Pomiary Automatyka Robotyka, ISSN 1427-9126, R. 20, Nr 4/2016, 9–13, DOI: 10.14313/PAR_222/9

Synteza obserwatora pełnego rzędu singularnych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu

Rafał Kociszewski
Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok

Streszczenie: W pracy rozpatrzono zagadnienie syntezy obserwatora pełnego rzędu dla układów liniowych dyskretnych singularnych niecałkowitego rzędu. Sformułowano analityczne kryteria istnienia obserwatora i podano sposób wyznaczania macierzy wzmocnień obserwatora. Rozważania teoretyczne, do których wykorzystano liniowe nierówności macierzowe (LMI) zilustrowano przykładem liczbowym.

Słowa kluczowe: obserwator, układ singularny, dyskretny, liniowa nierówność macierzowa

1. Wprowadzenie

W systemach sterowania istotne znaczenie w kształtowaniu właściwości dynamicznych obiektu sterowania ma dostępność pomiarowa wektora stanu (zmiennych stanu). W praktyce warunek ten nie zawsze bywa spełniony. Zwykle wszystkie, bądź tylko część zmiennych stanu nie jest bezpośrednio mierzalna. Układ dynamiczny, który na podstawie znajomości modelu matematycznego obiektu oraz pomiarowo dostępnej informacji o przebiegach sygnałów wejściowych (wymuszeń) i wyjściowych (odpowiedzi), odtwarza na bieżąco estymatę wektora stanu obiektu nazywany jest obserwatorem.

Do modelowania pewnych procesów występujących nie tylko w naukach technicznych wykorzystuje się opis za pomocą równań, które reprezentują tzw. układy singularne (deskryptorowe). Umożliwiają one dokładniejsze przedstawienie istniejących tam zjawisk [3]. Podstawowe problemy teorii i sterowania tej klasy układów dynamicznych są opisywane w wielu pracach, między innymi w [4, 9, 10, 13, 14].

2. Sformułowanie problemu

W pracy zastosowano oznaczenia: $\Re^{n\times m}$ – zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach rzeczywistych oraz $\Re^{n} = \Re^{n\times 1}$, Z_+ – zbiór liczb całkowitych dodatnich, I_n – macierz jednostkowa $n\times n$. Macierz $Q \in S^n$ jest dodatnio (ujemnie) określona $Q \succ 0$ ($Q \prec 0$) jeżeli jej forma kwadratowa jest dodatnia (ujemna), tzn. $x^TQx > 0$ ($x^TQx < 0$) dla każdego niezerowego $x \in \Re^n$.

Autor korespondujący:
Rafał Kociszewski, r.kociszewski@pb.edu.pl

Artykuł recenzowany
nadesłany 10.10.2016 r., przyjęty do druku 05.12.2016 r.

Weźmy pod uwagę układ liniowy singularny dyskretny niecałkowitego rzędu opisany w przestrzeni stanu równaniem wejścia oraz równaniem wyjścia o postaci

$$E\Delta^{\alpha} x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad i \in Z_+, \tag{1}$$

$$y_i = Cx_i \tag{2}$$

gdzie $0 < \alpha < 1$ jest rzędem niecałkowitym, $x_i \in \Re^n$, $u_i \in \Re^m$, $y_i \in \Re^p$ są wektorami stanu, wejścia (wymuszenia) i wyjścia (odpowiedzi) zaś $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$, $C \in \Re^{p\times n}$.

Różnica niecałkowitego rzędu zdefiniowana jest poniższą zależnością [5, 6]

$$\Delta^{\alpha} x_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{i-k} \tag{3}$$

przy czym

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{dla } k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{4}$$

Zakładamy, że układ (1), (2) jest obserwowalny [8], wektor stanu nie jest bezpośrednio dostępny oraz pęk macierzy (E, A) jest regularny, tj.

$$\det[Ez - A] \neq 0,\ z \in \boldsymbol{C} \text{ (ciało liczb zespolonych).} \tag{5}$$

Równanie stanu układu (1) możemy zapisać w postaci

$$Ex_{i+1} = A_{\alpha} x_i + \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{i-j+1} + Bu_i, \quad A_{\alpha} = A + \alpha I_n. \tag{6}$$

Obserwatorem układu singularnego niecałkowitego rzędu (1), (2) nazywamy taki układ, który odtwarza wektor stanu $x_i \in \Re^n$ *(jego aproksymację, czyli estymatę* $\hat{x}_i \in \Re^n$ *) na podstawie modelu układu, znanych wartości wymuszenia* $u_i \in \Re^m$ *i odpowiedzi* $y_i \in \Re^p$ *tego układu.*

Obserwator układu singularnego (1), (2) jest opisany poniższym równaniem

$$\hat{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \hat{x}_{k-j+1} = \left[A_\alpha - LC\right]\hat{x}_k + Bu_i + Ly_k,$$
$$A_\alpha = A + \alpha I_n, \quad k \in Z_+, \quad \hat{x}_i \in \Re^n. \tag{7}$$

3. Zasadniczy rezultat

Niech

$$e_i = x_i - \hat{x}_i \in \Re^n, \quad i \in Z_+, \tag{8}$$

będzie wektorem błędu obserwacji (estymacji). Z równania układu (1), (2) oraz równania obserwatora (7) otrzymujemy równanie dynamiki błędu o postaci

$$e_{i+1} = x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} = Fe_i, \tag{9}$$

gdzie

$$F = \left(A_\alpha - LC\right) \in \Re^{n\times n}. \tag{10}$$

Równanie (9) ma rozwiązania asymptotycznie stabilne jeżeli wszystkie wartości własne λ_1, …, λ_n macierzy (10) mają moduły mniejsze od 1, tj. $|\lambda_k| < 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy błąd estymacji zanika do zera, tzn.

$$\forall \hat{x}_0 \in \Re^n, \quad \lim_{i\to\infty} x_i - \hat{x}_i = 0, \tag{11}$$

a obserwator jest asymptotycznie stabilny.

Spełnienie powyższego warunku oznacza, że macierz F (10) musi być macierzą Schura. Zadanie syntezy obserwatora pełnego rzędu (7) układu (1), (2) (dla $0 < \alpha < 1$) możemy sformułować następująco:

Dane są macierze E, A, B, C układu (1), (2). *Poszukujemy macierz wzmocnień L obserwatora* (7), *taką, że $\hat{x}_i \to x_i$, zaś $F = (A_\alpha - LC) \in \Re^{n\times n}$ jest macierzą Schura.*

Do rozwiązania powyższego zadania można w prosty sposób wykorzystać aparat liniowych nierówności macierzowych (LMI). Synteza obserwatora zostanie wówczas sprowadzona do standardowego problemu dopuszczalności, tj. istnienia rozwiązania formułowanego w ramach LMI.

Liniowa nierówność macierzowa kanonicznej postaci jest wyrażona w poniższy sposób [1]

$$F\ x\ :\ F_0 \quad \sum_{i\ 1}^{m} x_i F_i \succ 0, \tag{12}$$

gdzie $x \in \Re^m$ jest zmienną, zaś macierze symetryczne $F_i = F_i^T \in \Re^{n\times n}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ są dane. Warunek LMI (12) jest spełniony, jeżeli zbiór rozwiązań (wypukły) $\{x \mid F(x) \succ 0\}$ jest niepusty.

Na podstawie podanych wyżej zależności możemy napisać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Dla układu niecałkowitego rzędu (1), (2) istnieje obserwator pełnego rzędu (7) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $L \in \Re^{n\times n}$ taka, że $F = (A_\alpha - LC) \in \Re^{n\times n}$ jest macierzą Schura. ■

Jest dobrze znany fakt, że układ dyskretny całkowitego rzędu jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dodatnio określonej diagonalnej macierzy P (zmiennej) jest spełniona następująca nierówność

$$P - A^T PA \succ 0, \quad P = \mathrm{diag}\left(p_1, \ldots, p_n\right) \succ 0. \tag{13}$$

Uwzględniając (13) zadanie syntezy asymptotycznie stabilnego obserwatora układu (1), (2) sprowadza się do wyznaczenia takiej macierzy $L \in \Re^{n\times p}$, że poniższa nierówność

$$P - \left(A_\alpha - LC\right)^T P\left(A_\alpha - LC\right) \succ 0 \Rightarrow P - F^T PF \succ 0, \tag{14}$$

jest spełniona względem zmiennej $P = \mathrm{diag}\ p_1, \ldots, p_n \succ 0$.

Stosując do (14) lemat o uzupełnieniu Schura [1] możemy napisać

$$P - F^T PF = \begin{bmatrix} P & F \\ F^T & P^{-1} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{15}$$

Po przekształceniu (15) przez kongruencję, tj.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & F \\ F^T & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \succ 0, \tag{16}$$

otrzymamy

$$\begin{bmatrix} P & F^T P \\ PF^T & P \end{bmatrix} \succ 0. \tag{17}$$

Wymnażając nierówność (17) lewo i prawostronnie przez $P^{-1} \succ 0$, a następnie dokonując zamiany zmiennych: $P^{-1} = Q$ oraz $Y = P^{-1}L$ otrzymamy nierówność w postaci

$$\begin{bmatrix} Q & QF - YC \\ F^T Q - C^T Y^T & Q \end{bmatrix} \succ 0, \quad (QF - YC) \geq 0. \tag{18}$$

Twierdzenie 2. Obserwator (7) układu (1), (2) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona nierówność LMI (18) względem macierzy $Q = P^{-1}$ oraz $Y \in \Re^{n\times p}$. Macierz obserwatora $L \in \Re^{n\times p}$ jest określona zależnością

$$L = YQ^{-1}. \tag{19}$$

■

Warunek LMI (18) można sprawdzić w środowisku programowym, przeznaczonym do rozwiązywania zagadnień optymalizacji wypukłej, w której warunki LMI są zapisane w postaci kanonicznej. Można wykorzystać pakiet obliczeniowy SeDuMi oraz działający z nim preprocesor YALMIP, funkcjonujący w formie dodatkowych bibliotek w środowisku MATLAB.

Na ogół istnienie obserwatora rozważamy na określonym przedziale czasu od chwili początkowej do chwili bieżącej. Ponieważ asymptotyczna stabilność systemu, dla którego projektowany jest obserwator implikuje, że błąd estymacji obserwatora dąży do zera, przez co estymowane zmienne stanu dążą do oryginalnych zmiennych stanu, można zakładać, że analiza poprawnie zaprojektowanego obserwatora kończy się na tym przedziale czasowym. Sytuacją nie uwzględnianą w niniejszej pracy jest obserwator uruchamiany w chwili, gdy układ obserwowany działa przez pewien okres czasu W takiej sytuacji zawsze występuje różnica początkowa estymaty i wektora stanu układu w dyskretnej chwili $i = 0$ oraz błąd estymacji wynikający z tego, że obserwator „nie bierze” pod uwagę nieznanych wartości wyjścia i wejścia układu z chwil przed jego uruchomieniem. Błąd estymacji może zostać zminimalizowany asymptotycznie do zera wówczas, gdy nieznana przeszłość układu pochodząca z wartości wymuszeń i odpowiedzi układu przestaje mieć wpływ na dynamikę obserwowanego układu.

Przedstawioną teorię syntezy obserwatora pełnego rzędu bazującą na liniowych nierównościach macierzowych można zastosować do układu singularnego, dla którego jest spełniony warunek regularności pęku (5). W takim bowiem przypadku zawsze istnieje para nieosobliwych macierzy P, $Q \in \Re^{n\times n}$ taka, że [7]

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

gdzie n_1 jest równe rzędowi wielomianu $\det[Ez - A]$, $A_1 \in \Re^{n_1\times n_1}$ natomiast macierz N jest macierzą nilpotentną (o zerowych wartościach własnych) z indeksem nilpotentności μ ($N^{\mu} = 0$; $N^{\mu-1} \neq 0$) oraz $n_1 + n_2 = n$. Mnożąc lewostronnie równanie (1) przez macierz $P \in \Re^{n\times n}$ oraz definiując nowy wektor stanu

$$\overline{x}_i = \begin{bmatrix} \overline{x}^{\,1} \\ \overline{x}^{\,2} \end{bmatrix} = Q^{-1}x_i, \quad \overline{x}_i^{\,1} \in \Re^{n_1}, \quad \overline{x}_i^{\,2} \in \Re^{n_2}, \tag{21}$$

otrzymamy

$$PEQQ^{-1}\Delta^{\alpha}x_{i+1} = PEQ\Delta^{\alpha}Q^{-1}x_{i+1} = PAQQ^{-1}x_i + PBu_i, \tag{22}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\Delta^{\alpha}\begin{bmatrix} \overline{x}_{i+1}^{\,1} \\ \overline{x}_{i+1}^{\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_i^{\,1} \\ \overline{x}_i^{\,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u_1, \tag{23}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \;, \quad B_1 \in \Re^{n_1\times m}, \quad B_2 \in \Re^{n_2\times m}, \tag{24}$$

zaś w przypadku równania wyjścia możemy napisać

$$y_i \quad C_1 \quad C_2 \begin{bmatrix} \overline{x}_i^{\,1} \\ \overline{x}_i^{\,2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

gdzie

$$C_1 \quad C_2 = \boldsymbol{Q} \;, \quad C_1 \in \Re^{p\times n_1}, \quad C_2 \in \Re^{p\times n_2}. \tag{26}$$

Równanie (21) oraz (25) można napisać w postaciach definiujących dwa niezależne podukłady wyodrębnione z (1), (2), tj. a) – układ regularny (standardowy) niecałkowitego rzędu, b) – układ ściśle singularny z nilpotentną macierzą N

a)

$$\Delta^{\alpha}\overline{x}_{i+1}^{\,1} = A_1\overline{x}_i^{\,1} + B_1u_i, \tag{27}$$

$$y_i^{\,1} = C_1\overline{x}_i^{\,1}, \tag{28}$$

b)

$$N\Delta^{\alpha}\overline{x}_{i+1}^{(2)} = \overline{x}_i^{(2)} + B_2u_i, \tag{29}$$

$$y_i^{(2)} = C_2\overline{x}_i^{(2)}, \tag{30}$$

przy czym

$$y_i = y_i^{(1)} + y_i^{(2)} = C_1\overline{x}_i^{(1)} + C_2\overline{x}_i^{(2)}. \tag{31}$$

Ponieważ obserwator jest układem, którego charakterystyki są określane przez projektanta w związku z tym do syntezy obserwatora układu (1), (2) można zastosować inne podejście, również oparte na liniowych nierównościach macierzowych, pozwalające jednak na ulokowanie wartości własnych macierzy $F(10)$ (decydującej o dynamice), np. w okręgu o promieniu mniejszym od jedności. Ogólna postać warunku LMI opisującego wypukły obszar stabilności położony w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej z (zbiór D_{stab}) jest następująca [2]

$$D_{stab} = \{z \in C \mid f(z) \prec 0\} \prec 0, \tag{32}$$

gdzie $f(z) = N + Mz + M^T\overline{z}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru, natomiast N i M są macierzami o elementach rzeczywistych, przy czym $N = N^T$. Opisy zbiorów można znaleźć w pracy [2]. W pracy tej pokazano, że dana macierz jest asymptotycznie stabilna, tzn. ma wszystkie wartości własne w obszarze LMI D_{stab} wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność

$$N \otimes P + M \otimes W + M^T \otimes W^T \prec 0, \;\; \mathrm{x} \tag{33}$$

jest spełniona względem zmiennej $P = P^T \succ 0$ oraz zmiennej Y.

Podane w pracy rozważania można bezpośrednio zastosować do układów o różnych niecałkowitych rzędach opisanych następującym równaniem stanu

$$E\Delta^{\overline{\alpha}}x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i \in Z_+,$$

$$x_{i+1} = \Delta^{\overline{\alpha}}x_{i+1} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\,\overline{\alpha}x_{i+1-j}, \tag{34}$$

gdzie ($\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_n$), $\alpha_r \in (0, 1)$, $r = 1, \ldots, n$ oraz

$$x_i = \begin{bmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{bmatrix}, \quad \Delta^{\overline{\alpha}}x_{i+1} = \begin{bmatrix} \Delta^{\alpha_1}x_{i+1}^1 \\ \vdots \\ \Delta^{\alpha_n}x_{i+1}^n \end{bmatrix}, \quad u_i \in \Re^m,$$

$$y_i \in \Re^p, \quad \overline{\alpha}_k = diag\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ k \end{pmatrix} \;\ldots\; \begin{pmatrix} \alpha_n \\ k \end{pmatrix}\right]. \tag{35}$$

Obserwator układu singularnego o równaniu stanu (34) i równaniu wyjścia (2) jest opisany równaniem w poniższej postaci

$$\Delta^{\overline{\alpha}}\hat{x}_{i+1} = \left(A_{\overline{\alpha}} - LC\right)\hat{x}_k + Bu_i + Ly_k, \quad k \in Z_+,$$

$$\hat{x}_{i+1} + \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\,\overline{\alpha}_j\hat{x}_{i+1-j} = \left(A_{\overline{\alpha}} - LC\right)\hat{x}_k + Bu_i + Ly_k. \tag{36}$$

gdzie wektor

$$\hat{x}_i = \hat{x}_i^1 \;\ldots\; \hat{x}_i^n{}^T \in \Re^n, \tag{37}$$

jest estymatą $x_i \in \Re^n$, zaś $L \in \Re^{n\times p}$ jest macierzą obserwatora, którą należy wyznaczyć w procesie syntezy. Należy zauważyć, że warunek istnienia asymptotycznie stabilnego obserwatora układu o różnych niecałkowitych rzędach jest taki sam jak podany w twierdzeniu 1 oraz twierdzeniu 2.

4. Przykład

Dany jest układ dyskretny singularny rozpatrywany w pracy [13] o macierzach

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,153 & 0,045 & 0,069 \\ 0,156 & 0,252 & 0,156 \\ 0,135 & -0,1710 & -0,636 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0,5 \tag{40}$$

Dokonując syntezy obserwatora tego układu zgodnie z podaną wcześniej teorią i wykonując niezbędne obliczenia numeryczne przy wykorzystaniu wymienionych programów otrzymamy podane niżej rezultaty.

Macierz $Q = P^{-1}$ ma postać

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1,0414 & -0,0003 & 0,0019 \\ -0,0003 & 0,9768 & 0,1186 \\ 0,0019 & 0,1186 & 1,0132 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Nierówność LMI (18) ma postać

$$\begin{bmatrix} Q & QF - YC \\ F^T Q - C^T Y^T & Q \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,0414 & -0,003 & 0,0019 & 0,0023 & -0,3698 & 0,0715 \\ -0,0003 & 0,9768 & 0,1186 & -0,3438 & -0,0191 & 0,1359 \\ 0,0019 & 0,1186 & 1,0132 & -0,3163 & -0,4454 & -0,1222 \\ 0,0023 & -0,3438 & -0,3163 & 1,0414 & -0,0003 & 0,0019 \\ -0,3698 & -0,0191 & -0,4454 & -0,0003 & 0,9786 & 0,1186 \\ 0,0715 & 0,1359 & -0,1222 & 0,0019 & 0,1186 & 1,0132 \end{bmatrix} \succ 0 \tag{42}$$

gdzie

$$Y = \begin{bmatrix} 0,6779 & 0,4161 \\ 0,5120 & 0,7314 \\ 0,4728 & 0,3612 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Poszukiwana macierz obserwatora L (19) ma postać:

$$L = \begin{bmatrix} 0,6504 & 0,3993 \\ 0,4745 & 0,7159 \\ 0,4099 & 0,2720 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Łatwo sprawdzić, że obserwator o równaniu (7)

$$\hat{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{0,5}{j} \hat{x}_{k-j+1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0026 & -0,3543 & 0,0690 \\ -0,3185 & 0,0341 & 0,1560 \\ -0,2749 & -0,4430 & -0,1390 \end{bmatrix} \hat{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,2 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0,6504 & 0,3993 \\ 0,4745 & 0,7159 \\ 0,4099 & 0,2720 \end{bmatrix} y_k, \tag{45}$$

jest asymptotycznie stabilny, gdyż macierz $F = (A_\alpha - LC) = A + \alpha I_n - LC$ jest macierzą Schura.

5. Podsumowanie

W pracy rozpatrzono problematykę syntezy obserwatora pełnego rzędu dla układów liniowych dyskretnych singularnych niecałkowitego rzędu. Korzystając z aparatu liniowych nierówności macierzowych (LMI) podano analityczne kryteria istnienia obserwatora oraz sposób wyznaczania macierzy wzmocnień obserwatora. Podane rozważania są słuszne także dla $1 < \alpha < 2$.

Możliwe jest zastosowanie podejścia LMI do syntezy obserwatora: zredukowanego rzędu (obserwatora, który odtwarza tylko część zmiennych stanu), deadbeat oraz funkcyjnego dla układu dodatniego dyskretnego syngularnego, w tym z opóźnieniami.

Podziękowania

Pracę wykonano w ramach grantu 2014/13/B/ST7/03467 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

Bibliografia

1. Boyd S., ElGhaoui L., Feron E., Balakrishnan V., *Linear matrix inequalities in system and control theory.* SIAM, 1994.
2. Chilai M., Gahinet P., *H_∞ design with pole placement constraint: An LMI approach.* IEEE Trans. Autom. Contr. No. 41, 1996, 358–367.
3. Dai L., *Singular Control Systems*, in: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 1989.
4. Duan G., *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, Springer, 2010.
5. Dzieliński A, Sierociuk D., *Observer for discrete fractional order state-space systems.* 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, IFAC FDA '06, 524–529, Porto, Portugal, 19–21 July 2006.
6. Kaczorek T., *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu.* Politechnika Białostocka, Białystok.
7. Kaczorek T., *Singular fractional discrete-time systems.* "Control and Cybernetics", Vol. 40, No. 3, 2011, 753–761.
8. Kociszewski R., *Kryteria obserwowalności układów dyskretnych singularnych niecałkowitego rzędu*, „Pomiary Automatyka Robotyka", R. 16, Nr 2/2012, 328–331.
9. Koenig D., Mammar S., *Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 47, 2002, 2057–2062.
10. Liu P. Zhang Q. Yang X., Yang L., *Passivity and optimal control of descriptor biological complex systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 53, 2008, 122–125.
11. Luenberger D.G., *An introduction to observers.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 16, No. 6, 1971, 596–602.
12. Luenberger D.G., *Dynamic equations in descriptor form.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, 1977, 312–321.
13. Wu A., Feng G., Duan G., *Proportional multiple-integral observer design for discrete-time descriptor linear systems*, International Journal of Systems Science 43(8), 2011, 1492–1503.
14. Xu S.Y., Lam J., *Robust Control and Filtering of Singular Systems*, Springer, 2006.

Full order observer synthesis for singular discrete-time fractional systems

Abstract: The paper is devoted to observer synthesis for linear singular discrete-time fractional systems. The problem of finding a nonnegative gain matrix of the observer such that the observer is asymptotically stable is formulated and solved by the use of linear matrix inequality (LMI) method. The proposed approach to the observer synthesis is illustrated by theoretical example.

Keywords: observer, singular system, discrete-time, linear matrix inequality

dr inż. Rafał Kociszewski
r.kociszewski@pb.edu.pl

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej (2001 r.). Obecnie adiunkt w Katedrze Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Zainteresowania naukowe autora są skoncentrowane na syntezie optymalizacyjnych metod sterowania oraz wykorzystaniu techniki mikroprocesorowej do realizacji algorytmów sterowania.