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym i wynikami badań symulacyjnych.*

## **DESIGN OF FRACTIONAL ORDER CONTROLLER FOR A CLASS OF PLANTS WITH DELAY**

*The paper considers the design problem of fractional order controller satisfying gain and phase margin of the closed loop system with time-delay inertial plant with integral term. The proposed method is based on using Bode's ideal transfer function as a reference transfer function for the open loop system. Computer method for synthesis of fractional controller is given. The considerations are illustrated by numerical example and results of computer simulation.*

### **1. WSTĘP**

W ostatnich latach teoria analizy i syntezy liniowych układów ułamkowego rzędu jest intensywnie rozwijana w literaturze światowej, patrz np. monografie [8, 10, 12, 14, 15] i cytowaną tam literaturę. Problem badania stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów ułamkowych był rozpatrywany w pracach [3 - 7, 17].

Problemowi doboru nastaw regulatorów ułamkowych rzędów są poświęcone prace [2, 9, 11, 13, 16, 18]. Podano w nich różne metody syntezy regulatorów, między innymi bazujące na klasycznej metodzie Zieglera-Nicholsa, np. [16], jak i inne metody, np. optymalizacyjne [9]. Do pierwszych prac naukowych, w których zaczęto rozpatrywać regulatory rzędu ułamkowego należą prace Podlubnego [11, 13].

W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem projektowania regulatora ułamkowego rzędu, który zapewnia zadany zapas stabilności (tj. zapas modułu i zapas fazy) układu regulacji z obiektem całkującym rzeczywistym z opóźnieniem. Proponowana metoda projektowania bazuje na zastosowaniu idealnej transmitancji Bodego (np. [1]) jako wzorca dla układu otwartego z regulatorem. Takie podejście zastosowano w pracy [1] w przypadku syntezy klasycznego regulatora (tj. naturalnego rzędu) oraz w pracy [2] w przypadku syntezy ułamkowego regulatora dla obiektu jednoinercyjnego z opóźnieniem.

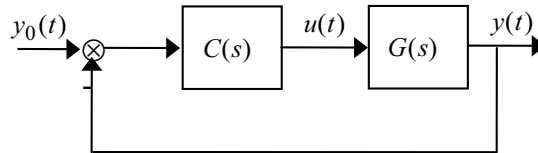
Proponowana metoda jest rozszerzeniem metody podanej w pracy [2] na klasę układów regulacji z obiektami będącymi członami całkującymi rzeczywistymi z opóźnieniem.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rys. 1, składający się z obiektu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{k}{s(1+s\tau)} e^{-sh} \quad (1)$$

i szeregowego regulatora ułamkowego rzędu o transmitancji  $C(s)$ .



Rys. 1. Rozpatrywany układ regulacji automatycznej

Problem projektowania ułamkowego regulatora był rozpatrywany w wielu pracach, np. [2, 9, 11, 13, 16, 18]. Zastosowano w nich różne podejścia i metody rozwiązania tego problemu. Do grupy pierwszych prac, w których zaczęto rozpatrywać regulatory rzędu ułamkowego, należą prace [11, 13].

Celem niniejszej pracy jest podanie prostej metody syntezy regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności (tj. zapas modułu  $A_m$  i zapas fazy  $\phi_m$ ) układu zamkniętego. Proponowana metoda jest rozwinięciem metody podanej w pracy [2] w przypadku obiektu inercyjnego z opóźnieniem.

## 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Przy syntezy regulatora wykorzystamy podejście zastosowane w pracy [2], polegające na takim dobraniu transmitancji ułamkowego regulatora, aby transmitancja operatorowa układu otwartego rzędu ułamkowego miała tzw. idealną postać Bodego [1, 2]

$$K(s) = \left( \frac{\omega_c}{s} \right)^\beta, \quad (2)$$

gdzie  $\omega_c$  jest pulsacją odcięcia modułu, tj.  $|K(j\omega_c)|=1$  zaś  $\beta$  jest liczbą rzeczywistą. Transmitancja operatorowa (2) opisuje ułamkowy człon różniczkujący dla  $\beta < 0$  zaś dla  $\beta > 0$  opisuje ona człon całkujący ułamkowego rzędu.

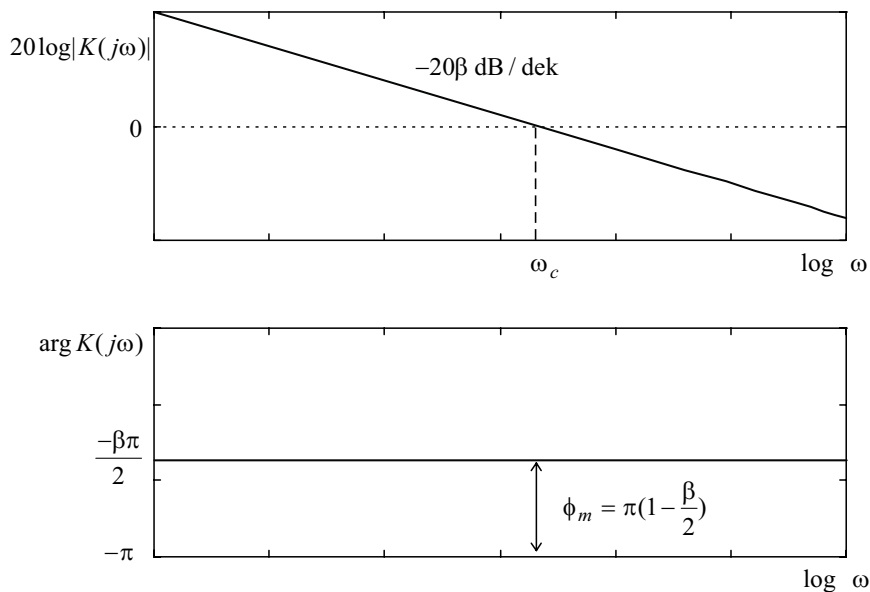
Jeżeli  $1 < \beta < 2$ , to logarytmiczna charakterystyka modułu układu o transmitancji (2) jest linią prostą o nachyleniu  $-20\beta$  dB/dek zaś logarytmiczna charakterystyka fazy jest linią poziomą o rzędnej równej  $-0.5\beta\pi$  (rysunek 2). Układ regulacji, którego transmitancja układu otwartego ma postać (2) ma stały zapas fazy  $\phi_m = (1 - 0.5\beta)\pi$ . Dzięki temu jest on niewrażliwy na zmiany wartości wzmocnienia w układzie otwartym. Szersza analiza rozpatrywanego układu (w tym w dziedzinie czasu) jest podana w pracy [1].

Łatwo zauważyć, że aby uzyskać transmitancję operatorową układu otwartego o postaci (2) (bez uwzględniania członu opóźniającego), transmitancja regulatora powinna mieć postać

$$C(s) = \frac{k_c(1+sT)}{s^\alpha}, \quad (3)$$

gdzie  $\alpha$  jest liczbą rzeczywistą dodatnią, zaś  $T = \tau$ . Wtedy

$$K(s) = C(s)G(s) = kk_c \frac{e^{-sh}}{s^{\alpha+1}}. \quad (4)$$



Rys. 2. Charakterystyki logarytmiczne członu o transmitancji (2) przy  $1 < \beta < 2$

Transmitancję regulatora (3) przy  $T = \tau$  można napisać w postaci

$$C(s) = k_c \left( \frac{1}{s^\alpha} + \tau s^{1-\alpha} \right). \quad (5)$$

Obliczając moduł i fazę transmitancji (4) oraz uwzględniając wzór  $(j\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha e^{j\alpha\pi/2}$ , otrzymamy

$$|K(j\omega)| = \frac{kk_c}{\omega^{\alpha+1}}, \quad \phi(\omega) = \arg K(j\omega) = -h\omega - (\alpha + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Zauważmy, że dla  $\alpha = \beta - 1$  transmitancja (4) układu otwartego różni się od idealnej transmitancji Bodego (2) członem  $\exp(-sh)$ . Obecność tego członu w transmitancji (4) nie wpływa na zmianę charakterystyki modułu, natomiast wpływa w sposób istotny na zmianę charakterystyki fazowej (dochodzi składnik  $-h\omega$ ). Oznacza to, że układ zamknięty o transmitancji układu otwartego (4) nie będzie miał takich samych właściwości jak układ z idealną transmitancją Bodego (2).

Przeanalizujemy teraz proces projektowania regulatora ułamkowego rzędu o transmitancji (5). Sprowadza się on do wyznaczenia wartości wzmocnienia  $k_c$  regulatora oraz parametru  $\alpha$ , dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej ma zadany zapas modułu  $A_m$  i zadany zapas fazy  $\phi_m$ .

Dla pulsacji odcięcia modułu  $\omega_g$  oraz fazy  $\omega_p$  zachodzą następujące zależności

$$|K(j\omega_g)| = 1, \quad \phi(\omega_p) = \arg K(j\omega_p) = -\pi. \quad (7)$$

Zatem, uwzględniając wzór (6) możemy napisać

$$\frac{kk_c}{\omega_g^{\alpha+1}} = 1, \quad -h\omega_p - (\alpha + 1)\frac{\pi}{2} = -\pi. \quad (8)$$

Ze wzorów (8) wynika, że

$$\omega_g^{\alpha+1} = kk_c, \quad \omega_p = \frac{(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}{h}. \quad (9)$$

Z (9) wynika, że aby pulsacja  $\omega_p$  była liczbą dodatnią musi być spełniony warunek  $\alpha < 1$ .

Przy zadanym zapasie modułu  $A_m$  i zadanym zapasie fazy  $\phi_m$  zachodzą poniższe zależności

$$\frac{kk_c}{\omega_p^{\alpha+1}} = \frac{1}{A_m}, \quad \phi_m = \pi - h\omega_g - (\alpha + 1)\frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Ze wzorów (10) mamy

$$\omega_p = (A_m kk_c)^{1/(1+\alpha)} \quad \text{oraz} \quad \omega_g = \frac{(1-\alpha)\frac{\pi}{2} - \phi_m}{h}. \quad (11)$$

Uwzględniając pierwszy ze wzorów (10) i pierwszy ze wzorów (9) otrzymamy

$$A_m = \frac{\omega_p^{\alpha+1}}{\omega_g^{\alpha+1}}. \quad (12)$$

Podstawiając z kolei drugie ze wzorów (9) i (11) do (12) otrzymamy

$$A_m = \left( \frac{(1-\alpha)\pi}{(1-\alpha)\pi - 2\phi_m} \right)^{1+\alpha}. \quad (13)$$

Nieliniowe równanie (13) wiąże ze sobą zadane zapasy modułu i fazy ( $A_m$  i  $\phi_m$ ) z ułamkowym rzędem regulatora (4). Zatem wartość parametru  $\alpha$ , która nie może być większa niż 1, możemy obliczyć rozwiązując nieliniowe równanie (13). Wtedy wartość wzmocnienia  $k_c$  regulatora można obliczyć ze wzorów

$$k_c = \frac{\omega_g^{\alpha+1}}{k} = \frac{\omega_p^{\alpha+1}}{kA_m} \quad (14)$$

na podstawie znajomości wzmocnienia  $k$  obiektu i obliczonej pulsacji odcięcia modułu lub pulsacji odcięcia fazy (drugie ze wzorów (9) i (11)).

Zauważmy, że do wyznaczenia wartości parametru  $\alpha$  potrzebna jest znajomość tylko zadanego zapasu stabilności, tj. zapasu modułu  $A_m$  i zapasu fazy  $\phi_m$ . Natomiast do wyznaczenia wzmocnienia  $k_c$  regulatora niezbędna jest znajomość dodatkowo pulsacji odcięcia modułu  $\omega_g$  (lub pulsacji odcięcia fazy  $\omega_p$ ) i wzmocnienia  $k$  obiektu.

Z powyższych rozważań wynika prosty algorytm postępowania przy projektowaniu regulatora ułamkowego rzędu opisanego transmitancją operatorową (5) przy zadanym zapasie modułu  $A_m$  i zapasie fazy  $\phi_m$ .

**Algorytm postępowania:**

Krok 1. Rozwiązujemy nieliniowe równanie (13) i wyznaczamy liczbę rzeczywistą  $\alpha$ .

Krok 2a. Obliczamy pulsację odcięcia modułu z drugiego ze wzorów (11) i wzmacnienie  $k_c$  regulatora wyznaczamy ze wzoru (14).

Krok 2b. Obliczamy pulsację odcięcia fazy z drugiego ze wzorów (9) i wzmacnienie  $k_c$  regulatora wyznaczamy ze wzoru (14).

Krok 3. Transmittancję operatorową projektowanego regulatora wyznaczamy ze wzoru (5).

**4. PRZYKŁAD**

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie pokazanym na rysunku 1, przy czym obiekt regulacji jest opisany transmittancją operatorową

$$G(s) = \frac{0.55}{s(1+62s)} e^{-10s}. \quad (15)$$

Należy wyznaczyć parametry transmittancji regulatora (5) tak, aby układ zamknięty miał zapas modułu  $A_m = 4$  (ok. 12dB) i zapas fazy  $\phi_m = 55^\circ$  (ok. 0.9599rad).

W rozpatrywanym przypadku mamy:  $k = 0.55$ ;  $\tau = 62$ ;  $h = 10$ .

Syntezę regulatora przeprowadzimy korzystając z podanego algorytmu postępowania.

Krok 1. Rozwiązując równanie (13) otrzymamy  $\alpha = 0.134$ .

Krok 2a. Obliczamy pulsację odcięcia modułu z drugiego ze wzorów (11) i otrzymamy  $\omega_g = 0.1(0.866 \cdot 0.5\pi - 0.9599) = 0.04$ . Ze wzoru (14) mamy  $k_c = 0.55\omega_g^{\alpha+1} = 0.0472$ .

Krok 2b. Obliczamy pulsację odcięcia fazy z drugiego ze wzorów (9) i otrzymamy  $\omega_p = 0.1 \cdot 0.866\pi / 2 = 0.136$ . Ze wzoru (14) mamy  $k_c = \omega_p^{\alpha+1} / kA_m = 0.0472$ .

Krok 3. Transmittancja operatorowa projektowanego regulatora ma zatem postać

$$C(s) = \frac{0.0472(1+62s)}{s^{0.134}} = 0.0472 \left( \frac{1}{s^{0.134}} + 62s^{0.8660} \right). \quad (16)$$

Sprawdzimy teraz zaprojektowany układ regulacji automatycznej w dziedzinie częstotliwości oraz czasu.

Wyznaczając transmittancję operatorową oraz transmittancję widmową układu otwartego otrzymamy odpowiednio

$$K(s) = C(s)G(s) = kk_c \frac{e^{-sh}}{s^{\alpha+1}} = \frac{0.026}{s^{1.134}} e^{-10s}, \quad (17)$$

$$K(j\omega) = \frac{0.026}{(j\omega)^{1.134}} e^{-j10\omega} = |K(j\omega)| e^{j \arg K(j\omega)}, \quad (18)$$

gdzie

$$|K(j\omega)| = \frac{0.026}{\omega^{1.134}}, \quad \arg K(j\omega) = -1.134 \frac{\pi}{2} - 10\omega. \quad (19)$$

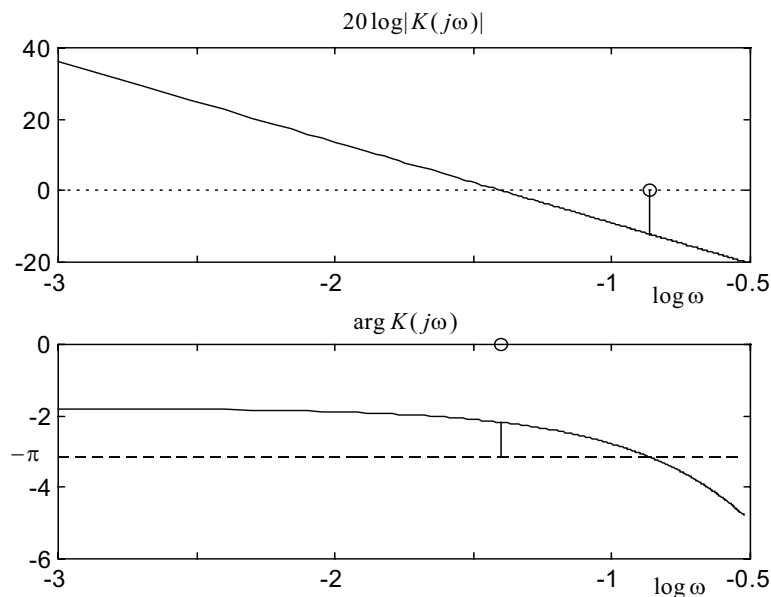
Obliczając pulsacje odcięcia modułu i fazy oraz zapas stabilności odpowiednio otrzymamy

$$\omega_g = 0.026^{1/1.134} = 0.0400, \quad \omega_p = 0.05(2 - 1.134)\pi = 0.136,$$

$$A_m = 1/|K(j\omega_p)| = \frac{\omega_p^{1.134}}{0.026} = 4.0037, \quad \phi_m = \pi + \arg K(j\omega_g) = 55.0217^\circ.$$

Zauważmy, że obliczone wartości zapasu modułu oraz zapasu fazy różnią się nieco od zadanych. Wynika to z dokładności numerycznego rozwiązania nieliniowego równania (13) przy obliczaniu wartości parametru  $\alpha$ .

Logarytmiczne charakterystyki modułu i fazy rozpatrywanego układu z regulatorem (16) są pokazane na rysunku 3. Na tym rysunku kółkami ("o") zaznaczono pulsację odcięcia modułu i fazy zaś pionowymi odcinkami linii prostych zaznaczono zapas modułu oraz zapas fazy.

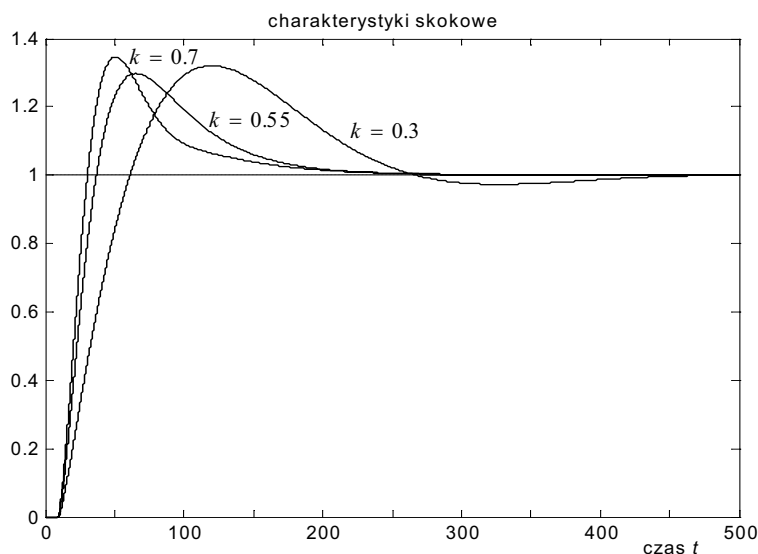


Rys. 3. Charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego z regulatorem (16)

Charakterystyki skokowe zaprojektowanego układu regulacji automatycznej, wyznaczone w drodze symulacji dla kilku wartości współczynnika wzmocnienia  $k$  obiektu, są pokazane na rys. 4. Przypomnijmy, że ułamkowy regulator był projektowany dla wzmocnienia  $k = 0,55$ , którą można nazwać wartością nominalną. Wyznaczona nominalna charakterystyka skokowa ma przeregulowanie ok. 30 % zaś czas regulacji wynosi ok. 150 s. Dla większych wartości wzmocnienia układu otwartego (badano zmianę wartości wzmocnienia do 0,7) przeregulowanie nieznacznie wzrasta, przy czym dla  $k = 0,7$  wynosi ono ok. 35 % zaś czas regulacji prawie nie ulega zmianie. Wartość przeregulowania nieznacznie też wzrasta dla wartości współczynnika wzmocnienia układu otwartego mniejszych od wartości nominalnej (badano zmianę wartości wzmocnienia do  $k = 0,3$ ) przy czym jednocześnie wzrasta też czas regulacji.

Analizowany układ zamknięty był też badany w pracy [2], przy czym obiekt regulacji był tam członem inercyjnym pierwszego rzędu z opóźnieniem o takich samych wartościach parametrów jak człon (15) zaś zaprojektowany regulator ułamkowego rzędu miał postać  $C(s)/s$ , gdzie  $C(s)$  ma postać (16). W takiej sytuacji transmitancja układu otwartego otrzymana w [2]

jest taka sama jak w niniejszym przykładzie i ma postać (17). Do badań symulacyjnych w pracy [2] zamiast członu opóźniającego zastosowano aproksymację Pade drugiego rzędu. Spowodowało to, że wyznaczone charakterystyki skokowe układu zamkniętego dla wartości wzmocnienia układu otwartego  $k \in [0.15, 0.94]$  miały prawie stałe przeregulowanie rzędu kilku procent (a więc dużo mniejsze od otrzymanych w wyniku symulacji bez aproksymacji członu opóźniającego).



Rys. 4. Charakterystyki skokowe układu zamkniętego

## 5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem projektowania regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu zamkniętego w przypadku, gdy obiekt regulacji jest rzeczywistym członem całkującym z opóźnieniem o transmitancji operatorowej (1). Zaproponowano metodę projektowania polegającą na takim doborze transmitancji regulatora, aby transmitancja układu otwartego miała postać podobną do idealnej transmitancji Bodego (2). W analizowanym przypadku nie jest możliwe (ze względu na opóźnienie na wejściu obiektu) otrzymanie postaci (2) transmitancji układu otwartego. Dlatego też przyjęto postać (4) jako transmitancję odniesienia układu otwartego. Wtedy transmitancja regulatora ma postać (3) (lub (5)). Podano komputerową metodę i sposób postępowania przy wyznaczaniu parametrów tego regulatora przy zadanym zapasie modułu  $A_m$  i zadanym zapasie fazy  $\phi_m$ . Rozważania zilustrowano przykładem syntezy regulatora. Przeprowadzono badania symulacyjne w środowisku systemu Matlab/Simulink. Potwierdziły one spełnienie wymagań projektowych.

Proponowana metoda syntezy ułamkowego regulatora dla obiektu (1) jest uogólnieniem metody podanej w pracy [2] w przypadku obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem.

\* \* \*

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

**LITERATURA**

1. Barbosa R. S., Machado J. A., Ferreira I. M.: Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 38, pp. 305-321.
2. Boudjehem B., Boudjehem D., Tebbikh H.: Simple analytical design method for fractional-order controller. *Proc. 3-rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Ankara, Turkey, 2008 (CD-ROM).
3. Busłowicz M.: Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems. W: Malinowski K., Rutkowski L.: *Recent Advances in Control and Automation*, Academic Publishing House EXIT, Warszawa 2008, pp. 83-92.
4. Busłowicz M.: Stabilność liniowych ciągłych układów ułamkowych rzędu współmiernego. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2 (2008), str. 475-484 ( CD-ROM).
5. Busłowicz M.: Robust stability of convex combination of two fractional degree characteristic polynomials. *Acta Mechanica et Automatica*, 2008, vol. 2, No. 2, pp. 5-10.
6. Busłowicz M.: Stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order. *Journal of Automation, Mobile Robots and Intelligent Systems* (w druku).
7. Busłowicz M., Kalinowski T.: Odporna stabilność liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego parametru. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2 (2008), str. 465-474.
8. Das. S.: *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, Berlin 2008.
9. Monje C. A., Calderon A. J., Vinagre B. M., Chen Y., Feliu V.: On fractional PI controllers: some tuning rules for robustness to plant uncertainties. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 38, pp. 369-381.
10. Ostalczyk P.: *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
11. Podlubny I.: *Fractional order systems and fractional order controllers*. The Academy of Sciences Institute of Experimental Physics, Kosice, Slovack Republic, 1994.
12. Podlubny I.: *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego 1999.
13. Podlubny I.: Fractional-order systems and PID-controllers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, vol. 44, No. 1, pp. 208-214.
14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam 2006.
15. Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T. (Eds): *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, London 2007.
16. Valerio D., da Costa J. S.: Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules. *Signal Processing*, 2006, vol. 86, pp. 2771-2784.
17. Vinagre B. M., Monje C. A., Calderon A. J.: Fractional order systems and fractional order control actions. Lecture 3 of *IEEE CDC'02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics*, 2002, Las Vegas.
18. Zhao Ch., Xue D., Chen Y.-Q.: A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plant. *Proc. IEEE Intern. Conf. on Mechatronics & Automation*, Niagara Falls 2005, Canada, pp. 216-221.