

dr inż. Konrad Andrzej MARKOWSKI
 Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny,
 Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej,

ALGORYTM WYZNACZANIA REALIZACJI DODATNIEJ UKŁADÓW DWUWYMIAROWYCH Z OPÓŹNIENIAMI

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania realizacji dodatniej układu dwuwymiarowego z opóźnieniami opisanego za pomocą modelu ogólnego. Do wyznaczania realizacji użyto teorii wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań. Zaproponowaną metodę zilustrowano prostymi przykładami numerycznymi.

ALGORITHM OF DETERMINATION REALIZATION OF POSITIVE TWO DIMENSIONAL SYSTEMS WITH DELAYS

In this paper a method for determination positive realization of two dimensional systems described by general model with delays using multidimensional digraphs theory is presented. The proposed method is illustrated by numerical examples.

1. WSTĘP

Układy dodatnie spotykamy w biologii, medycynie, bioinformatyce, naukach społecznych, ekonomii i w wielu innych dziedzinach. Przykładem układów dodatnich są: procesy zachodzące w reaktorze chemicznym, kolumna destylacyjna, model pogody, obwody elektryczne itp. Każdy układ rzeczywisty możemy opisać równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Następnie poddając taki model linearyzacji i dyskretyzacji otrzymujemy układ opisany za pomocą liniowego modelu jednowymiarowym lub wielowymiarowym. Cel, do którego dążymy jest następujący. Mając opis układu dynamicznego za pomocą macierzy transmitancji należy znaleźć realizację tego modelu, czyli wyznaczyć jego macierze. Jako narzędzie posłużą nam w tym celu wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań.

W artykule zaproponowano metodę wyznaczania realizacji dodatniej układu rzeczywistego, którą następnie zilustrowano przykładem numerycznym.

2. WPROWADZENIE

2.1 Opis układu dwuwymiarowego z opóźnieniami

Niech będzie dany układ dwuwymiarowy z opóźnieniami opisany modelem ogólnym z opóźnieniami [9] opisany równaniami

$$\begin{aligned}
 x_{i+1,j+1} = & \sum_{k_1=0}^{q_1} \sum_{l_1=0}^{q_2} \left(\mathbf{A}_{k_1 l_1}^0 x_{i-k_1, j-l_1} + \mathbf{A}_{k_1 l_1}^1 x_{i-k_1+1, j-l_1} + \mathbf{A}_{k_1 l_1}^2 x_{i-k_1, j-l_1+1} \right) + \\
 & + \sum_{k_2=0}^{p_1} \sum_{l_2=0}^{p_2} \left(\mathbf{B}_{k_2 l_2}^0 u_{i-k_2, j-l_2} + \mathbf{B}_{k_2 l_2}^1 u_{i-k_2+1, j-l_2} + \mathbf{B}_{k_2 l_2}^2 u_{i-k_2, j-l_2+1} \right), \\
 y_{ij} = & \mathbf{C}x_{ij} + \mathbf{D}u_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $x_{ij} \in \mathbb{R}^n$, $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$, $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem stanu, wymuszenia i odpowiedzi,

$$\mathbf{A}_{k_1 l_1}^t \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B}_{k_2 l_2}^t \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m},$$

$$t = 0, 1, 2; \quad k_1 = 0, 1, \dots, q_1; \quad l_1 = 0, 1, \dots, q_2; \quad k_2 = 0, 1, \dots, p_1; \quad l_2 = 0, 1, \dots, p_2; \quad (2)$$

Warunki brzegowe dla (1) mają postać

$$x_{i-k_1, -l_1}, \quad x_{-k_1, j-l_1}, \quad k_1 = 0, 1, \dots, q_1; \quad l_1 = 0, 1, \dots, q_2; \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\} \quad (3)$$

Definicja 1. Układ opisany równaniem (1) nazywamy dwuwymiarowym układem ogólnym z $(q_1; q_2)$ opóźnieniami w wektorze stanu oraz $(p_1; p_2)$ opóźnieniami w wektorze wymuszenia.

Definicja 2. Układ opisany zależnością (1) nazywamy wewnętrznym dodatnim modelem ogólnym z opóźnieniami, jeżeli dla wszystkich warunków brzegowych

$$x_{i-k_1, -l_1} \in \mathbb{R}_+^n, \quad x_{-k_1, j-l_1} \in \mathbb{R}_+^n, \quad k_1 = 0, 1, \dots, q_1; \quad l_1 = 0, 1, \dots, q_2; \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\} \quad (4)$$

oraz każdego ciągu wymuszeń $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^m$, $i = -p_1; -p_1+1, \dots; j = -p_2; -p_2+1, \dots$; mamy $x_{ij} \in \mathbb{R}_+^n$ oraz $y_{ij} \in \mathbb{R}_+^p$ dla $i; j \in \mathbb{Z}_+$.

Twierdzenie 1. Model (1) jest modelem dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{A}_{k_1 l_1}^t \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \mathbf{B}_{k_2 l_2}^t \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^{p \times m},$$

$$t = 0, 1, 2; \quad k_1 = 0, 1, \dots, q_1; \quad l_1 = 0, 1, \dots, q_2; \quad k_2 = 0, 1, \dots, p_1; \quad l_2 = 0, 1, \dots, p_2; \quad (5)$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [9].

2.2 Wielowymiarowe Grafy Skierowane Oddziaływań

W istniejącej literaturze można spotkać wiele różnych definicji grafu. Obserwowane dynamiczne zmiany sposobu definiowania grafu wynikają z potrzeby obejmowania teorią grafów coraz szerszej klasy struktur. W naszych rozważaniach taką klasą struktur są dodatnie układy dwuwymiarowe opisane modelem ogólnym (1).

Definicja 3. Wielowymiarowym grafem skierowanym oddziaływań $D^{(n)}$ nazywamy $(\mathbb{S}, \mathbb{V}, A_1, A_2, \dots; B_1, B_2, \dots)$, gdzie $\mathbb{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ jest źródłem, $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest zbiorem wierzchołków, $A_1, A_2, \dots$ są podzbiórmi $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ których elementy nazywamy A_1 -łukami, A_2 -łukami, ... oraz $B_1, B_2, \dots$ są podzbiórmi $\mathbb{S} \times \mathbb{V}$, których elementy nazywamy B_1 -łukami, B_2 -łukami, ...;

Wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań możemy wyznaczyć za pomocą jego macierzy sąsiedztwa [3]. W sytuacji kiedy mamy do czynienia z wielowymiarowym digrafem, który opisuje dodatni układ dwuwymiarowy (1) macierzą sąsiedztwa są pary $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$.

Definicja 4. Sumą prostą dwóch wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań $D_1^{(n)} = (\mathbb{S}^1, \mathbb{V}^1, A_1^1, A_2^1, \dots; B_1^1, B_2^1, \dots)$ oraz $D_2^{(n)} = (\mathbb{S}^2, \mathbb{V}^2, A_1^2, A_2^2, \dots; B_1^2, B_2^2, \dots)$ nazywamy wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań $D^{(n)} = (\mathbb{S}, \mathbb{V}, A_1, A_2, \dots; B_1, B_2, \dots)$ gdzie $\mathbb{S} = \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^2$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}^1 \cup \mathbb{V}^2$, $A_1 = A_1^1 \cup A_1^2$, $A_2 = A_2^1 \cup A_2^2$, $B_1 = B_1^1 \cup B_1^2$, $B_2 = B_2^1 \cup B_2^2$ i oznaczamy $D^{(n)} = D_1^{(n)} \oplus D_2^{(n)}$.

Należy zauważyć, że powyższa definicja jest słuszna również, gdy mamy do czynienia z więcej niż dwoma digrafami wielowymiarowymi.

Z powyższych rozważań wynika, iż każdy digraf można w dowolny sposób zdekomponować na wiele poddigrafów bez utraty informacji na temat struktury takiego digrafu.

Definicja 5. *Trasą w danym grafie skierowanym oddziaływań nazywamy skończony ciąg krawędzi (typu łuki lub pętle), w którym każde dwa kolejne wierzchołki $v_i, i = 1, 2, \dots$ są albo sąsiednie albo identyczne co zapisujemy $(v_i, v_{i+1})_K$, gdzie v_i jest początkiem łuku, v_{i+1} jest końcem łuku, K jest łukiem powstałym od odpowiedniej macierzy.*

Definicja 6. *Trasą nazywamy ścieżką prostą, jeżeli wszystkie wierzchołki są różne.*

Definicja 7. *Trasę $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ nazywamy cyklem, jeżeli początkowy i końcowy wierzchołek w trasie jest taki sam $v_1 = v_k$ i trasa zawiera co najmniej jedną krawędź (typu łuki lub pętle).*

Definicja 8. *Cykl nazywamy prostym jeżeli wierzchołki $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ są różne.*

3. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Niech będzie dany układ dwuwymiarowy z opóźnieniami opisany modelem ogólnym o postaci (1). Jego macierz transmitancji dana jest zależnością

$$\mathbf{T}(z_1, z_2) = \mathbf{C} \left[\mathbf{I} z_1 z_2 - \sum_{k_1=0}^{q_1} \sum_{l_1=0}^{q_2} z_1^{-k_1} z_2^{-l_1} (\mathbf{A}_{k_1 l_1}^0 + \mathbf{A}_{k_1 l_1}^1 z_1 + \mathbf{A}_{k_1 l_1}^2 z_2) \right]^{-1} \times \left[\sum_{k_2=0}^{p_1} \sum_{l_2=0}^{p_2} z_1^{-k_2} z_2^{-l_2} (\mathbf{B}_{k_2 l_2}^0 + \mathbf{B}_{k_2 l_2}^1 z_1 + \mathbf{B}_{k_2 l_2}^2 z_2) \right] + \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^{p \times m}(z_1, z_2) \quad (6)$$

przy czym $\mathbb{R}^{p \times m}(z_1, z_2)$ jest zbiorem macierzy wymiernych o współczynnikach rzeczywistych. Macierz transmitancji (6) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{T}(z_1, z_2) = \mathbf{C} \left[\mathbf{I} z_1 z_2 - \sum_{k_1=0}^{q_1} \sum_{\substack{l_1=0 \\ k_1+l_1 > -2}}^{q_2} \mathbf{A}_{k_1 l_1} z_1^{-k_1} z_2^{-l_1} \right]^{-1} \left[\sum_{k_2=0}^{p_1} \sum_{\substack{l_2=0 \\ k_2+l_2 > -2}}^{p_2} \mathbf{B}_{k_2 l_2} z_1^{-k_2} z_2^{-l_2} \right] + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{N}(z_1, z_2)}{d(z_1, z_2)} \quad (7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{-1,0} &= \mathbf{A}_{00}^1, \quad \mathbf{A}_{0,-1} = \mathbf{A}_{00}^2, \quad \mathbf{A}_{-1,1} = \mathbf{A}_{01}^1, \quad \mathbf{A}_{1,-1} = \mathbf{A}_{10}^2, \\ \mathbf{A}_{k_1, l_1} &= \mathbf{A}_{k_1, l_1}^0 + \mathbf{A}_{k_1+1, l_1}^1 + \mathbf{A}_{k_1, l_1+1}^2, \quad k_1 = 0, 1, \dots, q_1-1; \quad l_1 = 0, 1, \dots, q_2-1; \\ \mathbf{A}_{q_1-1, q_2} &= \mathbf{A}_{q_1-1, q_2}^0 + \mathbf{A}_{q_1, q_2}^1, \quad \mathbf{A}_{q_1, q_2-1} = \mathbf{A}_{q_1, q_2-1}^0 + \mathbf{A}_{q_1, q_2}^2, \quad \mathbf{A}_{q_1, q_2} = \mathbf{A}_{q_1, q_2}^0, \\ \mathbf{B}_{-1,0} &= \mathbf{B}_{00}^1, \quad \mathbf{B}_{0,-1} = \mathbf{B}_{00}^2, \quad \mathbf{B}_{-1,1} = \mathbf{B}_{01}^1, \quad \mathbf{B}_{1,-1} = \mathbf{B}_{10}^2, \\ \mathbf{B}_{k_2, l_2} &= \mathbf{B}_{k_2, l_2}^0 + \mathbf{B}_{k_2+1, l_2}^1 + \mathbf{B}_{k_2, l_2+1}^2, \quad k_2 = 0, 1, \dots, p_1-1; \quad l_2 = 0, 1, \dots, p_2-1; \\ \mathbf{B}_{p_1-1, p_2} &= \mathbf{B}_{p_1-1, p_2}^0 + \mathbf{B}_{p_1, p_2}^1, \quad \mathbf{B}_{p_1, p_2-1} = \mathbf{B}_{p_1, p_2-1}^0 + \mathbf{B}_{p_1, p_2}^2, \quad \mathbf{B}_{p_1, p_2} = \mathbf{B}_{p_1, p_2}^0 \end{aligned} \quad (8)$$

oraz

$$\mathbf{N}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} n_{11}(z_1, z_2) & \dots & n_{1m}(z_1, z_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{p1}(z_1, z_2) & \dots & n_{pm}(z_1, z_2) \end{bmatrix},$$

$$n_{ij}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} n_{kl}^{ij} z_1^k z_2^l =$$

$$= n_{N_1, N_2}^{ij} z_1^{N_1} z_2^{N_2} + n_{N_1, N_2-1}^{ij} z_1^{N_1} z_2^{N_2-1} + n_{N_1-1, N_2}^{ij} z_1^{N_1-1} z_2^{N_2} + \dots + n_{10}^{ij} z_1 + n_{01}^{ij} z_2 + n_{00}^{ij},$$
(9)

$$d(z_1, z_2) = z_1^{nq_1} z_2^{nq_2} - \sum_{k=0}^{nq_1} \sum_{l=0}^{nq_2} d_{kl} z_1^k z_2^l =$$

$$= z_1^{nq_1} z_2^{nq_2} - d_{nq_1, nq_2-1} z_1^{nq_1} z_2^{nq_2-1} - d_{nq_1-1, nq_2} z_1^{nq_1-1} z_2^{nq_2} - \dots - d_{10} z_1 - d_{01} z_2 - d_{00}$$
(9)

Mnożąc licznik i mianownik zależności (3.51) przez $z_1^{-nq_1} z_2^{-nq_2}$ otrzymujemy

$$\mathbf{T}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \frac{\mathbf{N}(z_1^{-1}, z_2^{-1})}{d(z_1^{-1}, z_2^{-1})} = \frac{1}{d(z_1^{-1}, z_2^{-1})} \begin{bmatrix} n_{11}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) & \dots & n_{1m}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{p1}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) & \dots & n_{pm}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \end{bmatrix},$$
(10)

gdzie

$$n_{ij}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = n_{N_1, N_2}^{ij} z_1^{N_1-nq_1} z_2^{N_2-nq_2} + n_{N_1, N_2-1}^{ij} z_1^{N_1-nq_1} z_2^{N_2-nq_2-1} + n_{N_1-1, N_2}^{ij} z_1^{N_1-nq_1-1} z_2^{N_2-nq_2} + \dots$$

$$\dots + n_{10}^{ij} z_1^{1-nq_1} z_2^{-nq_2} + n_{01}^{ij} z_1^{-nq_1} z_2^{1-nq_2} + n_{00}^{ij} z_1^{-nq_1} z_2^{-nq_2}$$
(11)

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = 1 - d_{nq_1, nq_2-1} z_2^{-1} - d_{nq_1-1, nq_2} z_1^{-1} - \dots - d_{10} z_1^{1-nq_1} z_2^{-nq_2} - d_{01} z_1^{-nq_1} z_2^{1-nq_2} - d_{00} z_1^{-nq_1} z_2^{-nq_2}$$

Macierz transmitancji $\mathbf{T}(z_1, z_2)$ układu dwuwymiarowego z opóźnieniami (1) dana jest wzorem (7).

Dla danych macierzy

$$\mathbf{A}_{k_1 l_1}, \quad \mathbf{B}_{k_2 l_2}, \quad \mathbf{C}, \quad \mathbf{D},$$

$$k_1 = -1, 0, 1, \dots, q_1; \quad l_1 = -1, 0, 1, \dots, q_2; \quad k_2 = -1, 0, 1, \dots, p_1; \quad l_2 = -1, 0, 1, \dots, p_2;$$
(12)

istnieje tylko jedna macierz transmitancji (7), natomiast dla danej macierzy właściwej $\mathbf{T}(z_1, z_2)$ istnieje wiele różnych macierzy (12) spełniających równość (7).

Definicja 3.13. Macierze (12) spełniające zależność (7) nazywamy realizacją macierzy transmitancji. Realizację tę oznaczamy będziemy $R(T)$.

Definicja 3.14. Realizację $R(T)$ nazywamy realizacją minimalną, jeżeli macierz stanu ma najmniejszy wymiar spośród wszystkich realizacji macierzy $\mathbf{T}(z_1, z_2)$. Realizację minimalną oznaczamy będziemy $R_{\min}(T)$.

Macierz $\mathbf{D}$ dla danej macierzy właściwej $\mathbf{T}(z_1, z_2)$ wyznaczamy z zależności

$$\mathbf{T}_{sw}(z_1, z_2) = \mathbf{T}(z_1, z_2) - \mathbf{D} = \mathbf{C} \left[\mathbf{I} z_1 z_2 - \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+l_1>-2}}^{q_1} \sum_{\substack{l_1=0 \\ l_1+l_2>-2}}^{q_2} \mathbf{A}_{k_1 l_1} z_1^{-k_1} z_2^{-l_1} \right]^{-1} \left[\sum_{\substack{k_2=0 \\ k_2+l_2>-2}}^{p_1} \sum_{\substack{l_2=0 \\ l_2+l_1>-2}}^{p_2} \mathbf{B}_{k_2 l_2} z_1^{-k_2} z_2^{-l_2} \right] \quad (13)$$

Mając macierz właściwa $\mathbf{T}(z_1, z_2)$ i korzystając z zależności (13) możemy wyznaczyć macierz ściśle właściwą $\mathbf{T}_{sw}(z_1, z_2)$.

Problem realizacji można sformułować następująco. Dana jest macierz ściśle właściwa $\mathbf{T}_{sw}(z_1, z_2)$ wyznaczyć realizację $R(T_{sw})$ tej macierzy. Dana jest macierz ściśle właściwa $\mathbf{T}_{sw}(z_1, z_2)$ wyznaczyć realizację minimalną $R_{min}(T_{sw})$ tej macierzy.

Problem wyznaczania realizacji oraz realizacji minimalnej można podzielić na dwa podzadania.

Podzadanie pierwsze sprowadza się do wyznaczenia elementów macierzy stanu $\mathbf{A}$.

Podzadanie drugie sprowadza się do wyznaczenia elementów macierzy $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$. Wyznaczenie elementów tych macierzy dokonuje się przez wyznaczenie równań za pomocą grafów skierowanych oddziaływań a następnie rozwiązania ich znanymi metodami.

4. ROZWIĄZANIE ZADANIA

4.1 Podzadanie 1 – Wyznaczanie elementów macierzy stanu $\mathbf{A}$

Niech będzie dany układ dwuwymiarowy z wieloma opóźnieniami (q_1, q_2) w wektorze stanu opisany równaniem (1). Wielomian charakterystyczny takiego układu ma postać

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = 1 - d_{nq_1, nq_2-1} z_2^{-1} - d_{nq_1-1, nq_2} z_1^{-1} - \dots - d_{10} z_1^{1-nq_1} z_2^{-nq_2} - d_{01} z_1^{-nq_1} z_2^{1-nq_2} - d_{00} z_1^{-nq_1} z_2^{-nq_2} \quad (14)$$

Dla układów dwuwymiarowych z wieloma opóźnieniem w wektorze stanu q_1 i q_2 do wyznaczania elementów macierzy stanu $\mathbf{A}_{k_1, l_1}$, $k_1 = -1, 0, 1, \dots, q_1$; $l_1 = -1, 0, 1, \dots, q_2$ będziemy używali teorii wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań $D^{(n)}$.

Metoda polega na dekompozycji wielomianu charakterystycznego opisanego równaniem (14) na odpowiednią liczbę jednomianów oraz na odpowiednim doborze wag łuków i pętli w digrafie.

Wielomian charakterystyczny (14) możemy przedstawić w postaci

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = 1 - \hat{d}_1(z_1^{-1}, z_2^{-1}) - \hat{d}_2(z_1^{-1}, z_2^{-1}) - \dots - \hat{d}_l(z_1^{-1}, z_2^{-1}), \quad l = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Każdemu z powstałych jednomianów w (15) możemy przypisać odpowiedni wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań $D^{(n)}$, przypisując każdemu łukowi lub pętli odpowiednią wagę $w(v_i, v_j)_{A_{-1,0}} z_2^{-1}$ gdy łuk lub pętla należy do macierzy $\mathbf{A}_{-1,0}$, wagę $w(v_i, v_j)_{A_{0,-1}} z_1^{-1}$ gdy łuk lub pętla należy do macierzy $\mathbf{A}_{0,-1}$, wagę $w(v_i, v_j)_{A_{00}} z_1^{-1} z_2^{-1}$ gdy łuk lub pętla należy do macierzy $\mathbf{A}_{00}, \dots$, wagę $w(v_i, v_j)_{A_{-1,q_2}} z_2^{-q_2-1}$ gdy łuk lub pętla należy do macierzy $\mathbf{A}_{-1,q_2}, \dots$, wagę $w(v_i, v_j)_{A_{q_1,-1}} z_1^{-q_1-1}$ gdy łuk lub pętla należy do macierzy $\mathbf{A}_{q_1,-1}, \dots$, wagę $w(v_i, v_j)_{A_{q_1,q_2}} z_1^{-q_1-1} z_2^{-q_2-1}$ gdy łuk lub pętla należy do macierzy $\mathbf{A}_{q_1,q_2}$. Iloczyn wszystkich wag w cyklu daje informacje na temat jednomianu. Zgodnie z Definicją 4 możemy dokonać sumowania prostego wyznaczonych wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań, otrzymując digraf odpowiadający szukanemu wielomianowi charakterystycznemu (14).

Należy zauważyć, że jeżeli po dokonaniu sumowania prostego wszystkich wielowymiarowych digrafów w powstałym digrafie pojawią się dodatkowe cykle proste, wówczas jest to równoznaczne z pojawieniem się dodatkowego jednomianu w wielomianie charakterystycznym.

nym. A zatem taki wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań nie spełnia wielomianu charakterystycznego (14).

Głównym problemem pojawiającym się podczas wyznaczania wielowymiarowych digrafów odpowiadającym jednomianom wielomianu charakterystycznego jest znalezienie odpowiedniej liczby łuków lub pętli powstałych od macierzy $\mathbf{A}_{k,l}$, $k=-1,0,1,\dots,q_1$; $l=-1,0,1,\dots,q_2$.

Z powyższych rozważań wynika, że jednomiany $z_1^{-1}z_2^{-1}, z_1^{-1}, z_2^{-1}, \dots, z_1^{-q_1-1}z_2^{-q_2-1}, z_1^{-q_1}z_2^{-q_2-1}, z_1^{-q_1-1}z_2^{-q_2}$ są pętlami w wielowymiarowym grafie skierowanym oddziaływań natomiast nietrywialny jednomiany o pozostałych potęgach tworzą cykle proste. Należy zauważyć, iż dla każdego jednomianu tworzącego cykl prosty istnieje wiele możliwości wyrysowania wielowymiarowego digrafu.

4.2 Podzadanie 2 – Wyznaczanie elementów macierzy stanu $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$

Niech będzie dana macierz transmitancji ściśle właściwa (13) układu (1). Wielomian (11) możemy przedstawić w postaci

$$n(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \hat{n}_1(z_1^{-1}, z_2^{-1}) + \hat{n}_2(z_1^{-1}, z_2^{-1}) + \dots + \hat{n}_k(z_1^{-1}, z_2^{-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Mając dany wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań, wyznaczony za pomocą metody zaprezentowanej w Podzadaniu 1, dorysowujemy źródło, które zgodnie z Definicją 4 odpowiada macierzy $\mathbf{B}_{k,l}$, $k=-1,0,1,\dots,p_1$; $l=-1,0,1,\dots,p_2$. Następnie rysujemy odpowiednie łuki ze źródła s_p , $p=1,\dots,m$ do wierzchołka $v_1, v_2, \dots, v_n$ przypisując im: wagę $w(s_p, v_i)_{\mathbf{B}_{-10}z_1^{-1}}$,

$i = 1, 2, \dots, n$ gdy łuk pochodzi od macierzy $\mathbf{B}_{-10}$; wagę $w(s_p, v_i)_{\mathbf{B}_{0-1}z_1^{-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ gdy łuk pochodzi od macierzy $\mathbf{B}_{0-1}$; wagę $w(s_p, v_i)_{\mathbf{B}_{00}z_1^{-1}z_2^{-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ gdy łuk pochodzi od macierzy $\mathbf{B}_{00}, \dots$, wagę $w(s_p, v_i)_{\mathbf{B}_{p1,-1}z_1^{-p_1-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ gdy łuk pochodzi od macierzy $\mathbf{B}_{p1,-1}, \dots$, wagę $w(s_p, v_i)_{\mathbf{B}_{-1,p2}z_2^{-p_2-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ gdy łuk pochodzi od macierzy $\mathbf{B}_{-1,p2}, \dots$, wagę $w(s_p, v_i)_{\mathbf{B}_{p1,p2}z_1^{-p_1}z_2^{-p_2-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ gdy łuk pochodzi od macierzy $\mathbf{B}_{p1,p2}$.

W kolejnym kroku dekomponujemy digraf na części składowe, tak żeby każdy z powstałych digrafów zawierał drogę skończoną ze źródła s_p do wierzchołka końcowego v_k , gdzie v_k jest wskazywany przez macierz $\mathbf{C}$. Wierzchołek końcowy zostaje wybrany jako ten, który jest częścią wspólną dla wszystkich cykli prostych. Iloczyn wag w drodze skończonej daje informację o jednomianie w wielomianie (16).

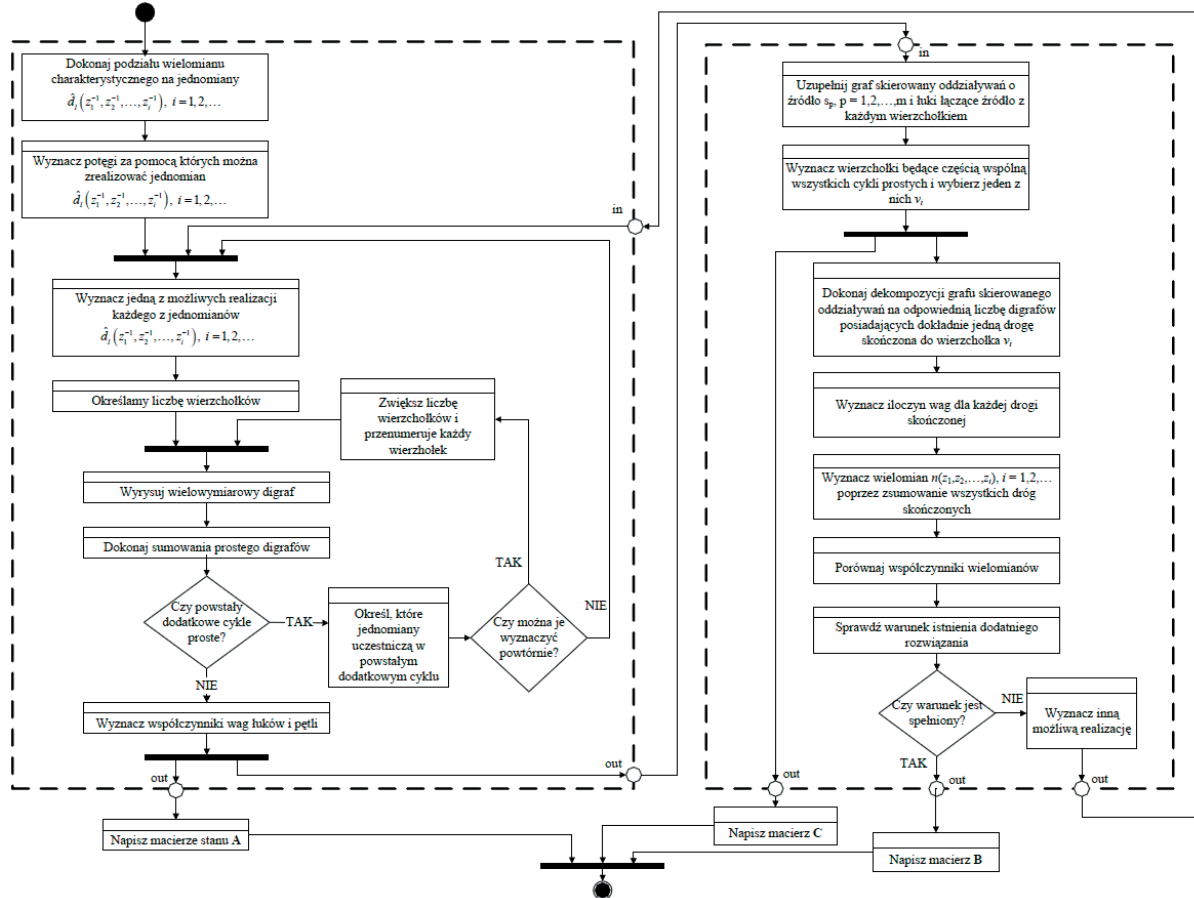
Porównując współczynniki wielomianu (11) z (16) otrzymujemy układ równań, którego rozwiązanie pozwala wyznaczyć elementy macierzy $\mathbf{B}_{k,l}$, $k=-1,0,1,\dots,p_1$; $l=-1,0,1,\dots,p_2$.

Zatem macierze $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ będą miały postać.

$$\mathbf{B}_{-10} = \begin{bmatrix} w(s_p, v_1)_{\mathbf{B}_{-10}} \\ w(s_p, v_2)_{\mathbf{B}_{-10}} \\ \vdots \\ w(s_p, v_n)_{\mathbf{B}_{-10}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{0-1} = \begin{bmatrix} w(s_p, v_1)_{\mathbf{B}_{0-1}} \\ w(s_p, v_2)_{\mathbf{B}_{0-1}} \\ \vdots \\ w(s_p, v_n)_{\mathbf{B}_{0-1}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{00} = \begin{bmatrix} w(s_p, v_1)_{\mathbf{B}_{00}} \\ w(s_p, v_2)_{\mathbf{B}_{00}} \\ \vdots \\ w(s_p, v_n)_{\mathbf{B}_{00}} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{B}_{p_1, p_2} = \begin{bmatrix} w(s_p, v_1)_{\mathbf{B}_{p_1, p_2}} \\ w(s_p, v_2)_{\mathbf{B}_{p_1, p_2}} \\ \vdots \\ w(s_p, v_n)_{\mathbf{B}_{p_1, p_2}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \dots & 0 & v_k & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

gdzie v_k jest ustalany indywidualnie w każdym zadaniu.



Schemat 1. Algorytm wyznaczania realizacji

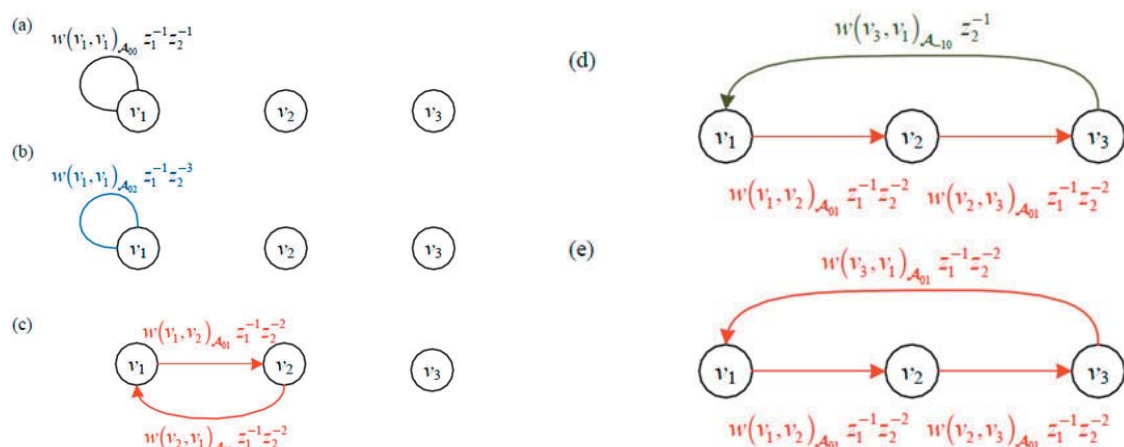
5. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Niech będzie dana transmitancja ściśle właściwa o postaci

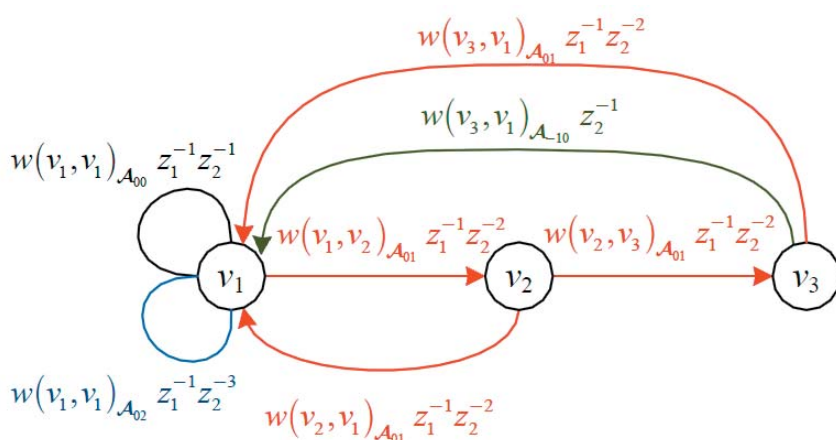
$$T_{sw}(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \frac{5z_2^{-1} + 4z_1^{-1} + 3z_1^{-2} + z_2^{-2} + z_1^{-1}z_2^{-2} + z_1^{-1}z_2^{-3} + z_1^{-2}z_2^{-3}}{1 - 2z_1^{-1}z_2^{-1} - z_1^{-1}z_2^{-3} - z_2^{-2}z_2^{-4} - z_2^{-2}z_2^{-6} - z_2^{-3}z_2^{-6}} \quad (18)$$

Należy wyznaczyć realizację układu.

Rozwiązanie. Na podstawie wielomianu charakterystycznego (5.74) określamy liczbę opóźnień. Załóżmy, że układ będzie rozmiaru 3×3 a opóźnienia $q_1=1$ i $q_2=2$. Wielomian charakterystyczny $d(z_1^{-1}, z_2^{-1})$ złożony jest z pięciu nietrywialnych jednomianów oraz jednomianu o wartości równej 1. Każdy nietrywialny jednomian wielomianu charakterystycznego można zrealizować za pomocą potęg: $z_2^{-1}, z_2^{-2}, z_2^{-3}, z_1^{-1}, z_1^{-2}, z_1^{-1}z_2^{-1}, z_1^{-1}z_2^{-2}, z_1^{-1}z_2^{-3}, z_1^{-2}z_2^{-1}, z_1^{-2}z_2^{-2}, z_1^{-2}z_2^{-3}$. Wyznaczamy jedną z możliwych realizacji każdego z jednomianów oraz określamy liczbę wierzchołków w wielowymiarowym digrafie oraz określamy informację jakie symboliczne wagi są przypisane łukom. Na rys. 1 pokazano wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań odpowiadające poszczególnym jednomianom wielomianu charakterystycznego. W kolejnym etapie dokonujemy sumowania prostego wszystkich wielowymiarowych digrafów z rys. 1. Wynik sumowania pokazano na rys. 2.



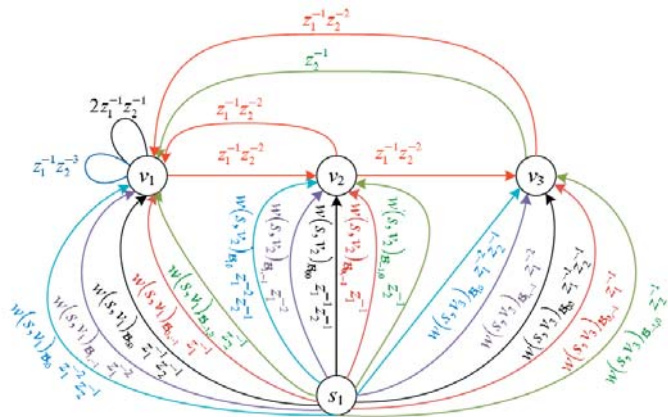
Rys. 1. Wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań



Rys. 2. Wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań powstały w wyniku sumowania digrafów z rys. 1

W wyniku sumowania prostego w wielowymiarowym grafie skierowanym oddziaływań z rys. 2 nie powstał żaden dodatkowy cykl prosty a zatem istnieje jednoznaczne rozwiązanie w postaci macierzy stanu. Następnie wyznaczamy współczynniki wag poszczególnych łuków i piszemy macierze stanu w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{-10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & w(v_3, v_1)_{A_{-10}} z_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{00} = \begin{bmatrix} w(v_1, v_1)_{A_{00}} z_1^{-1} z_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_{02} &= \begin{bmatrix} w(v_1, v_1)_{A_{02}} z_1^{-1} z_2^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_{01} &= \begin{bmatrix} 0 & w(v_2, v_1)_{A_{01}} z_1^{-1} z_2^{-2} & w(v_3, v_1)_{A_{01}} z_1^{-1} z_2^{-2} \\ w(v_1, v_2)_{A_{01}} z_1^{-1} z_2^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & w(v_2, v_3)_{A_{01}} z_1^{-1} z_2^{-2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{20}$$

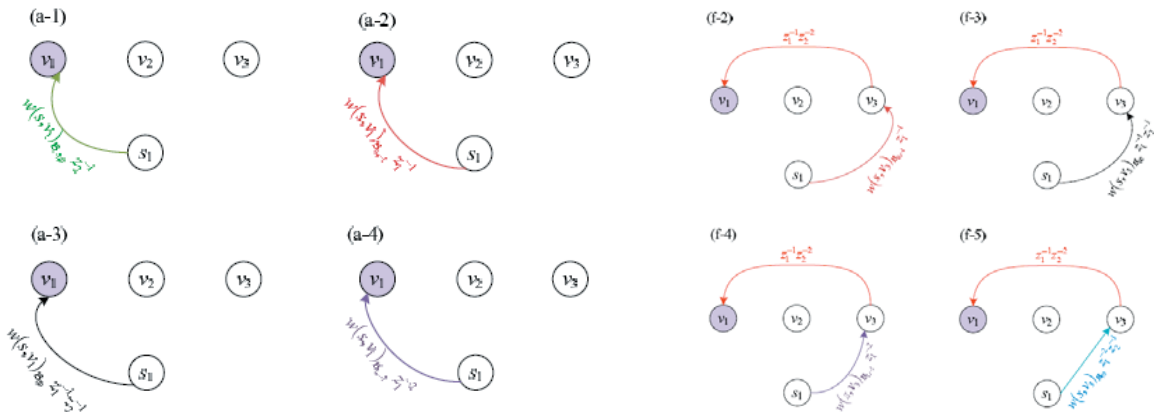


Rys. 3. Uzupełniony wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań

Zgodnie z Procedurą 2 uzupełniamy wielowymiarowy graf skierowany oddziaływań o źródło s_p , $p=0,1,2,\dots,m$ i łuki łączące źródło z każdym wierzchołkiem $v_1, v_2, \dots, v_n$ (rys. 3). Wyznacz macierz C tak, żeby niezerowy element znajdował się na wierzchołku v_i , który jest częścią wspólną dla wszystkich cykli prostych w wielowymiarowym digrafie. Wierzchołkiem wspólnym dla wszystkich cykli prostych jest wierzchołek v_1 .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(21)



Rys. 4. Dekompozycja digrafu z rys. 3

Dokonujemy dekompozycji digrafu na odpowiednią liczbę wielowymiarowych digrafów tak, żeby każdy z nich posiadał dokładnie jedną drogę skończoną do wierzchołka v_i . Częściową dekompozycję pokazano na rys. 4. Następnie dla każdej drogi skończonej wyznaczamy iloczyn wag.

Tabela 1. Iloczyn wag drogi skończonej

Rysunek	Waga	Rysunek	Waga
rys. 4 (a-1)	$w(s_1, v_1)B_{-1,0}z_2^{-1}$	...	...
rys. 4 (a-2)	$w(s_1, v_1)B_{0,-1}z_1^{-1}$	rys. 4 (f-2)	$w(s_1, v_3)B_{0,-1}z_1^{-1} \cdot z_1^{-1} z_2^{-2}$
rys. 4 (a-3)	$w(s_1, v_1)B_{00}z_1^{-1} z_2^{-1}$	rys. 4 (f-3)	$w(s_1, v_3)B_{00}z_1^{-1} z_2^{-1} \cdot z_1^{-1} z_2^{-2}$
rys. 4 (a-4)	$w(s_1, v_1)B_{1,-1}z_1^{-2}$	rys. 4 (f-4)	$w(s_1, v_3)B_{1,-1}z_1^{-2} \cdot z_1^{-1} z_2^{-2}$
...	...	rys. 4 (f-5)	$w(s_1, v_3)B_{10}z_1^{-2} z_2^{-1} \cdot z_1^{-1} z_2^{-2}$

Wyznaczamy $n(z_1^{-1}, z_2^{-1})$ poprzez zsumowanie wszystkich wag dróg skończonych a następnie porównujemy współczynniki wielomianów. W wyniku otrzymujemy liniowy układ równań.

Tabela 2. Układ równań

Potęga	Równanie	Potęga	Równanie	Potęga	Równanie
z_1^{-1}	$w(s_1, v_1)_{B_{0,-1}}=4$	$z_1^{-1}z_2^{-4}$	$w(s_1, v_2)_{B_{-1,0}}=0$	$z_1^{-3}z_2^{-2}$	$w(s_1, v_2)_{B_{1,-1}}+w(s_1, v_3)_{B_{1,-1}}=0$
z_1^{-2}	$w(s_1, v_1)_{B_{1,-1}}=3$	$z_1^{-2}z_2^{-1}$	$w(s_1, v_1)_{B_{10}}+w(s_1, v_3)_{B_{1,-1}}=0$	$z_1^{-3}z_2^{-3}$	$w(s_1, v_2)_{B_{10}}+w(s_1, v_2)_{B_{1,-1}}+w(s_1, v_3)_{B_{10}}=0$
z_2^{-1}	$w(s_1, v_1)_{B_{-1,0}}=5$	$z_1^{-2}z_2^{-2}$	$w(s_1, v_2)_{B_{0,-1}}+w(s_1, v_3)_{B_{0,-1}}+w(s_1, v_3)_{B_{10}}=0$	$z_1^{-3}z_2^{-4}$	$w(s_1, v_2)_{B_{10}}+w(s_1, v_2)_{B_{0,-1}}=0$
z_2^{-2}	$w(s_1, v_3)_{B_{-1,0}}=1$	$z_1^{-2}z_2^{-3}$	$w(s_1, v_2)_{B_{00}}+w(s_1, v_2)_{B_{0,-1}}+w(s_1, v_3)_{B_{00}}=1$	$z_1^{-3}z_2^{-5}$	$w(s_1, v_2)_{B_{00}}=0$
$z_1^{-1}z_2^{-1}$	$w(s_1, v_1)_{B_{00}}+w(s_1, v_3)_{B_{0,-1}}=0$	$z_1^{-2}z_2^{-4}$	$w(s_1, v_2)_{B_{00}}=0$	$z_1^{-4}z_2^{-4}$	$w(s_1, v_2)_{B_{1,-1}}=0$
$z_1^{-1}z_2^{-2}$	$w(s_1, v_3)_{B_{00}}=1$	$z_1^{-2}z_2^{-5}$	$w(s_1, v_2)_{B_{-1,0}}=0$	$z_1^{-4}z_2^{-5}$	$w(s_1, v_2)_{B_{10}}=0$
$z_1^{-1}z_2^{-3}$	$w(s_1, v_2)_{B_{-1,0}}+w(s_1, v_3)_{B_{-1,0}}=1$	$z_1^{-3}z_2^{-1}$	$w(s_1, v_3)_{B_{10}}=0$		

Rozwiązujemy powstały układ równań. W wyniku otrzymujemy następujące macierze **B**.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{-1,0} &= \begin{bmatrix} w(s_1, v_1)_{B_{-1,0}} \\ w(s_1, v_2)_{B_{-1,0}} \\ w(s_1, v_3)_{B_{-1,0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{0,-1} = \begin{bmatrix} w(s_1, v_1)_{B_{0,-1}} \\ w(s_1, v_2)_{B_{0,-1}} \\ w(s_1, v_3)_{B_{0,-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{00} = \begin{bmatrix} w(s_1, v_1)_{B_{00}} \\ w(s_1, v_2)_{B_{00}} \\ w(s_1, v_3)_{B_{00}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_{1,-1} &= \begin{bmatrix} w(s_1, v_1)_{B_{1,-1}} \\ w(s_1, v_2)_{B_{1,-1}} \\ w(s_1, v_3)_{B_{1,-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{10} = \begin{bmatrix} w(s_1, v_1)_{B_{10}} \\ w(s_1, v_2)_{B_{10}} \\ w(s_1, v_3)_{B_{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)
 \end{aligned}$$

Transmitancja ściśle właściwa (18) ma realizację dodatnią ściśle właściwą $R(T_{sw})$, gdzie macierze dane są (20), (21) i (22).

Z powyższych rozważań wynika bardzo ważny wniosek. Nie zawsze istnieje realizacja dodania mino, iż jesteśmy w stanie wyznaczyć elementy macierzy stanu. Żeby realizacja była zawsze możliwa do wyznaczenia należałoby skonstruować ją w postaci kanonicznej. W postaci kanonicznej realizacji tracimy na rozmiarze układu.

6. WNIOSKI I SPOSTRZEŻENIA

Problem realizacji można podzielić na dwa podzadania. Podzadanie pierwsze związane jest z wyznaczeniem macierzy stanu układu opisanego za pomocą macierzy transmitancji. Można je rozwiązać używając teorii wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań, która została zaprezentowana w Punkcie 2.2. Podzadanie drugie związane jest z wyznaczeniem pozostałych macierzy układu. W zadaniu tym wielowymiarowe grafy skierowane oddziaływań służą do wyznaczenia układu równań, który następnie może zostać rozwiązany za pomocą znanych metod numerycznych.

Należy zauważyć, iż siłą tej metody jest to, iż uzyskany układ równań nie jest zależny od iloczynu współczynników wielomianu $n(z_1^{-1}, z_2^{-1})$, a zatem jest to układ liniowy. Istnieje wiele metod numerycznych, które w efektywny i szybki sposób wyznaczają rozwiązanie takiego układu równań.

Największym problemem z punktu widzenia użytkownika, który chciałby "ręcznie" rozwiązać zadanie, jest duża ilość wielowymiarowych grafów skierowanych oddziaływań, uzyskiwanych w wyniku dekompozycji digrafu wyjściowego. Problem ten znika w przypadku zastosowania metody jako algorytmu komputerowego. Wówczas dekompozycja wielowymiarowego digrafu jest zagadnieniem bardzo prostym, a analiza digrafów nie posiadających cykli ani obwodów jest bardzo szybka. Kolejną zaletą jest to, iż algorytmy grafowe są z punktu widzenia obliczeń komputerowych algorytmami bardzo prostymi, a zarazem bardzo szybkimi, a zatem rozmiar układu nie będzie miał wielkiego wpływu na szybkość wyznaczenia układu równań bądź wielu układów równoległe. Trzeba również dodać, iż macierze rozpatrywanych układów liniowych są macierzami rzadkimi, co zdecydowanie skraca czas pracy algorytmu komputerowego i powoduje mniejsze wymagania, jeżeli chodzi o moc obliczeniową komputera.

LITERATURA

1. Benvenuti L., Farina L., Anderson B.D.O and De Bruyne F.: *Minimal positive realization of transfer functions with positive Real poles*, IEEE Trans. Circuit Syst. I, vol. 47, pp. 1370-1377, Sept. 2000.
2. Benvenuti L., De Santis A. and Farina L., *Positive Systems*, ser. Lecture Notes on Control and Information Sciences 294, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2003.
3. Chartrand G., Lesniak L. *Graphs & Digraphs*. Chapman & Hall/CRC.
4. Eising R., *Realization and stabilization of 2-D systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, No. 5, October 1997, pp. 793-799.
5. Farina L., *Positive realizations of linear systems*, Syst. Control Lett., vol. 26, no. 1, pp. 1-9, Sept. 1995.
6. Fornasini E., Valcher M.E., *Primitivity of Positive Matrix Pair: Algebraic Characterization, Graph Theoretic Description and 2D System Interpretation*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 19, no. 1, pp. 71-88, January 1998.
7. Fornasini E. and Valcher M.E., *Controllability and reachability of 2D positive systems: a graph theoretic approach*. IEEE Transaction on Circuits and Systems I Regular Papers, vol. 52, No. 3, March 2005, pp. 576- 585.
8. Kaczorek T., *Positive 1D and 2D Systems*. Springer-Verlag London 2002.
9. Kaczorek T. *Positive 2D systems with delays*. 11th IEEE Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (CD), Międzyzdroje 2005.