Pomiary Automatyka Robotyka, ISSN 1427-9126, R. 20, Nr 4/2016, 5–8, DOI: 10.14313/PAR_222/5

Punktowa zupełność oraz punktowa degeneracja wybranej klasy układów dyskretnych singularnych niecałkowitego rzędu

Rafał Kociszewski
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Streszczenie: W pracy podano kryteria punktowej zupełności i punktowej degeneracji układów liniowych dyskretnych singularnych niecałkowitego rzędu. Pokazano, że przy zastosowaniu pewnych przekształceń, można oceny punktowej zupełności lub degeneracji dokonywać stosując kryteria jak dla układów standardowych niecałkowitego rzędu. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

Słowa kluczowe: punktowa zupełność, punktowa degeneracja, rząd niecałkowity, układ singularny

1. Wprowadzenie

Punktowa zupełność i punktowa degeneracja to obok sterowalności, osiągalności oraz obserwowalności podstawowe zagadnienie dotyczące właściwości obiektu sterowania. W ogólnym przypadku punktowa zupełność oznacza, że możliwe jest osiągnięcie dowolnego zadanego stanu końcowego przez odpowiedni dobór warunków początkowych w układzie. Zagadnieniem przeciwnym do punktowej zupełności jest punktowa degeneracja [1]. Punktowa zupełność i punktowa degeneracja, począwszy od pracy [14] jest od wielu lat tematem licznych publikacji. Różne podejście do analizy tego problemu w odniesieniu do układów ciągłych oraz dyskretnych rzędu całkowitego i niecałkowitego można znaleźć między innymi w wybranych z tej dziedziny pracach [1–8, 10–15].

W ostatnich kilku latach można zaobserwować intensywny rozwój teorii układów niecałkowitego rzędu. W tej klasie układów znajdują się między innymi układy singularne, które wykorzystywane są do modelowania pewnych procesów występujących nie tylko w naukach technicznych. Umożliwiają one dokładniejsze przedstawienie istniejących tam zjawisk. Podstawowe problemy takie jak stabilność, osiągalność, a także wiele innych rezultatów z zakresu analizy tej klasy układów dynamicznych można znaleźć w [5] oraz cytowanej tam literaturze.

W pracy zostanie rozpatrzony problem obserwowalności układów dyskretnych singularnych standardowych niecałkowitego rzędu α z przedziału [0, 1].

Autor korespondujący:
Rafał Kociszewski, r.kociszewski@pb.edu.pl

Artykuł recenzowany
nadesłany 10.10.2016 r., przyjęty do druku 02.12.2016 r.

2. Sformułowanie problemu

W pracy będą stosowane następujące oznaczenia: $\Re^{n\times m}$ – zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach rzeczywistych oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$, Z_+ – zbiór liczb całkowitych dodatnich, I_n – macierz jednostkowa $n\times n$.

Weźmy pod uwagę dyskretny singularny układ liniowy opisany równaniem stanu niecałkowitego rzędu

$$E\Delta^\alpha x_{i+1} = Ax_i,\ i \in Z_+, \tag{1}$$

gdzie $0 < \alpha < 1$ jest rzędem niecałkowitym (ułamkowym) $x_i \in \Re^n$ jest wektorem stanu, zaś $A \in \Re^{n\times n}$. Różnica niecałkowitego rzędu zdefiniowana jest zależnością

$$\Delta^\alpha x_i = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{\alpha}{k}x_{i-k} \tag{2}$$

przy czym

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{dla } k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3}$$

Zakładamy, że pęk macierzy (E, A) jest regularny, tj.

$$\det[Ez - A] \neq 0 \tag{4}$$

dla pewnego $z \in \boldsymbol{C}$ (ciało liczb zespolonych). Przy spełnieniu warunku (4) zawsze istnieje taka para nieosobliwych macierzy $P,\ Q \in \Re^{n\times n}$, że [10]

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},\quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix},\quad n_1 + n_2 = n, \tag{5}$$

gdzie n_1 jest równe rzędowi wielomianu $\det[Ez - A]$, $A_1 \in \Re^{n_1\times n_1}$, natomiast macierz N jest macierzą nilpotentną, tj. $N^\mu = 0$; $N^{\mu-1} \neq 0$ zaś μ jest indeksem nilpotentności.

Mnożąc lewostronnie równanie przez macierz $P \in \Re^{n\times n}$ oraz definiując wektor stanu

$$\overline{x}_i = \begin{bmatrix} \overline{x}^{(1)} \\ \overline{x}^{(2)} \end{bmatrix} = Q^{-1}x_i, \quad \overline{x}_i^{(1)} \in \Re^{n_1}, \quad \overline{x}_i^{(2)} \in \Re^{n_2} \tag{6}$$

otrzymamy

$$PEQQ^{-1}\Delta^{\alpha}x_{i+1} = PEQ\Delta^{\alpha}Q^{-1}x_{i+1} = PAQQ^{-1}x_i \tag{7}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\Delta^{\alpha}\begin{bmatrix} \overline{x}_{i+1}^{(1)} \\ \overline{x}_{i+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_i^{(1)} \\ \overline{x}_i^{(2)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Równanie można napisać w poniższych postaciach

$$\Delta^{\alpha}\overline{x}_{i+1}^{(1)} = A_1\overline{x}_i^{(1)} \tag{9}$$

$$N\Delta^{\alpha}\overline{x}_{i+1}^{(2)} = \overline{x}_i^{(2)} \tag{10}$$

Układ singularny został zdekomponowany na dwa niezależne podukłady: układ regularny (standardowy) niecałkowitego rzędu (9) oraz układ ściśle singularny (10).

Głównym celem pracy jest podanie kryteriów punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dyskretnego układu singularnego niecałkowitego rzędu . Zostanie pokazane, że istotne znaczenie przy formułowaniu takich kryteriów odgrywa podział rozważanego układu na podukład opisany równaniem (9) oraz równaniem (10).

3. Główny rezultat

Definicja 1 [5]. Układ singularny niecałkowitego rzędu (1) jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, gdy dla każdego wektora $x_f \in \Re^n$ można tak dobrać stan początkowy $x_0 \in \Re^n$, że $x_N = x_f$.

Definicja 2 [5]. Układ singularny niecałkowitego rzędu jest punktowo zdegenerowany w kierunku wektora v w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in \Re^n$ taki, że dla wszystkich warunków początkowych $x_0 \in \Re^n$ rozwiązanie równania stanu tego układu spełnia warunek $v^T\ x_N = 0$.

Wykorzystując rezultaty podane w pracy [10] można rozwiązanie równania stanu (9) napisać w poniższej postaci

$$\overline{x}_i^{(1)} = \Phi_i\overline{x}_0^{(1)}, \tag{11}$$

gdzie macierz tranzycji Φ_i jest określona zależnością

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i A_{1\alpha} + \sum_{k=2}^{i+1}(-1)^{k-1}\binom{\alpha}{k}\Phi_{i-k+1} \tag{12}$$

przy warunku początkowym $\Phi_0 = I_{n_1}$, zaś

$$A_{1\alpha} = A_1 + I_{n_1}\alpha \tag{13}$$

Natomiast rozwiązanie równania (10) układu ściśle singularnego przy $N = 0$ ma postać

$$\overline{x}_i^{(2)} = 0, \quad i \in Z_+. \tag{14}$$

Ze wzoru (6) wynika, że stan początkowy jest określony następującą zależnością

$$\overline{x}_0 = Q\begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re^n. \tag{15}$$

Uwzględniając powyższe zależności oraz biorąc pod uwagę wzory (11) i (14) można stwierdzić, że o punktowej zupełności lub punktowej degeneracji układu singularnego niecałkowitego rzędu można wnioskować na podstawie punktowej zupełności lub punktowej degeneracji układu regularnego (9).

Twierdzenie 1. Układ singularny niecałkowitego rzędu jest punktowo zupełny w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rank\,\Phi_N = n_1. \tag{16}$$

Dowód. Ze wzoru (11) dla dyskretnej chwili $i = N \geq 1$ otrzymamy $x_f = \Phi_N\overline{x}_0^{(1)}$. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wiadomo, że dla dowolnie przyjętego wektora x_f równanie to ma rozwiązanie $\overline{x}_0^{(1)} = [\Phi_N]^{-1}x_f$ tylko wtedy, gdy $rank\,\Phi_N = n_1$ $(\det\Phi_N \neq 0)$.

Z warunku Twierdzenia 1 wynika, że dyskretny układ singularny (1) jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$ wtedy i tyko wtedy, gdy warunek ten nie jest spełniony. W tej sytuacji istnieje taki wektor $v \in \Re^{n_1}$, że

$$v^T x_N = v^T\Phi_N x_0^{(1)} = 0. \tag{17}$$

Kierunek degeneracji (wektor v) w tym przypadku wyznacza się z poniższego wzoru

$$v^T\Phi_N = 0. \tag{18}$$

Podsumowaniem podanych wyżej rozważań jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2. Układ singularny niecałkowitego rzędu jest punktowo zdegenerowany w dyskretnej chwili $i = N \geq 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rank\,\Phi_N < n_1. \tag{19}$$

Należy zaznaczyć, że podane rozważania są słuszne także dla $1 < \alpha < 2$, jak i $\alpha = 1$ (układ rzędu rzeczywistego (całkowitego)).

4. Przykład

Należy sprawdzić punktową zupełność układu singularnego niecałkowitego rzędu opisanego równaniem analizowanego w [10] przy $\alpha = 0{,}2$ o macierzach

$$E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1{,}7 & 2{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 1{,}4 \\ 2{,}2 & 4{,}6 & 2{,}2 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Macierze przekształcenia P, Q dla rozważanego układu mają postać

$$P=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ -2 & 4 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{21}$$

Po zastosowaniu (21) do układu otrzymamy

$$\begin{aligned} PEQ&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & N\end{bmatrix}, \qquad n_1=2\\ PAQ&=\begin{bmatrix}0{,}1 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix}, \quad n_2=1\end{aligned} \tag{22}$$

Zgodnie z równaniem (9) mamy

$$\Delta^{0,2}\,\overline{x}_{i+1}^{(1)}=A_1x_i^{(1)}=\begin{bmatrix}0{,}1 & 1\\ 0 & 0{,}2\end{bmatrix}x_i^{(1)}. \tag{23}$$

Wyznaczając macierze tranzycji ze wzoru (12) dla $i = 1, 2$ otrzymamy

$$\Phi_1=A_{1\alpha}=\begin{bmatrix}0,3 & 1\\ 0 & 0,4\end{bmatrix},\ \Phi_2=A_{1\alpha}^2-I_{n_1}\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}=\begin{bmatrix}0,17 & 0,7\\ 0 & 0,24\end{bmatrix}. \tag{24}$$

Rozpatrywany układ jest zawsze punktowo zupełny w chwili $i = N \geq 1$ ponieważ $rank\,\Phi_1=2$, $rank\,\Phi_2=2$. Oznacza to, że w rozpatrywanym układzie niecałkowitego rzędu możliwe jest osiągnięcie dowolnego stanu końcowego $x_N=x_f$ wychodząc z warunku początkowego $x_0\in\Re^{n_1}$ już w chwili $i=N\geq 1$. Załóżmy, że $x_f = [7\ 2]^{\mathrm{T}}$. Z przekształcenia wzoru (11) wynika, że stan początkowy powinien mieć następującą postać

$$x_0=(\Phi_1)^{-1}x_f=\begin{bmatrix}3,33 & -8,33\\ 0 & 2,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6,67\\ 5\end{bmatrix}. \tag{25}$$

5. Podsumowanie

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji układów singularnych dyskretnych niecałkowitego rzędu. Rozważania przeprowadzono biorąc pod uwagę układ dyskretny singularny, który przy spełnieniu warunku (4) można zdekomponować na dwa podukłady. Podano podstawowe definicje oraz warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji. Podane rozważania są słuszne także dla $1<\alpha<2$, jak i dla $\alpha=1$ (układ rzędu rzeczywistego (całkowitego)).

Rozważania można uogólnić na dodatnie układy dyskretne singularne bez opóźnień, jak i z opóźnieniami oraz na układy niecałkowitego rzędu z różnymi rzędami α występującymi w równaniu stanu.

Podziękowania

Pracę wykonano w ramach grantu 2014/13/B/ST7/03467 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

Bibliografia

1. Busłowicz M., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear discrete-time systems of fractional order*, „Automatyka – Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej", nr 151, 2008, 19–24.
2. Busłowicz M., Kociszewski R., Trzasko W., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of positive discrete-time systems with delays*, „Automatyka – Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej", nr 145, 2006, 55–56.
3. Choundhury A.K., *Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems*, „International Journal of Control", Vol. 16, No. 6, 1972, 1083–1100, DOI: 10.1080/0020717720893234.
4. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive linear systems with state-feedbacks*, „Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems", Vol. 4, No. 1, 2010, 3–7.
5. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
6. Kaczorek T., Busłowicz M., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear continuous-time fractional order systems*, „Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems", Vol. 3, No. 1, 2009, 8–11.
7. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive hybrid linear systems described by the general model*, „Archives of Control Sciences", Vol. 20(LVI), No. 2, 2010, 123–131.
8. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of 2D standard and positive Fornasini-Marchesini models*, „COMPEL", Vol. 39, No. 3, 2010, 656–670, DOI: 0.1108/03321641111101131.
9. Kaczorek T., *Singular fractional discrete-time systems*, „Control and Cybernetics", Vol. 40, No. 3, 2011, 753–761.
10. Kociszewski R., *Punktowa zupełność i degeneracja określonej klasy dynamicznych układów ciągło-dyskretnych*, „Pomiary Automatyka Robotyka", R. 15, Nr 2, 2011, 538–545.
11. Olbrot A., *On degeneracy and related problems for linear constant time-lag systems*, „Ricerche di Automatica", Vol. 3, No. 3, 1972, 203–220.
12. Popov V.M., *Pointwise degeneracy of linear time-invariant delay-differential equations*, "Journal of Differential Equations", Vol. 11, No. 3, 1972, 541–561, DOI: 10.1016/0022-0396(72)90066-6.
13. Trzasko W., *Punktowa zupełność i punktowa degeneracja układów dyskretnych niecałkowitego rzędu*, „Pomiary Automatyka Robotyka", R. 16, Nr 2, 2012, 332–337.
14. Weiss L., *Controllability for various linear and nonlinear systems models*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer, Berlin 1970, 250–262.
15. Zmood R.B., McClamroch N.H., *On the pointwise completeness of differential-difference equations*, „Journal of Differential Equations", Vol. 12, No. 3, 1972, 474–486, DOI: 10.1016/0022-0396(72)90020-4.

Pointwise completeness and pointwise degeneracy of selected class of singular linear discrete-time systems

Abstract: The paper presents a problem of pointwise completeness and pointwise degeneracy of selected class of singular linear discrete-time systems. It has been shown that after decomposition of considered system into two independent systems: regular (standard) fractional system and closely singular system (with a nilpotent matrix N) pointwise completeness and pointwise degeneracy conditions can be formulated in reference to standard fractional discrete-time system. Proposed approach is possible if the matrix $N = 0$. The considerations are illustrated by a numerical example

Keywords: pointwise completeness, pointwise degeneracy, fractional order, singular system

dr inż. Rafał Kociszewski
r.kociszewski@pb.edu.pl

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej (2001 r.). Obecnie adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Zainteresowania naukowe autora są skoncentrowane na syntezie optymalizacyjnych metod sterowania oraz wykorzystaniu techniki mikroprocesorowej do realizacji algorytmów sterowania.

Synteza obserwatora pełnego rzędu singularnych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu

Rafał Kociszewski
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Streszczenie: W pracy rozpatrzono zagadnienie syntezy obserwatora pełnego rzędu dla układów liniowych dyskretnych singularnych niecałkowitego rzędu. Sformułowano analityczne kryteria istnienia obserwatora i podano sposób wyznaczania macierzy wzmocnień obserwatora. Rozważania teoretyczne, do których wykorzystano liniowe nierówności macierzowe (LMI) zilustrowano przykładem liczbowym.

Słowa kluczowe: obserwator, układ singularny, dyskretny, liniowa nierówność macierzowa

1. Wprowadzenie

W systemach sterowania istotne znaczenie w kształtowaniu właściwości dynamicznych obiektu sterowania ma dostępność pomiarowa wektora stanu (zmiennych stanu). W praktyce warunek ten nie zawsze bywa spełniony. Zwykle wszystkie, bądź tylko część zmiennych stanu nie jest bezpośrednio mierzalna. Układ dynamiczny, który na podstawie znajomości modelu matematycznego obiektu oraz pomiarowo dostępnej informacji o przebiegach sygnałów wejściowych (wymuszeń) i wyjściowych (odpowiedzi), odtwarza na bieżąco estymatę wektora stanu obiektu nazywany jest obserwatorem.

Do modelowania pewnych procesów występujących nie tylko w naukach technicznych wykorzystuje się opis za pomocą równań, które reprezentują tzw. układy singularne (deskryptorowe). Umożliwiają one dokładniejsze przedstawienie istniejących tam zjawisk [3]. Podstawowe problemy teorii i sterowania tej klasy układów dynamicznych są opisywane w wielu pracach, między innymi w [4, 9, 10, 13, 14].

2. Sformułowanie problemu

W pracy zastosowano oznaczenia: $\Re^{n\times m}$ – zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach rzeczywistych oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$, Z_+ – zbiór liczb całkowitych dodatnich, I_n – macierz jednostkowa $n\times n$. Macierz $Q \in S^n$ jest dodatnio (ujemnie) określona $Q \succ 0$ ($Q \prec 0$) jeżeli jej forma kwadratowa jest dodatnia (ujemna), tzn. $x^TQx > 0$ ($x^TQx < 0$) dla każdego niezerowego $x \in \Re^n$.

Weźmy pod uwagę układ liniowy singularny dyskretny niecałkowitego rzędu opisany w przestrzeni stanu równaniem wejścia oraz równaniem wyjścia o postaci

$$E\Delta^\alpha x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad i \in Z_+, \tag{1}$$

$$y_i = Cx_i \tag{2}$$

gdzie $0 < \alpha < 1$ jest rzędem niecałkowitym, $x_i \in \Re^n$, $u_i \in \Re^m$, $y_i \in \Re^p$ są wektorami stanu, wejścia (wymuszenia) i wyjścia (odpowiedzi) zaś $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, $C \in \Re^{p\times n}$.

Różnica niecałkowitego rzędu zdefiniowana jest poniższą zależnością [5, 6]

$$\Delta^\alpha x_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{i-k} \tag{3}$$

przy czym

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{dla } k = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{4}$$

Zakładamy, że układ (1), (2) jest obserwowalny [8], wektor stanu nie jest bezpośrednio dostępny oraz pęk macierzy (E, A) jest regularny, tj.

$$\det[Ez - A] \neq 0,\ z \in \boldsymbol{C} \text{ (ciało liczb zespolonych).} \tag{5}$$

Równanie stanu układu (1) możemy zapisać w postaci

$$Ex_{i+1} = A_\alpha x_i + \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{i-j+1} + Bu_i, \quad A_\alpha = A + \alpha I_n. \tag{6}$$

Obserwatorem układu singularnego niecałkowitego rzędu (1), (2) nazywamy taki układ, który odtwarza wektor stanu $x_i \in \Re^n$ (jego aproksymację, czyli estymatę $\hat{x}_i \in \Re^n$) na podstawie modelu układu, znanych wartości wymuszenia $u_i \in \Re^m$ i odpowiedzi $y_i \in \Re^p$ tego układu.

Autor korespondujący:
Rafał Kociszewski, r.kociszewski@pb.edu.pl

Artykuł recenzowany
nadesłany 10.10.2016 r., przyjęty do druku 05.12.2016 r.

Obserwator układu singularnego (1), (2) jest opisany poniższym równaniem

$$\hat{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \binom{\alpha}{j} \hat{x}_{k-j+1} = \left[A_\alpha - LC\right]\hat{x}_k + Bu_i + Ly_k,$$
$$A_\alpha = A + \alpha I_n, \quad k \in Z_+, \quad \hat{x}_i \in \Re^n. \tag{7}$$

3. Zasadniczy rezultat

Niech
$$e_i = x_i - \hat{x}_i \in \Re^n, \quad i \in Z_+, \tag{8}$$

będzie wektorem błędu obserwacji (estymacji). Z równania układu (1), (2) oraz równania obserwatora (7) otrzymujemy równanie dynamiki błędu o postaci

$$e_{i+1} = x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} = Fe_i, \tag{9}$$

gdzie
$$F = \left(A_\alpha - LC\right) \in \Re^{n\times n}. \tag{10}$$

Równanie (9) ma rozwiązania asymptotycznie stabilne jeżeli wszystkie wartości własne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ macierzy (10) mają moduły mniejsze od 1, tj. $|\lambda_k| < 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy błąd estymacji zanika do zera, tzn.

$$\forall \hat{x}_0 \in \Re^n, \quad \lim_{i\to\infty} x_i - \hat{x}_i = 0, \tag{11}$$

a obserwator jest asymptotycznie stabilny.

Spełnienie powyższego warunku oznacza, że macierz F (10) musi być macierzą Schura. Zadanie syntezy obserwatora pełnego rzędu (7) układu (1), (2) (dla $0 < \alpha < 1$) możemy sformułować następująco:

Dane są macierze E, A, B, C układu (1), (2). *Poszukujemy macierz wzmocnień L obserwatora* (7), *taką, że $\hat{x}_i \to x_i$, zaś $F = (A_\alpha - LC) \in \Re^{n\times n}$ jest macierzą Schura.*

Do rozwiązania powyższego zadania można w prosty sposób wykorzystać aparat liniowych nierówności macierzowych (LMI). Synteza obserwatora zostanie wówczas sprowadzona do standardowego problemu dopuszczalności, tj. istnienia rozwiązania formułowanego w ramach LMI.

Liniowa nierówność macierzowa kanonicznej postaci jest wyrażona w poniższy sposób [1]

$$F\ x\ :\ F_0 \quad \sum_{i\ 1}^{m} x_i F_i \succ 0, \tag{12}$$

gdzie $x \in \Re^m$ jest zmienną, zaś macierze symetryczne $F_i = F_i^T \in \Re^{n\times n}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ są dane. Warunek LMI (12) jest spełniony, jeżeli zbiór rozwiązań (wypukły) $\{x \mid F(x) \succ 0\}$ jest niepusty.

Na podstawie podanych wyżej zależności możemy napisać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Dla układu niecałkowitego rzędu (1), (2) istnieje obserwator pełnego rzędu (7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $L \in \Re^{n\times n}$ taka, że $F = (A_\alpha - LC) \in \Re^{n\times n}$ jest macierzą Schura. ■

Jest dobrze znany fakt, że układ dyskretny całkowitego rzędu jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dodatnio określonej diagonalnej macierzy P (zmiennej) jest spełniona następująca nierówność

$$P - A^T PA \succ 0, \quad P = \mathrm{diag}\left(p_1, \ldots, p_n\right) \succ 0. \tag{13}$$

Uwzględniając (13) zadanie syntezy asymptotycznie stabilnego obserwatora układu (1), (2) sprowadza się do wyznaczenia takiej macierzy $L \in \Re^{n\times p}$, że poniższa nierówność

$$P - \left(A_\alpha - LC\right)^T P\left(A_\alpha - LC\right) \succ 0 \Rightarrow P - F^T PF \succ 0, \tag{14}$$

jest spełniona względem zmiennej $P = \mathrm{diag}\ p_1, \ldots, p_n \succ 0$.

Stosując do (14) lemat o uzupełnieniu Schura [1] możemy napisać

$$P - F^T PF = \begin{bmatrix} P & F \\ F^T & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{15}$$

Po przekształceniu (15) przez kongruencję, tj.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & F \\ F^T & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \succ 0, \tag{16}$$

otrzymamy

$$\begin{bmatrix} P & F^T P \\ PF^T & P \end{bmatrix} \succ 0. \tag{17}$$

Wymnażając nierówność (17) lewo i prawostronnie przez $P^{-1} \succ 0$, a następnie dokonując zamiany zmiennych: $P^{-1} = Q$ oraz $Y = P^{-1}L$ otrzymamy nierówność w postaci

$$\begin{bmatrix} Q & QF - YC \\ F^T Q - C^T Y^T & Q \end{bmatrix} \succ 0, \quad (QF - YC) \geq 0. \tag{18}$$

Twierdzenie 2. Obserwator (7) układu (1), (2) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność LMI (18) względem macierzy $Q = P^{-1}$ oraz $Y \in \Re^{n\times p}$. Macierz obserwatora $L \in \Re^{n\times p}$ jest określona zależnością

$$L = YQ^{-1}. \tag{19}$$

■

Warunek LMI (18) można sprawdzić w środowisku programowym, przeznaczonym do rozwiązywania zagadnień optymalizacji wypukłej, w której warunki LMI są zapisane w postaci kanonicznej. Można wykorzystać pakiet obliczeniowy SeDuMi oraz działający z nim preprocesor YALMIP, funkcjonujący w formie dodatkowych bibliotek w środowisku MATLAB.

Na ogół istnienie obserwatora rozważamy na określonym przedziale czasu od chwili początkowej do chwili bieżącej. Ponieważ asymptotyczna stabilność systemu, dla którego projektowany jest obserwator implikuje, że błąd estymacji obserwatora dąży do zera, przez co estymowane zmienne stanu dążą do oryginalnych zmiennych stanu, można zakładać, że analiza poprawnie zaprojektowanego obserwatora kończy się na tym przedziale czasowym. Sytuacją nie uwzględnianą w niniejszej pracy jest obserwator uruchamiany w chwili, gdy układ obserwowany działa przez pewien okres czasu W takiej sytuacji zawsze występuje różnica początkowa estymaty i wektora stanu układu w dyskretnej chwili $i = 0$ oraz błąd estymacji wynikający z tego, że obserwator „nie bierze" pod uwagę nieznanych wartości wyjścia i wejścia układu z chwil przed jego uruchomieniem. Błąd estymacji może zostać zminimalizowany asymp-

Macierze przekształcenia P, Q dla rozważanego układu mają postać

$$P=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ -2 & 4 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{21}$$

Po zastosowaniu (21) do układu otrzymamy

$$\begin{aligned} PEQ&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & N\end{bmatrix}, & n_1=2\\ PAQ&=\begin{bmatrix}0{,}1 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix}, & n_2=1\end{aligned} \tag{22}$$

Zgodnie z równaniem (9) mamy

$$\Delta^{0,2}\overline{x}_{i+1}^{(1)}=A_1x_i^{(1)}=\begin{bmatrix}0{,}1 & 1\\ 0 & 0{,}2\end{bmatrix}x_i^{(1)}. \tag{23}$$

Wyznaczając macierze tranzycji ze wzoru (12) dla $i = 1, 2$ otrzymamy

$$\Phi_1=A_{1\alpha}=\begin{bmatrix}0{,}3 & 1\\ 0 & 0{,}4\end{bmatrix},\ \Phi_2=A_{1\alpha}^2-I_{n_1}\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}=\begin{bmatrix}0{,}17 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}24\end{bmatrix}. \tag{24}$$

Rozpatrywany układ jest zawsze punktowo zupełny w chwili $i = N \geq 1$ ponieważ $rank\,\Phi_1=2$, $rank\,\Phi_2=2$. Oznacza to, że w rozpatrywanym układzie niecałkowitego rzędu możliwe jest osiągnięcie dowolnego stanu końcowego $x_N=x_f$ wychodząc z warunku początkowego $x_0\in\Re^{n_1}$ już w chwili $i=N\geq 1$. Załóżmy, że $x_f=[7\ 2]^{\mathrm{T}}$. Z przekształcenia wzoru (11) wynika, że stan początkowy powinien mieć następującą postać

$$x_0=(\Phi_1)^{-1}x_f=\begin{bmatrix}3{,}33 & -8{,}33\\ 0 & 2{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6{,}67\\ 5\end{bmatrix}. \tag{25}$$

5. Podsumowanie

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji układów singularnych dyskretnych niecałkowitego rzędu. Rozważania przeprowadzono biorąc pod uwagę układ dyskretny singularny, który przy spełnieniu warunku (4) można zdekomponować na dwa podukłady. Podano podstawowe definicje oraz warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji. Podane rozważania są słuszne także dla $1<\alpha<2$, jak i dla $\alpha=1$ (układ rzędu rzeczywistego (całkowitego)).

Rozważania można uogólnić na dodatnie układy dyskretne singularne bez opóźnień, jak i z opóźnieniami oraz na układy niecałkowitego rzędu z różnymi rzędami α występującymi w równaniu stanu.

Podziękowania

Pracę wykonano w ramach grantu 2014/13/B/ST7/03467 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

Bibliografia

1. Busłowicz M., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear discrete-time systems of fractional order*, „Automatyka – Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej", nr 151, 2008, 19–24.
2. Busłowicz M., Kociszewski R., Trzasko W., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of positive discrete-time systems with delays*, „Automatyka – Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej", nr 145, 2006, 55–56.
3. Choundhury A.K., *Necessary and sufficient conditions of pointwise completeness of linear time-invariant delay-differential systems*, „International Journal of Control", Vol. 16, No. 6, 1972, 1083–1100, DOI: 10.1080/0020717720893234.
4. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive linear systems with state-feedbacks*, „Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems", Vol. 4, No. 1, 2010, 3–7.
5. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
6. Kaczorek T., Busłowicz M., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear continuous-time fractional order systems*, „Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems", Vol. 3, No. 1, 2009, 8–11.
7. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive hybrid linear systems described by the general model*, „Archives of Control Sciences", Vol. 20(LVI), No. 2, 2010, 123–131.
8. Kaczorek T., *Pointwise completeness and pointwise degeneracy of 2D standard and positive Fornasini-Marchesini models*, „COMPEL", Vol. 39, No. 3, 2010, 656–670, DOI: 0.1108/03321641111101131.
9. Kaczorek T., *Singular fractional discrete-time systems*, „Control and Cybernetics", Vol. 40, No. 3, 2011, 753–761.
10. Kociszewski R., *Punktowa zupełność i degeneracja określonej klasy dynamicznych układów ciągło-dyskretnych*, „Pomiary Automatyka Robotyka", R. 15, Nr 2, 2011, 538–545.
11. Olbrot A., *On degeneracy and related problems for linear constant time-lag systems*, „Ricerche di Automatica", Vol. 3, No. 3, 1972, 203–220.
12. Popov V.M., *Pointwise degeneracy of linear time-invariant delay-differential equations*, "Journal of Differential Equations", Vol. 11, No. 3, 1972, 541–561, DOI: 10.1016/0022-0396(72)90066-6.
13. Trzasko W., *Punktowa zupełność i punktowa degeneracja układów dyskretnych niecałkowitego rzędu*, „Pomiary Automatyka Robotyka", R. 16, Nr 2, 2012, 332–337.
14. Weiss L., *Controllability for various linear and nonlinear systems models*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer, Berlin 1970, 250–262.
15. Zmood R.B., McClamroch N.H., *On the pointwise completeness of differential-difference equations*, „Journal of Differential Equations", Vol. 12, No. 3, 1972, 474–486, DOI: 10.1016/0022-0396(72)90020-4.

Pointwise completeness and pointwise degeneracy of selected class of singular linear discrete-time systems

Abstract: The paper presents a problem of pointwise completeness and pointwise degeneracy of selected class of singular linear discrete-time systems. It has been shown that after decomposition of considered system into two independent systems: regular (standard) fractional system and closely singular system (with a nilpotent matrix N) pointwise completeness and pointwise degeneracy conditions can be formulated in reference to standard fractional discrete-time system. Proposed approach is possible if the matrix $N = 0$. The considerations are illustrated by a numerical example

Keywords: pointwise completeness, pointwise degeneracy, fractional order, singular system

dr inż. Rafał Kociszewski
r.kociszewski@pb.edu.pl

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej (2001 r.). Obecnie adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Zainteresowania naukowe autora są skoncentrowane na syntezie optymalizacyjnych metod sterowania oraz wykorzystaniu techniki mikroprocesorowej do realizacji algorytmów sterowania.