

Modelowanie matematyczne i badania symulacyjne bioreaktora z wymuszonym napowietrzaniem

Michał Przysiężnik, Krzysztof Bartecki

Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Katedra Automatyki, ul. Prószkowska 76, 45-758 Opole

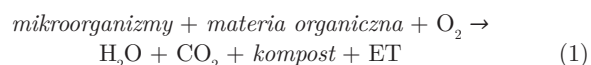
Streszczenie: Proces kompostowania jest powszechnie stosowany w gospodarce odpadami jako metoda przekształcania lub stabilizacji odpadów organicznych. Ze względu na złożony, nieliniowy charakter zachodzących w nim zjawisk biologicznych oraz fizykochemicznych, jest on stosunkowo trudny z punktu widzenia predykcji oraz sterowania. Sterowanie procesem ma tu na celu uzyskiwanie w określonym horyzoncie czasowym produktu finalnego, czyli zwykle kompostu spełniającego określone wymagania jakościowe. W artykule zaprezentowano prosty model matematyczny procesu kompostowania z wymuszonym napowietrzaniem, potencjalnie umożliwiającym realizację wspomnianego celu sterowania. Opracowano model drugiego rzędu, z dwiema wielkościami wejściowymi reprezentującymi zewnętrzne oddziaływania na proces. Na podstawie modelu matematycznego przekształconego do postaci równań stanu, zbudowano w środowisku MATLAB/Simulink model komputerowy bioreaktora, który następnie wykorzystano do przeprowadzenia badań symulacyjnych. Pokazano, że możliwe jest oddziaływanie na proces za pomocą wymuszonego napowietrzania, bezpośrednio wpływającego na zmianę temperatury w bioreaktorze, a w konsekwencji również na czas otrzymania końcowego produktu reakcji. Wyniki analizy właściwości dynamicznych procesu, przeprowadzonej z wykorzystaniem modelu zlinearyzowanego wzdłuż wybranej, nominalnej trajektorii stanu, wskazują na zmienny charakter jego stabilności – począwszy od niestabilności w początkowych fazach reakcji, przez stabilizację w fazie pośredniej, aż do stabilności asymptotycznej, zakończonej osiągnięciem stanu równowagi.

Słowa kluczowe: proces kompostowania, bioreaktor, modelowanie matematyczne, symulacja komputerowa, linearyzacja modelu, stabilność procesu

1. Wprowadzenie

Kompostowanie jest istotnym procesem wykorzystywanym w przemyśle gospodarki odpadami. Jako sposób zagospodarowania odpadów jest powszechnie stosowane w Europie; ma ono duże znaczenie również dla polskiego segmentu gospodarki odpadami [1, 2]. Proces kompostowania jest ważny także ze względu na niskie koszty budowy instalacji procesowych oraz duży potencjał proekologiczny. Proces ten wykorzystywany jest do stabilizacji odpadów oraz do produkcji kompostu [3]. Jego

właściwy przebieg gwarantuje również ograniczenie powstania substancji niebezpiecznych dla człowieka lub szkodliwych dla środowiska [4–6]. Proces kompostowania zachodzi w warunkach tlenowych, w których mikroorganizmy rozkładają materię organiczną. Jego produktami są dwutlenek węgla, woda, energia termiczna (ET) oraz kompost lub tzw. stabilizat w rozumieniu norm prawnych [7]:



Przemysłowy proces kompostowania przebiegać może w systemie otwartym, czyli w pryzmach z okresowym mieszaniem odpadów lub w systemie zamkniętym, czyli w tzw. bioreaktorze. Instalacje pracujące w systemie zamkniętym zazwyczaj mają postać silosów lub kontenerów [8]. W badaniach laboratoryjnych nad procesem kompostowania w systemie zamkniętym najczęściej stosowana jest aparatura w postaci izolowanych termicznie naczyń. Ich wielkość może się wahać, w zależności od potrzeb badawczych, od kilku do kilkuset litrów [9]. Proces kom-

Autor korespondujący:

Michał Przysiężnik, M.Przysieznik@doktorant.po.edu.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 19.06.2022 r., przyjęty do druku 09.03.2023 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

postowania do prawidłowego przebiegu wymaga odpowiedniej ilości tlenu. Ze względu na sposób jego dostarczania, bioreaktory można podzielić na obrotowe [10] oraz z napowietrzaniem, wymuszonym np. przez pompę powietrza [11]. Rysunek 1 przedstawia schemat bioreaktora laboratoryjnego z wymuszonym napowietrzaniem, w którym zachodzi proces rozkładu kompostowanego materiału, czyli tzw. wsadu bioreaktora. Jego parametry techniczne zostały wykorzystane do kalibracji modelu matematycznego, omówionego w dalszej części artykułu.



Rys. 1. Poglądowy schemat bioreaktora z wymuszonym napowietrzaniem

Fig. 1. Illustrative diagram of a bioreactor with forced aeration

Przedstawiony w dalszej części model matematyczny procesu kompostowania zbudowany został w postaci uproszczonej, zgodnie z ogólnymi zasadami modelowania [12] i z wykorzystaniem dostępnych w literaturze modeli matematycznych. Konieczność opracowania takiego modelu podyktowana była następującymi wskazaniem:

Badanie procesu kompostowania na obiekcie rzeczywistym jest dość czasochłonne, gdyż proces ten trwa od kilku do kilkunastu dni [13]. Dlatego dostępność modelu matematycznego powinna znacznie skrócić czas wymagany do przeprowadzenia badań.

Prostota modelu ułatwia jego parametryzację. W przypadku złożonych modeli, uwzględniających kilkadziesiąt lub więcej parametrów, konieczne jest m.in. wykonanie wielu czasochłonnych i kosztownych badań wsadu, czyli materiału podlegającego kompostowaniu.

Badania symulacyjne modeli komputerowych o wysokim stopniu złożoności wymagają wysokiej mocy obliczeniowej i są czasochłonne. Zaproponowany model nie wymaga dużej mocy obliczeniowej, dzięki czemu badania symulacyjne przebiegają stosunkowo szybko.

Opracowany model bioreaktora pozwoli lepiej zrozumieć proces kompostowania i dostarczy wiedzy na temat jego przebiegu, a także ułatwi projektowanie układu sterowania procesem.

Przegląd literatury w zakresie matematycznego modelowania procesu kompostowania dostarcza informacji na temat różnorodności i złożoności podejść w tym zakresie [13]. Badania nad opracowaniem matematycznego modelu omawianych zjawisk prowadzone są już od lat 70. XX w. [14]. W literaturze przedmiotu znaleźć można zarówno modele o parametrach rozłożonych, jak i modele o parametrach skupionych różnych rzędów, czyli z różną liczbą zmiennych stanu reprezentujących wielkości fizyczne istotne z punktu widzenia przebiegu procesu. Wśród nich omawia się zarówno modele deterministyczne, jak i stochastyczne. W ostatnich latach problematyce tej poświęcono szereg publikacji, m.in.:

- przeglądowy artykuł [15] dotyczący modelowania procesu kompostowania oraz jego bilansu energetycznego,
- pracę [16] poświęconą modelowaniu procesu zachodzącego w obiektach małej skali,
- publikację [17] dotyczącą modelowania procesu zachodzącego wewnątrz przyzmy,

– artykuł [18] poświęcony modelowaniu i symulacji procesu w skali pilotażowej.

Omawiany w artykule model procesu zbudowano wykorzystując metodykę oraz informacje zawarte w następujących pozycjach bibliograficznych:

Artykuł [10], w którym zaproponowano model procesu bez napowietrzania. Weryfikacja modelu na obiekcie rzeczywistym dała tutaj wynik pozytywny, jednak wraz ze spadkiem temperatury otoczenia błąd prognozy ulegał zwiększeniu. W celu opracowania prezentowanego modelu wykorzystano zamieszczone w tym artykule równania opisujące energię termiczną powstającą w wyniku procesu.

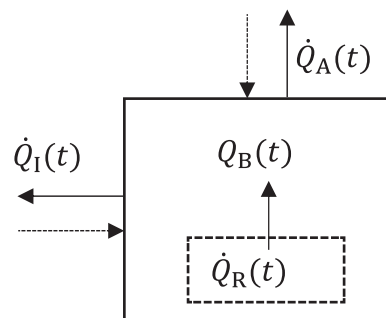
Artykuł [19], w którym zaproponowano model bardziej złożony niż we wspomnianej pracy [10]. Z tej publikacji zaczerpnięto równanie opisujące zmianę szybkości wzrostu mikroorganizmów w funkcji temperatury procesu. Równanie to dokładniej opisuje charakterystykę czasową tej zmiennej stanu, aniżeli równanie użyte w [10]. Z pracy [19] wykorzystano również równanie opisujące strumień strat ciepła, które odpowiednio przekształcono, dzięki czemu możliwa jest symulacja procesu z wymuszonym napowietrzaniem.

Pracę [20], skupiającą się na modelowaniu procesu, w trakcie którego rozkładowi podlegał wsad składający się z dwóch odmiennych materiałów biodegradowalnych. Z tej pracy wykorzystano wzór opisujący straty energii termicznej do otoczenia przez powierzchnię bioreaktora.

Artykuł podzielony został na sześć części. Po niniejszym wprowadzeniu, w części drugiej przedstawiono matematyczny model procesu zachodzącego w bioreaktorze. W części trzeciej omówiono komputerową implementację modelu w środowisku MATLAB/Simulink. Część czwarta zawiera wyniki badań symulacyjnych przeprowadzonych z użyciem modelu komputerowego bioreaktora wraz z ich omówieniem. Część piątą poświęcono analizie właściwości dynamicznych procesu zachodzącego w bioreaktorze, głównie zaś jego stabilności, z wykorzystaniem modelu zlinearyzowanego wzdłuż pewnej nominalnej trajektorii stanu reprezentującej typowy przebieg procesu. W ostatniej, szóstej części zestawiono najważniejsze wnioski o charakterze ogólnym, które uzyskano po przeprowadzeniu badań oraz analizie ich wyników, a także przedstawiono propozycje dalszych badań.

2. Matematyczny model dynamiki procesu

Proces rozkładu materii organicznej, w tym również zachodzący w bioreaktorze proces kompostowania, jest procesem egzotermicznym, tzn. w czasie jego trwania powstaje biologicznie generowana energia cieplna. Należy przy tym zauważyć, że sytuacja taka ma miejsce w typowym przypadku, gdy temperatura procesu jest wyższa od temperatury otoczenia; w przeciwnym razie energia cieplna będzie pobierana z otoczenia do wnętrza bioreaktora.



Rys. 2. Schemat bilansu termicznego bioreaktora. Opis oznaczeń na schemacie umieszczono pod zależnością (2). Strzałki oznaczone linią ciągłą reprezentują typowy kierunek przepływu strumienia ciepła

Fig. 2. Thermal balance diagram of the bioreactor

Na potrzeby budowy modelu matematycznego omawianego bioreaktora przyjęto szereg założeń upraszczających. Zachodzący w nim proces potraktowano jako jednorodny w całym jego przekroju. Zakłada się, że cała objętość bioreaktora jest równomiernie wypełniona wsadem, w którym znajduje się materia organiczna podlegająca procesowi rozkładu. Ze względu na niewielki wpływ na proces pominięto tu przepływ energii termicznej wynikający z entalpii wody. Nie uwzględniono również wpływu stężenia tlenu i wody (wilgotności) na proces. Za najistotniejszą dla przebiegu procesu wielkość fizyczną uznano temperaturę wsadu, mającą kluczowy wpływ na proces namnażania mikroorganizmów.

2.1. Zależności bilansowe

Model matematyczny procesu oparty jest na bilansie termicznym, odnoszącym się do zachodzącego w bioreaktorze procesu kompostowania. Schemat poglądowy, ilustrujący zachodzące tu zależności bilansowe, przedstawiono na Rys. 2. Bilans ten w postaci ogólnej można zapisać następująco:

$$\frac{dQ_B(t)}{dt} = \dot{Q}_R(t) - \dot{Q}_I(t) - \dot{Q}_A(t), \quad (2)$$

gdzie: $Q_B(t)$ – całkowita energia cieplna zgromadzona we wsadzie bioreaktora [J], $\dot{Q}_R(t)$ – strumień ciepła generowanego biologicznie (wskutek rozkładu materii organicznej) [J/h], $\dot{Q}_I(t)$ – strumień ciepła przekazywanego do (względnie odbieranego z) otoczenia wskutek napowietrzania bioreaktora [J/h], $\dot{Q}_A(t)$ – strumień ciepła przekazywanego do (względnie odbieranego z) otoczenia przez powierzchnię reaktora [J/h], t – czas [h].

Poniżej rozwinięto poszczególne składniki równania bilansowego (2). Przyjmujemy tu, że całkowitą energię cieplną wsadu bioreaktora $Q_B(t)$ można wyrazić jako:

$$Q_B(t) = m_B c_B T_B(t) = \rho_B V c_B T_B(t), \quad (3)$$

gdzie: $T_B(t)$ – temperatura wsadu bioreaktora (temperatura procesu) [°C], m_B – masa wsadu bioreaktora [kg], c_B – ciepło właściwe wsadu [J/(kg · K)], ρ_B – gęstość wsadu [kg/m³], V – objętość wsadu (objętość bioreaktora) [m³].

Zmiany energii (3) w czasie można zapisać, przy założeniu stałych wartości parametrów: m_B , c_B , ρ_B oraz V w następującej postaci:

$$\frac{dQ_B(t)}{dt} = m_B c_B \frac{dT_B(t)}{dt} = \rho_B V c_B \frac{dT_B(t)}{dt}. \quad (4)$$

Strumień ciepła $\dot{Q}_R(t)$ generowanego biologicznie (wskutek reakcji rozkładu) opisany jest następującym równaniem podstawowym [10]:

$$\dot{Q}_R(t) = m_S Y \frac{dX(t)}{dt}, \quad (5)$$

gdzie: m_S – masa tzw. substratu, czyli tej części wsadu, która podlega reakcji rozkładu [kg], Y – metaboliczny współczynnik wydzielania ciepła [J/kg], $X(t)$ – zawartość kompostu w substracie [kg/kg].

Masę substratu w równaniu (5) można wyrazić następująco:

$$m_S = \rho_S V (1 - \varepsilon), \quad (6)$$

gdzie: ρ_S – gęstość substratu [kg/m³], ε – porowatość substratu [-].

Z kolei zmiana zawartości kompostu w substracie wskutek jego rozkładu może być opisana następująco [10]:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(t) X(t) \left(1 - \frac{X(t)}{X_{\max}} \right), \quad (7)$$

gdzie: X_{\max} – maksymalna zawartość kompostu w substracie [kg/kg].

Wielkość $\mu(t)$ [h⁻¹] występująca we wzorze (7) reprezentuje tzw. współczynnik tempa wzrostu mikroorganizmów zależny od temperatury procesu $T_B(t)$ i można ją wyznaczyć z następującej zależności [19]:

$$\mu(t) = \mu_{\max} \frac{T_B(t) (2T_{\text{opt}} - T_B(t))}{T_{\text{opt}}^2}, \quad (8)$$

gdzie: μ_{\max} – największa możliwa szybkość wzrostu mikroorganizmów [h⁻¹], T_{opt} – optymalna (ze względu na szybkość namnażania mikroorganizmów) temperatura procesu [°C].

Po uwzględnieniu zależności (6)–(8), równanie (5) można zapisać w następującej postaci:

$$\dot{Q}_R(t) = \rho_S V (1 - \varepsilon) Y \mu(t) X(t) \left(1 - \frac{X(t)}{X_{\max}} \right). \quad (9)$$

Strumień ciepła przepływającego z (względnie do) bioreaktora do (względnie z) otoczenia wskutek aktywnego napowietrzania opisany jest następującą zależnością:

$$\dot{Q}_I(t) = \dot{m}_I(t) c_A (T_B(t) - T_A(t)), \quad (10)$$

gdzie: $\dot{m}_I(t)$ – strumień masowy powietrza wlotowego [kg/h], c_A – ciepło właściwe suchego powietrza [J/(kg · K)], $T_A(t)$ – temperatura otoczenia [°C].

Równanie opisujące przenikanie ciepła przez przegrodę stanowiącą powierzchnię bioreaktora ma następującą postać [19]:

$$\dot{Q}_A(t) = UA(T_B(t) - T_A(t)), \quad (11)$$

gdzie: U – całkowity współczynnik przenikania ciepła [J/(h · m² · K)], A – powierzchnia bioreaktora [m²].

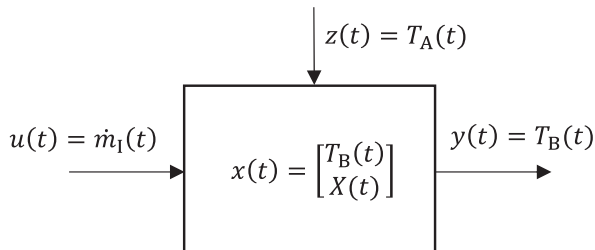
Wyprowadzone zależności bilansowe (2)–(11) przekształcone zostaną w kolejnej części do postaci równań stanu, dogodniejszej dla modelowania komputerowego, a także dla analizy właściwości dynamicznych procesu oraz realizacji potencjalnych zadań sterowania.

2.2. Równania stanu procesu

Zaprezentowane tu równania stanu będą opisywały zmiany w czasie dwóch zmiennych stanu charakteryzujących proces: temperatury wsadu bioreaktora $T_B(t)$ oraz koncentracji kompostu we wsadzie $X(t)$. Zapisane zostaną one w formie dwóch nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu. Taki opis matematyczny procesu, przy założeniu znajomości warunków początkowych oraz oddziaływań zewnętrznych, umożliwi określenie jego stanu w dowolnej chwili czasowej [21].

Na Rys. 3 przedstawiono bioreaktor jako obiekt sterowania, dla którego sygnałami wejściowymi są: strumień masowy wtłaczanego powietrza $\dot{m}_I(t)$ oraz temperatura otoczenia

$T_A(t)$, przy czym zmiany temperatury otoczenia będą rozpatrywane jako wielkość zakłócająca $z(t)$, zaś strumień napowietrzający – jako potencjalny sygnał sterujący procesem $u(t)$. Rolę zmiennych stanu, składających się na wektor stanu procesu $x(t)$ pełnią: temperatura wsadu bioreaktora $T_B(t)$ oraz zawartość kompostu $X(t)$, przy czym $T_B(t)$ jest jednocześnie mierzalnym sygnałem wyjściowym $y(t)$. Wielkość $X(t)$ nie została ujęta na schemacie jako sygnał wyjściowy, ponieważ w warunkach rzeczywistych jest trudno mierzalna.



Rys. 3. Bioreaktor z wymuszonym napowietrzaniem jako obiekt sterowania

Fig. 3. Bioreactor with forced aeration as a control system

Pierwsze z równań stanu, opisujące zmiany w czasie temperatury $T_B(t)$ wsadu bioreaktora, otrzymujemy z równania bilansowego (2), po uwzględnieniu równań (3)–(6) oraz (9)–(11):

$$\frac{dT_B(t)}{dt} = \frac{1}{\rho_B V c_B} \left(\rho_S V (1 - \varepsilon) Y \mu(t) X(t) \left(1 - \frac{X(t)}{X_{max}} \right) - \dot{m}_1(t) c_A (T_B(t) - T_A(t)) - UA (T_B(t) - T_A(t)) \right), \quad (12)$$

z warunkiem początkowym $T_B(0) = T_{B0}$ reprezentującym początkową temperaturę wsadu bioreaktora.

Drugie równanie stanu odnosi się do zmian w czasie zawartości kompostu w substracie $X(t)$ i jest wyrażone bezpośrednio przez równanie (7):

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(t) X(t) \left(1 - \frac{X(t)}{X_{max}} \right) \quad (13)$$

z uwzględnieniem warunku początkowego $X(0) = X_0$, przy czym $\mu(t)$ jest zależną od temperatury $T_B(t)$ szybkością wzrostu mikroorganizmów, opisaną zależnością (8).

Jak wynika z postaci równań stanu (12) i (13), reprezentują one ciągły, nieliniowy, deterministyczny model dynamiki procesu. Parametry stałe występujące w tych równaniach zostały omówione w części 2.1. Ich typowe wartości zaczerpnięte z literatury, tablic fizycznych i badań własnych, wykorzystane później w badaniach symulacyjnych, zostały zestawione w Tab. 1, razem z przykładowymi wartościami warunków początkowych oraz stałych wymuszeń zewnętrznych. Równania stanu bioreaktora (12) i (13) uzupełnić można trywialnym równaniem wyjścia:

$$y(t) = T_B(t), \quad (14)$$

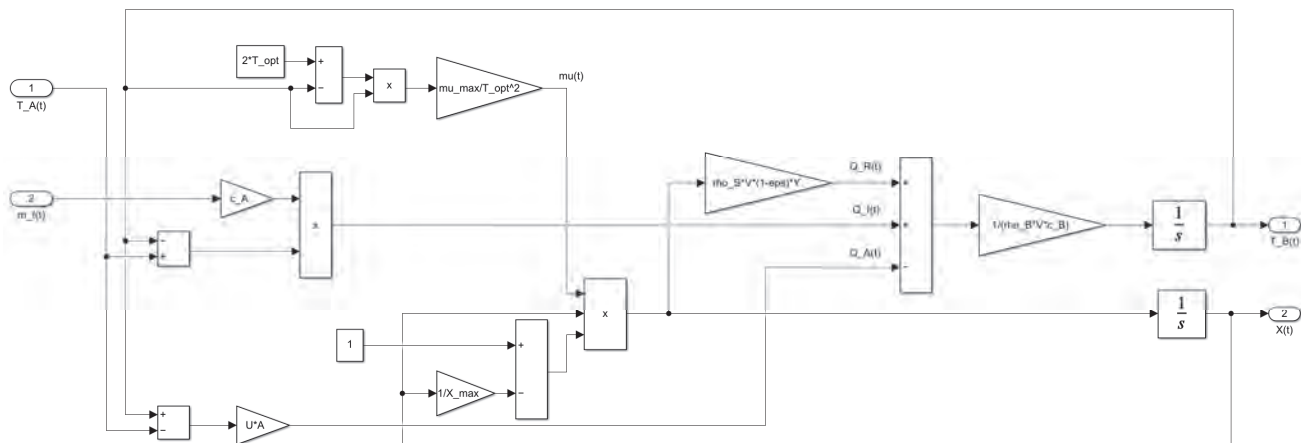
reprezentującym mierzalną wielkość wyjściową procesu.

3. Model komputerowy procesu

Równania stanu (12) i (13) zostały zaimplementowane w środowisku MATLAB/Simulink, a ich graficzną reprezentację przedstawiono na Rys. 4. Równania te, które w części 2.2. przedstawione zostały w klasycznej postaci różniczkowej, zostały tutaj zaimplementowane w alternatywnej postaci całkowej, tzn. z wykorzystaniem bloków całkujących (*Integrator*) ze względu na korzystniejsze właściwości numeryczne operacji całkowania.

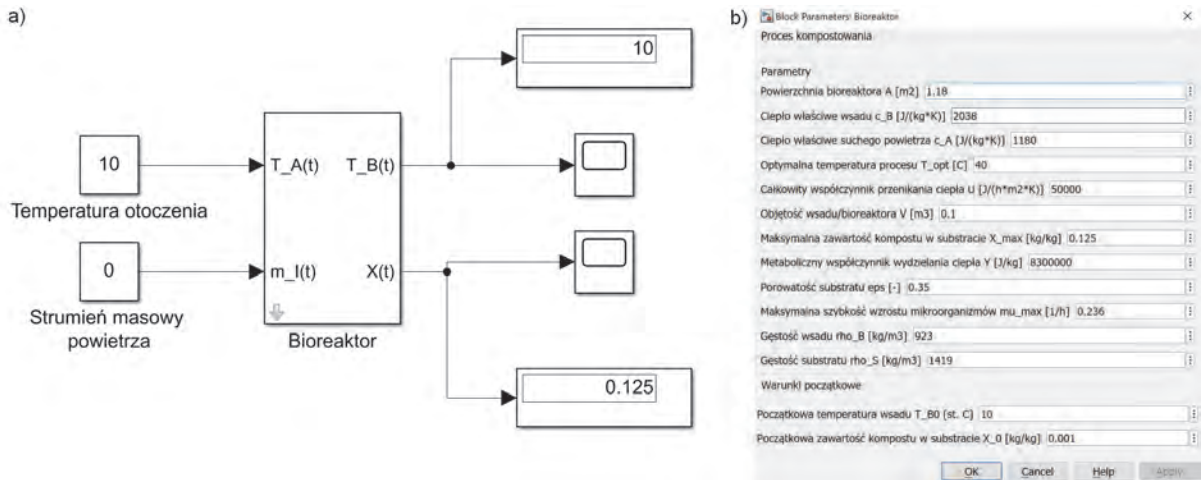
Porównując przedstawiony na Rys. 3 ogólny schemat bioreaktora jako obiektu sterowania ze schematem pokazanym na Rys. 4, widoczna jest również rozbieżność dotycząca liczby sygnałów wyjściowych. Na Rys. 3 wyodrębniono jeden sygnał wyjściowy reprezentujący temperaturę procesu $T_B(t)$; z kolei na Rys. 4 pokazano dwa sygnały wyjściowe, reprezentujące zarówno temperaturę procesu, jak i zawartość kompostu we wsadzie $X(t)$. Wynika to z faktu, że Rys. 3 prezentuje rzeczywistą reprezentację procesu, w której zmienna $X(t)$ jest trudno mierzalna. Natomiast Rys. 4 przedstawia model komputerowy, w którym na potrzeby badań symulacyjnych umożliwiono obserwację pełnego wektora stanu układu $x(t)$, dzięki czemu możliwe będzie śledzenie zmian wartości obydwu jego składowych. Jak wcześniej wspomniano, w warunkach rzeczywistych zazwyczaj możliwy jest jedynie bieżący pomiar temperatury wsadu $T_B(t)$.

Aby ułatwić korzystanie ze szczegółowego modelu przedstawionego na Rys. 4, korzystając z odpowiednich opcji pakietu MATLAB/Simulink dokonano operacji: tzw. grupowania, czyli tworzenia pojedynczego, nadrzędnego bloku reprezentującego cały model procesu (Rys. 5a) oraz tzw. maskowania, czyli zaprojektowania interaktywnego interfejsu (Rys. 5b), umożliwiającego łatwą zmianę wartości parametrów modelu oraz warunków początkowych wyszczególnionych w Tab. 1.



Rys. 4. Model komputerowy procesu kompostowania w środowisku MATLAB/Simulink

Fig. 4. Computer model of the composting process in the MATLAB/Simulink environment



Rys. 5. Wirtualne stanowisko przeznaczone do badań symulacyjnych procesu kompostowania: a) zgrupowany model procesu wraz z „oprzyrządowaniem”; b) okno dialogowe do wprowadzania wartości parametrów

Fig. 5. Virtual stand for simulation tests of the composting process: a) Grouped process model with instrumentation; b) Dialog box for entering parameter values

Tab.1. Parametry procesu, warunki początkowe oraz wymuszenia zewnętrzne uwzględnione w badaniach symulacyjnych

Tab. 1. Process parameters, initial conditions and external signals included in simulation tests

Symbol	Nazwa	Przyjęta wartość	Źródło
A	powierzchnia bioreaktora	1,18 m ²	badania własne
c_B	ciepło właściwe wsadu	2 038 J/(kg · K)	[10]
c_A	ciepło właściwe suchego powietrza	1 180 J/(kg · K)	tablice fizyczne
T_{opt}	optymalna temperatura procesu	40 °C	[19]
U	całkowity współczynnik przenikania ciepła	50 000 J/(h · m ² · K)*	tablice fizyczne
V	objętość wsadu/bioreaktora	0,1 m ³	badania własne
X_{max}	maksymalna zawartość kompostu w substracie	0,125 kg/kg	[20]
Y	metaboliczny współczynnik wydzielania ciepła	8,366 · 10 ⁶ J/kg	[20]
ϵ	porowatość substratu	0,35	[20]
μ_{max}	maksymalna szybkość wzrostu mikroorganizmów	0,236 h ⁻¹	[20]
ρ_B	gęstość wsadu	923 kg/m ³	[10]
ρ_S	gęstość substratu	1 419 kg/m ³	[10]
T_{B0}	początkowa temperatura wsadu	10 °C*	badania własne
X_0	początkowa zawartość kompostu w substracie	0,001 kg/kg*	[10]
$\dot{m}_i(t)$	strumień masowy powietrza wlotowego	0 kg/h*	badania własne
T_A	temperatura otoczenia	10 °C*	ustalenia własne

* Wartości oznaczone gwiazdką podlegały zmianom w trakcie różnych scenariuszy badań symulacyjnych, w celu określenia ich wpływu na przebieg procesu. W przypadku braku doprecyzowania warunków, dla których przebiegały poszczególne badania, należy założyć, że przyjęto wartości zamieszczone w Tab. 1.

4. Badania symulacyjne

W rozdziale przedstawiono wyniki badań symulacyjnych, których głównym celem było dostarczenie najważniejszych informacji na temat właściwości dynamicznych procesu zachodzącego w bioreaktorze. Badania dostarczyły m.in. informacji na temat wpływu wybranych parametrów układu, warunków początkowych oraz sygnałów wejściowych na przebiegi czasowe jego zmiennych stanu. Umożliwiły lepsze zrozumienie samego procesu oraz zachodzących w nim zjawisk. Inną ważną kwestią,

poruszoną w dalszej części artykułu, była analiza właściwości dynamicznych (głównie stabilności) procesu. Jak pokazano w części 5, ze względu na nieliniowość równań stanu (12) i (13), właściwości te silnie zależą od bieżącego punktu pracy układu, tzn. od bieżącego etapu reakcji.

W celu ułatwienia interpretacji zaprezentowanych dalej wyników, istotne jest zrozumienie podstawowych mechanizmów biologicznych wpływających na przebieg procesu, a które krótko zostały omówione poniżej. Równanie (8) pokazuje zależność tempa wzrostu mikroorganizmów $\mu(t)$ od temperatury procesu

$T_B(t)$. Wynika z niego, że najwyższa wartość $\mu(t)$ jest osiągana w temperaturze $T_{opt} = 40\text{ }^\circ\text{C}$. Każda zmiana temperatury procesu w stosunku do wartości T_{opt} spowoduje spadek tempa namnażania się mikroorganizmów; z kolei spadek liczebności ich populacji spowoduje spadek temperatury procesu. Jego „punktami krytycznymi” są, zgodnie z równaniem (8), wartości temperatur: $T_B = 0\text{ }^\circ\text{C}$ oraz $T_B = 80\text{ }^\circ\text{C}$, gdyż wówczas proces namnażania ulega całkowitemu wyhamowaniu. Równanie stanu (13) z kolei pokazuje, że rozkład materii uzależniony jest od tempa wzrostu mikroorganizmów – im jest ono bliższe wartości μ_{max} , tym produkcja kompostu zachodzi szybciej. Natomiast równanie stanu (12) pokazuje, że im szybciej produkowany jest kompost, tym większy jest strumień ciepła biologicznego, które ma znaczny wpływ na temperaturę procesu.

4.1. Odpowiedzi czasowe układu bez napowietrzania

Pierwszą część badań poświęcono wyznaczaniu odpowiedzi układu bioreaktora z wyłączeniem napowietrzaniem, czyli czasowych przebiegów jego zmiennych stanu w przypadku $\dot{m}_i(t) = 0\text{ kg/h}$, przy założeniu stałej temperatury otoczenia $T_A = 10\text{ }^\circ\text{C}$. Analizie poddano odpowiedzi uzyskane dla różnych warunków początkowych T_{B0} , X_0 oraz dla różnych wartości współczynnika przenikania ciepła U .

4.1.1. Wpływ warunków początkowych T_{B0} oraz X_0

Badaniom symulacyjnym poddano pięć porcji wsadu bioreaktora, charakteryzujących się odpowiednio następującymi wartościami początkowymi T_{B0} i X_0 : $10\text{ }^\circ\text{C}$ i $0,001\text{ kg/kg}$, $10\text{ }^\circ\text{C}$ i $0,004\text{ kg/kg}$, $10\text{ }^\circ\text{C}$ i $0,008\text{ kg/kg}$, $20\text{ }^\circ\text{C}$ i $0,001\text{ kg/kg}$ oraz $30\text{ }^\circ\text{C}$ i $0,001\text{ kg/kg}$. Wyniki symulacji dla tych warunków początkowych przedstawione zostały na Rys. 6.

Analiza wyników zaprezentowanych tu wyników pokazuje, że poszczególne warunki początkowe wpływają na zachowanie się procesu w stanie przejściowym, jednak nie mają wpływu na końcowy punkt równowagi układu, tzn. stan, w którym w bioreaktorze znajduje się końcowy produkt reakcji. Można zaobserwować, że gdy początkowa temperatura wsadu T_{B0} jest wyższa od temperatury otoczenia T_A , w początkowej fazie procesu następuje jej spadek, oraz że im jest ona wyższa, tym szybciej otrzymamy produkt końcowy. Z kolei konsekwencją wyższej początkowej zawartości kompostu X_0 będzie szybsze osiągnięcie przez proces

temperatury maksymalnej, co z kolei skutkować będzie wcześniejszym uzyskaniem produktu końcowego.

4.1.2. Wpływ wartości współczynnika przenikania ciepła U

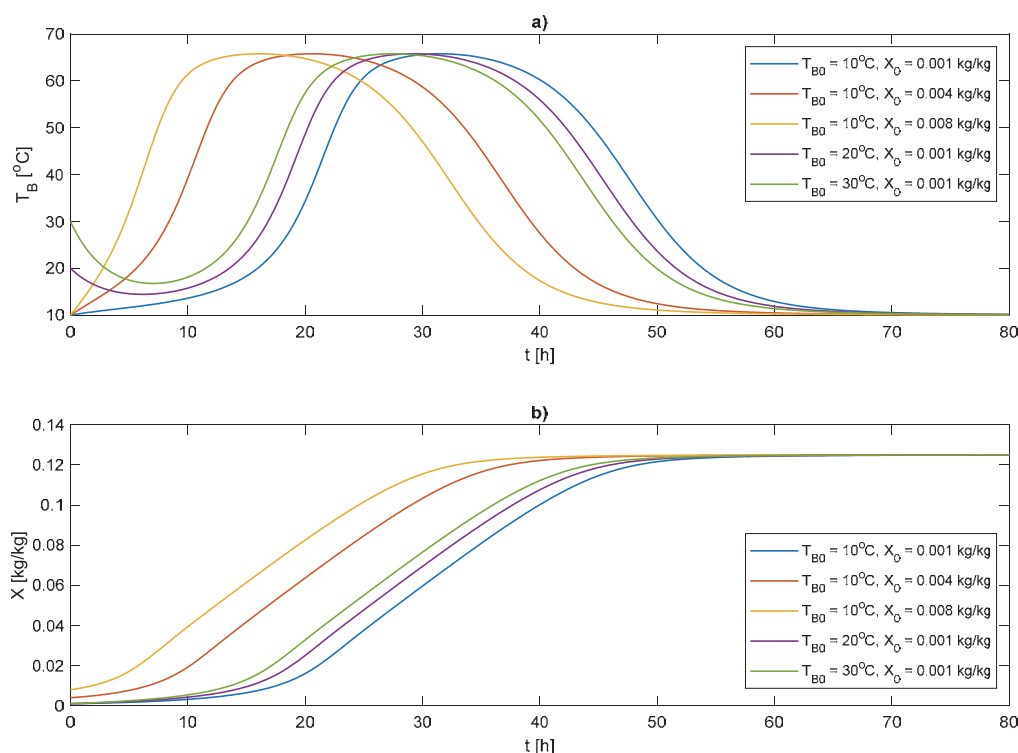
W kolejnym etapie zbadano wpływ na przebieg procesu wartości parametru U , reprezentującego całkowity współczynnik przenikania ciepła. Badania symulacyjne przeprowadzono przyjmując następujące wartości tego parametru: $U = 30, 50, 70, 90$ oraz $110\text{ kJ}/(\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K})$, a ich wyniki zaprezentowano na Rys. 7. Liniją kropkowaną zaznaczono odpowiedzi dla przypadku $U = 50\text{ kJ}/(\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K})$, które wykorzystane zostały dalej w części 5 jako tzw. trajektoria nominalna układu w zadaniu linearyzacji jego równań stanu dla potrzeb analizy właściwości dynamicznych procesu.

Na podstawie przedstawionych wyników można zaobserwować, że im parametr U ma niższą wartość, tym utrata energii cieplnej przez powierzchnię bioreaktora jest mniejsza; z kolei wyższa wartość tego parametru odpowiada zwiększonym stratom energii cieplnej. Z przedstawionych na Rys. 7 odpowiedzi wynika, że do chwili osiągnięcia przez wsad temperatury $T_B = T_{opt} = 40\text{ }^\circ\text{C}$, niższej wartości parametru U odpowiadają wyższe wartości temperatury procesu oraz zawartości kompostu (tzn. proces przebiega intensywniej). Jednak po przekroczeniu tej temperatury dochodzi do odwrócenia tendencji dotyczącej zmiennej $X(t)$. Jeśli parametr U przyjmuje wyższe wartości, to temperatura procesu jest niższa, bliższa temperaturze optymalnej T_{opt} , następstwem czego jest szybsza produkcja kompostu. Przeprowadzone tu badania symulacyjne wykazały zatem, że dla reakcji cechującej się dużą emisją generowanej biologicznie energii cieplnej, wraz ze wzrostem parametru U proces przebiega intensywniej.

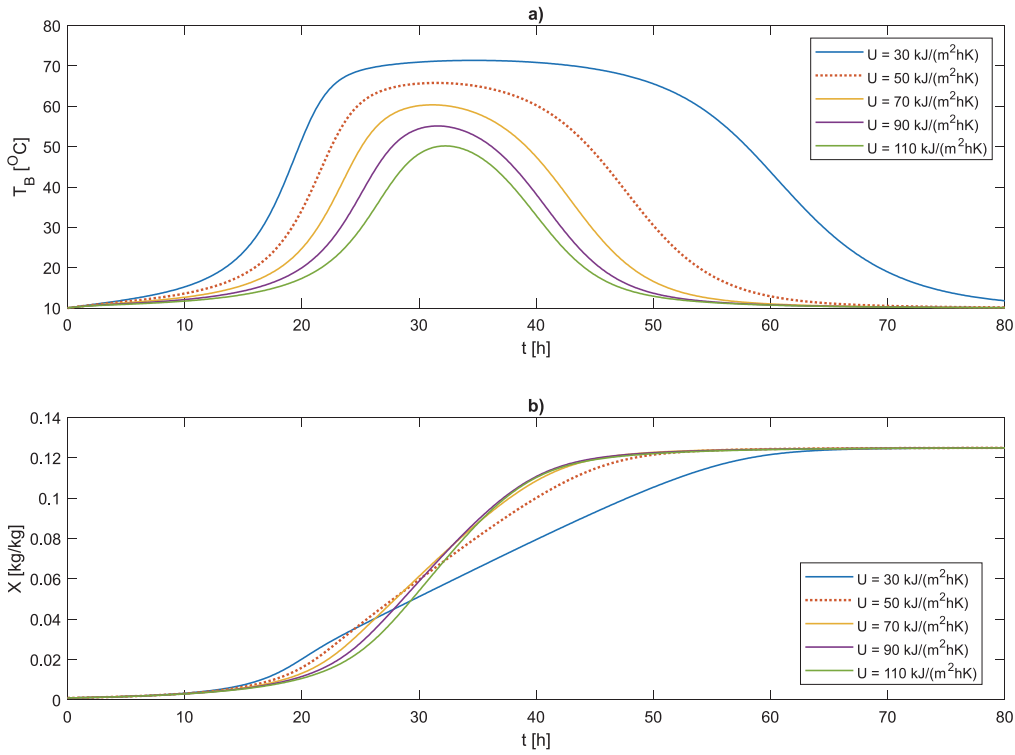
4.1.3. Wpływ temperatury zewnętrznej T_A

Przedstawiono tu wyniki symulacji, mających na celu zbadanie wpływu temperatury otoczenia T_A na intensywność procesu zachodzącego w bioreaktorze. Badania przeprowadzono dla następujących stałych wartości T_A : $5, 15, 25, 35$ oraz $45\text{ }^\circ\text{C}$, zaś ich wyniki zaprezentowano na Rys. 8.

Otrzymane wyniki pokazują, że omawiany proces zachodzi najintensywniej dla „średnich” wartości temperatury otoczenia. Na przykład stosunkowo niska temperatura otoczenia $T_A = 5\text{ }^\circ\text{C}$ hamuje proces namnażania się bakterii w bioreaktorze, w konsekwencji wpływając niekorzystnie na czas otrzymania produktu.

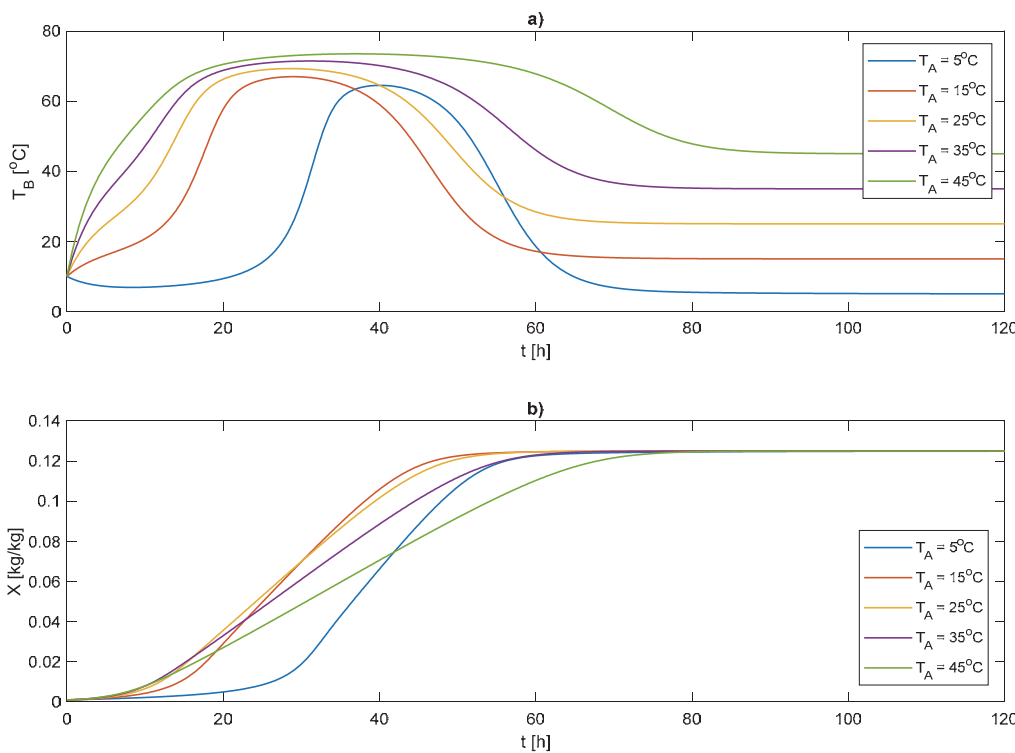


Rys. 6. Wpływ warunków początkowych T_{B0} oraz X_0 na przebieg procesu kompostowania dla a) zmiany temperatury wsadu $T_B(t)$; b) zmiany zawartości kompostu $X(t)$
 Fig. 6. The influence of the initial conditions T_{B0} and X_0 on the composting process for a) Changes in the charge temperature $T_B(t)$; b) Changes in the compost content $X(t)$



Rys. 7. Wpływ wartości współczynnika przenikania ciepła U na przebieg procesu kompostowania dla $\dot{m}_1(t) = 0$; a) zmiany temperatury wsadu $T_B(t)$; b) zmiany zawartości kompostu $X(t)$

Fig. 7. The influence of the heat transfer coefficient U on the composting process for $\dot{m}_1(t) = 0$; a) changes in the charge temperature $T_B(t)$; b) changes in the compost content $X(t)$



Rys. 8. Wpływ wartości temperatury otoczenia T_A na przebieg procesu kompostowania dla $\dot{m}_1(t) = 0$; a) zmiany temperatury wsadu $T_B(t)$; b) zmiany zawartości kompostu $X(t)$

Fig. 8. The influence of the ambient temperature T_A on the composting process for $\dot{m}_1(t) = 0$; a) changes in the charge temperature $T_B(t)$; b) changes in the compost content $X(t)$

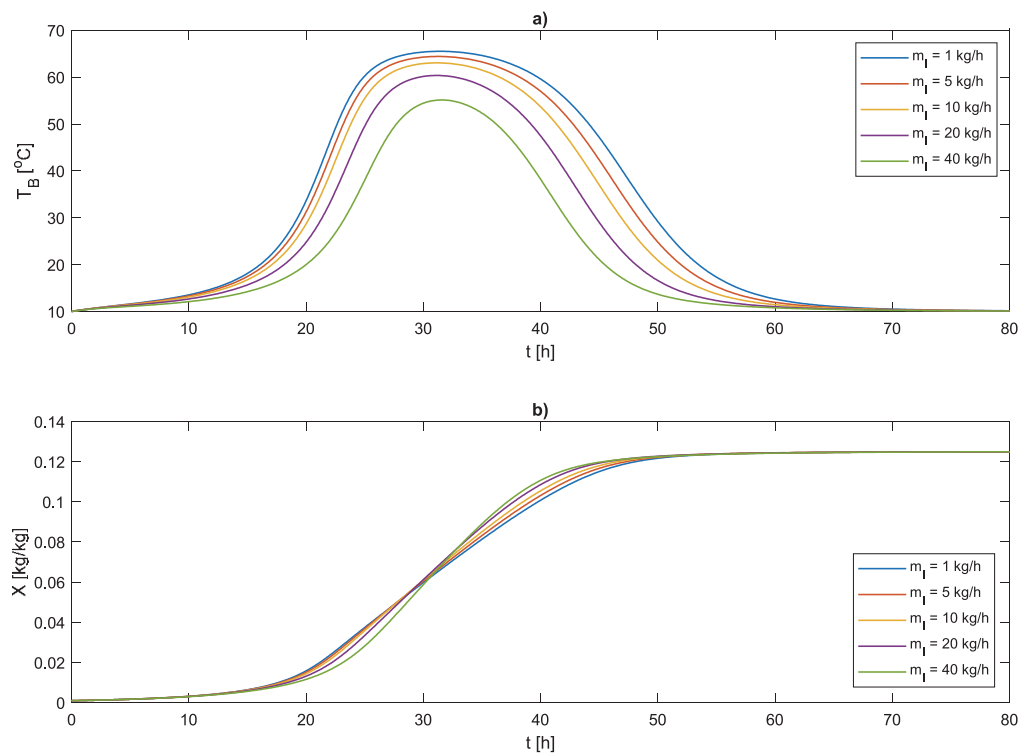
Również bardzo wysoka temperatura $T_A = 45\text{ °C}$ ma niekorzystny wpływ na znajdujące się w bioreaktorze mikroorganizmy – w efekcie czas stabilizacji odpowiedzi układu jest tu jeszcze dłuższy, niż dla $T_A = 5\text{ °C}$.

4.2. Odpowiedzi czasowe układu z wymuszonym napowietrzaniem

Kolejne badania prowadzone były pod kątem wyznaczania odpowiedzi czasowych układu bioreaktora z wymuszeniem zewnętrznym w postaci strumienia masy powietrza wdmuchiwanego poprzez kanał do jego wnętrza (Rys. 1). Sygnały wejściowe układu stanowiły tu: sygnał zakłócający $z(t)$ reprezentowany przez stałą temperaturę zewnętrzną T_A oraz potencjalny sygnał sterujący $u(t)$, czyli strumień masy \dot{m}_1 powietrza wtłaczanego do bioreaktora (patrz Rys. 3).

W warunkach rzeczywistych, poprzez napowietrzanie bioreaktora dostarczamy lub odbieramy z niego energię termiczną, a także wpływamy na zawartość w nim tlenu oraz wody. Jednak przedstawiony w artykule model, ze względu na przyjęte założenia, skupia się tylko na aspekcie przemian termicznych zachodzących w trakcie procesu. Badania symulacyjne, których wyniki zaprezentowano na Rys. 9, obejmowały badanie wpływu na przebieg procesu stałych strumieni napowietrzania, $\dot{m}_1 = \text{const}$, przyjmujących wartości 1–40 kg/h.

Analiza uzyskanych tu wyników pokazuje, że poziom napowietrzania wpływa na przebieg niestabilny procesu kompostowania, jednak nie ma wpływu na końcowy punkt równowagi układu. Wraz ze wzrostem wartości strumienia napowietrzającego, zmniejszeniu ulegają: maksymalna oraz średnia temperatura procesu. Wpływa to pozytywnie na jego intensywność i czas



Rys. 9. Wpływ wartości strumienia napowietrzającego na przebieg procesu kompostowania dla $T_A = 10\text{ }^\circ\text{C}$; a) zmiany temperatury wsadu $T_B(t)$; b) zmiany zawartości kompostu $X(t)$
 Fig. 9. The influence of the aeration on the composting process for $T_A = 10\text{ }^\circ\text{C}$; a) changes in the charge temperature $T_B(t)$; b) changes in the compost content $X(t)$

Tab. 2. Wartości $X(t)$ w wybranych punktach czasowych procesu dla różnych stałych wartości \dot{m}_1
 Tab. 2. Values of $X(t)$ at selected time points of the process for different constant values of \dot{m}_1

Punkt czasowy [h]	$\dot{m}_1(t) = 1\text{ kg/h}$	$\dot{m}_1(t) = 5\text{ kg/h}$	$\dot{m}_1(t) = 10\text{ kg/h}$	$\dot{m}_1(t) = 20\text{ kg/h}$	$\dot{m}_1(t) = 40\text{ kg/h}$
25	0,039	0,039	0,038	0,037	0,032
30	0,062	0,061	0,060	0,060	0,059
40	0,102	1,105	1,108	1,110	1,112

powstania produktu końcowego. Jak pokazują przebiegi na Rys. 9b, przy temperaturze wsadu niższej od optymalnej, duże wartości strumienia prowadzą do hamowania procesu wytwarzania kompostu. W celu zwiększenia czytelności uzyskanych wyników, wybrane wartości liczbowe uzyskane na omawianym wykresie zestawiono w Tab. 2. Zamieszczone w niej dane potwierdzają, że taki sam poziom napowietrzania może wpływać pozytywnie bądź negatywnie na proces kompostowania, w zależności od etapu, na jakim się znajduje. Na przykład strumień napowietrzający o bardzo małej wartości $\dot{m}_1(t) = 1\text{ kg/h}$ sprawia, że zawartość kompostu jest najwyższa spośród badanych przypadków w 25. godzinie oraz najniższa w 40. godzinie trwania procesu. Z kolei w przypadku silnego napowietrzania na poziomie $\dot{m}_1(t) = 40\text{ kg/h}$ zauważyć można tendencję odwrotną.

Podsumowując uzyskane wyniki, można stwierdzić, że w celu optymalizacji omawianego procesu wskazane będzie bieżące dostosowywanie wartości strumienia napowietrzającego \dot{m}_1 do aktualnych warunków procesowych, co powinno przełożyć się na krótszy czas uzyskania produktu reakcji.

5. Analiza właściwości dynamicznych procesu

5.1. Wprowadzenie

Jedną z najistotniejszych cech układu dynamicznego, z punktu widzenia analizy jego właściwości oraz potencjalnego sterowania tym układem, jest jego wewnętrzna stabilność, znana pod nazwą stabilności w sensie Lapunowa [21]. W przypadku układów linio-

wych jest ona cechą globalną, tzn. że jeżeli taki układ jest stabilny w jednym punkcie pracy, będzie również stabilny w każdym innym punkcie. Natomiast w przypadku układów nieliniowych stabilność jest cechą lokalną, zachodzącą lub niezachodzącą w określonym punkcie pracy. Stabilność układu w jednym punkcie nie gwarantuje wówczas jego stabilności w innym punkcie.

Powszechnie stosowaną metodą analizy stabilności układów nieliniowych jest ich linearyzacja, a następnie wykorzystanie jednej z metod wykorzystywanych do badania stabilności układów liniowych. Linearyzacja taka może zostać przeprowadzona w określonym punkcie pracy (x^*, u^*) układu, zwykle w jednym z jego punktów równowagi, bądź wzdłuż pewnej nominalnej trajektorii stanu $x^*(t)$, wynikającej z rozwiązania jego równań stanu dla określonego sygnału wejściowego $u^*(t)$ oraz warunków początkowych $x^*(0)$.

W drugim przypadku, który zostanie poddany analizie w kolejnym podrozdziale, w wyniku linearyzacji układu nieliniowego, opisanego następującymi równaniami stanu oraz wyjścia [21]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t)], \tag{15}$$

$$y(t) = g[x(t), u(t)], \tag{16}$$

otrzymujemy układ opisany następującymi liniowymi równaniami przyrostowymi:

$$\frac{d\delta_x(t)}{dt} = A(t)\delta_x(t) + B(t)\delta_u(t), \tag{17}$$

$$\delta_y(t) = C(t)\delta_x(t) + D(t)\delta_u(t), \quad (18)$$

w których:

$$\begin{aligned} \delta_x(t) &= x(t) - x^*(t), & \delta_u(t) &= u(t) - u^*(t), \\ \delta_y(t) &= y(t) - y^*(t), \end{aligned} \quad (19)$$

reprezentują odchyłki (perturbacje) odpowiednio: wektora zmiennych stanu $x(t)$, wektora sygnałów wejściowych $u(t)$ oraz wektora sygnałów wyjściowych $y(t)$ układu od ich trajektorii nominalnych $\{x^*(t), u^*(t), y^*(t) = g[x^*(t), u^*(t)]\}$, zaś

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}[x^*(t), u^*(t)], \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}[x^*(t), u^*(t)], \quad (20)$$

$$C(t) = \frac{\partial g}{\partial x}[x^*(t), u^*(t)], \quad D(t) = \frac{\partial g}{\partial u}[x^*(t), u^*(t)], \quad (21)$$

są macierzami współczynników (parametrów) modelu liniowego (17) i (18), przybliżającego właściwości dynamiczne oryginalnego układu nieliniowego (15) i (16) w bieżącym punkcie trajektorii stanu. Należy podkreślić, że w wyniku linearyzacji modelu nieliniowego wzdłuż trajektorii stanu otrzymujemy model liniowy, lecz niestacjonarny. Cecha ta wynika z zależności macierzy A , B , C oraz D od czasu w równaniach (20) i (21), a dokładniej – z zależności wartości elementów tych macierzy od bieżących wartości $x^*(t)$ oraz $u^*(t)$.

Analizę właściwości dynamicznych układu w poszczególnych punktach trajektorii stanu można przeprowadzić w oparciu o wartości własne $\lambda(t)$ macierzy stanu $A(t)$ modelu zlinearyzowanego (17) i (18), z definicji będące rozwiązaniem następującego równania:

$$\det[\lambda(t)I - A(t)] = 0, \quad (22)$$

w którym I jest macierzą jednostkową o rozmiarach macierzy $A(t)$.

Wartości własne macierzy stanu układu determinują przede wszystkim jego asymptotyczną stabilność. Jej warunkiem koniecznym jest spełnienie wymagania, aby części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy stanu były ujemne, przy czym w przypadku stabilności nieasymptotycznej dopuszcza się istnienie pojedynczej zerowej wartości własnej (lub zespolonej pary sprzężonej o zerowej części rzeczywistej). Istotną kwestią jest również kształt odpowiedzi czasowych układu – o ile rzeczywiste wartości własne determinują odpowiedzi aperiodyczne, o tyle wartości zespolone odpowiadają za pojawienie się składowych odpowiedzi o charakterze oscylacyjnym [21]. Jak wcześniej wspomniano, w przypadku układu nieliniowego właściwości te mogą ulegać zmianom w kolejnych punktach pracy, czyli kolejnych punktach trajektorii stanu układu.

5.2. Wyniki analizy zlinearyzowanego modelu procesu

Zaprezentowany w części 2. nieliniowy model procesu zachodzącego w bioreaktorze został poddany linearyzacji wzdłuż pewnej wybranej trajektorii nominalnej. Do analizy przyjęto układ, uzyskaną dla stałych wartości sygnałów wejściowych: $\dot{m}_1^* = 0$ kg/h, $T_A^*(t) = 10$ °C oraz warunków początkowych $T_{B0}^*(t) = 10$ °C, $X_0^*(t) = 0,001$ kg/kg, przy założeniu wartości współczynnika przenikania ciepła $U = 50$ kJ/(h · m² · K). Przeprowadzono analityczną linearyzację równań stanu (12) i (13) wzdłuż nominalnej trajektorii stanu $x^*(t) = [T_B^*(t), X^*(t)]$, uzyskanej dla podanych wyżej postaci sygnałów wejściowych $u^*(t) = [\dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)]$ oraz warunków początkowych $x^*(0) = [T_{B0}^*(t), X_0^*(t)]$. W wyniku linearyzacji otrzymano macierze $A(t)$ i $B(t)$ zlinearyzowanego, niestacjonarnego równania stanu (17), a następnie, na podstawie wartości własnych uzyskanych z zależności (22), przeprowadzono analizę właściwości dynamicznych procesu zachodzącego w bioreaktorze. Poniżej podano szczegóły otrzymanych wyników.

Oznaczając odpowiednio przez f_{T_B} oraz f_X nieliniowe funkcje występujące po prawych stronach równań stanu (12) i (13), na podstawie zależności (20) otrzymujemy:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{T_B}}{\partial T_B}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] & \frac{\partial f_{T_B}}{\partial X}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] \\ \frac{\partial f_X}{\partial T_B}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] & \frac{\partial f_X}{\partial X}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

gdzie:

$$a_{11}(t) = -\frac{1}{\rho_B V c_B} \left(\dot{m}_1^*(t) c_A + UA + \frac{2\rho_S V (\varepsilon - 1) Y \mu_{\max} (T_B^*(t) - T_{\text{opt}}) X^*(t) \left(\frac{X^*(t)}{X_{\max}} - 1 \right)}{T_{\text{opt}}^2} - UA(T_B^*(t) - T_A^*(t)) \right), \quad (24)$$

$$a_{12}(t) = \frac{\rho_S (\varepsilon - 1) Y \mu_{\max} T_B^*(t) (T_B^*(t) - 2T_{\text{opt}}) X^*(t) (2X^*(t) - X_{\max})}{\rho_B c_B T_{\text{opt}}^2 X_{\max}}, \quad (25)$$

$$a_{21}(t) = \frac{2X \mu_{\max} (T_B^*(t) - T_{\text{opt}}) (X^*(t) - X_{\max})}{T_{\text{opt}}^2 X_{\max}}, \quad (26)$$

$$a_{22}(t) = \frac{\mu_{\max} T_B^*(t) (T_B^*(t) - 2T_{\text{opt}}) X^*(t) (2X^*(t) - X_{\max})}{T_{\text{opt}}^2 X_{\max}}, \quad (27)$$

oraz

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{T_B}}{\partial \dot{m}_1}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] & \frac{\partial f_{T_B}}{\partial T_A}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] \\ \frac{\partial f_X}{\partial \dot{m}_1}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] & \frac{\partial f_X}{\partial T_A}[T_B^*(t), X^*(t), \dot{m}_1^*(t), T_A^*(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

gdzie:

$$b_{11}(t) = \frac{c_A(T_A^*(t) - T_B^*(t))}{\rho_B V c_B}, \quad b_{12}(t) = \frac{c_A \dot{m}_1(t) - 1}{\rho_B V c_B},$$

$$b_{21}(t) = 0, \quad b_{22}(t) = 0. \quad (29)$$

Zakładając, że sygnały wyjściowe $y(t)$ modelu reprezentowane są przez pełny wektor stanu $x(t)$, jego macierze: wyjściowa $C(t)$ oraz transmisyjna $D(t)$ przyjmują stałą postać:

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Na Rys. 10 przedstawiono wykres ilustrujący zmiany wartości własnych macierzy stanu $A(t)$ danej zależnościami (23)–(27) wzdłuż wybranej trajektorii nominalnej $x^*(t) = [T_B^*(t), X^*(t)]$, wyznaczonych na podstawie definicyjnej zależności (22). Na Rys. 10a) pokazano części rzeczywiste wartości własnych, zaś na Rys. 10b) – ich części urojone. Na podstawie ich analizy można stwierdzić, że w zależności od etapu procesu zachodzącego w bioreaktorze, znaczącym zmianom ulegają również jego właściwości dynamiczne.

W chwili rozpoczęcia reakcji oraz na etapie dynamicznego wzrostu temperatury $T_B(t)$ wsadu (patrz także Rys. 7) proces jest niestabilny, na co wskazuje dodatni znak jednej z wartości własnych na wykresie z Rys. 10a). Po osiągnięciu przez wsad maksymalnej temperatury w chwili $t \approx 30$ h, proces ulega samoczynnej stabilizacji; cecha ta zostaje zachowana również na etapie spadku temperatury wsadu oraz stabilizacji zawartości kompostu $X(t)$, aż do przejścia procesu w stabilny stan równowagi po około 70 godzinach. Zjawiska te ściśle związane są z zachowaniem się populacji mikroorganizmów biorących udział w procesie. Jest to proces egzogenny – rozkład materii powoduje uwolnienie energii termicznej będącej efektem aktywności mikroorganizmów; z kolei wysoka temperatura przyczynia się do zwolnienia tempa ich rozwoju, a następnie ich śmierci [22].

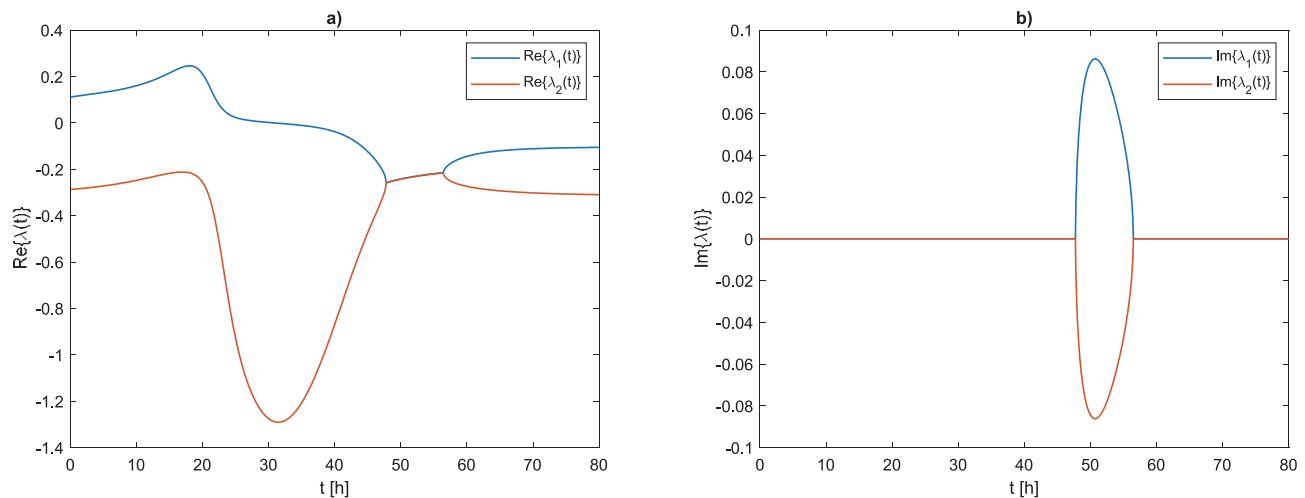
Na uwagę zasługuje również zjawisko występujące od ok. 48 do ok. 56 godziny procesu, widoczne na wykresach z Rys. 10. Części rzeczywiste obydwu wartości własnych stają się sobie równe (Rys. 10a); równocześnie pojawiają się składowe urojone o stosunkowo niewielkiej wartości (Rys. 10b). Oznacza to, że na wspomnianym odcinku trajektorii stanu macierz stanu modelu zlinearyzowanego posiada dwie zespolone, sprzężone wartości własne. Jak wspomniano w części 5.1, sugerują one występowanie oscylacji odpowiedzi czasowych układu wokół trajekto-

rii nominalnej. W ramach niniejszego artykułu nie podjęto się dokładnej interpretacji tej ciekawej cechy modelu z punktu widzenia zjawisk zachodzących w analizowanym bioreaktorze; natomiast zjawisko autonomicznych, spontanicznych oscylacji zachodzących w różnych typach bioreaktorów jest powszechnie znane i opisane np. w pozycjach [23, 24].

6. Podsumowanie i wnioski

Wyniki przeprowadzonych badań pokazują, że zaproponowany w artykule model procesu kompostowania stosunkowo wnikliwie opisuje najważniejsze zjawiska biologiczne oraz fizykochemiczne zachodzące w bioreaktorze. Można tak stwierdzić zarówno na podstawie własnej wiedzy Autorów odnośnie modelowanych zjawisk, jak i biorąc pod uwagę rezultaty badań opisane w pozycjach bibliograficznych wymienionych w części 1. Należy zwrócić tu uwagę na prostotę modelu, wynikającą z uzależnienia szybkości wzrostu mikroorganizmów wyłącznie od bieżącej temperatury wsadu bioreaktora. Wcześniejsze prace Autorów wykorzystywały jeszcze prostszy model, zakładający liniowy wpływ tej temperatury na szybkość wzrostu mikroorganizmów. Jak wykazały wstępne wyniki badań symulacyjnych, model ten nie odzwierciedlał prawidłowo wpływu temperatury na zjawiska zachodzące w bioreaktorze. Wynikało z niego na przykład, że im niższa temperatura, tym proces przebiega intensywniej, co nie było zgodne ze znanymi wynikami badań eksperymentalnych. Wykorzystane w niniejszym artykule równanie (5) zaczerpnięte z publikacji [19] lepiej odzwierciedla wpływ temperatury na procesy mikrobiologiczne. Istotną kwestią pozostaje tu natomiast właściwe oszacowanie wartości temperatury optymalnej T_{opt} . W niniejszym artykule przyjęto, tak jak w pracy [19], wartość $T_{opt} = 40$ °C, jednak w innych pozycjach literaturowych części tej można spotkać wartości 45–55 °C. Wartość tego parametru będzie miała istotny wpływ na stopień adekwatności modelu.

W celu dalszego zwiększenia precyzji modelu konieczne będzie uwzględnienie kolejnych wielkości fizycznych mających wpływ na proces kompostowania, takich jak np. bieżąca wilgotność wsadu czy też zawartość tlenu w atmosferze procesu. Opisany w artykule model nie uwzględnia strat wody w bioreaktorze, które mogą mieć negatywny wpływ na intensywność procesu. Deficyt wilgotności może doprowadzić do spadku tempa reakcji, a nawet do całkowitego jej zahamowania. Rozbudowa modelu wymagać będzie zatem uwzględnienia peł-



Rys. 10. Wartości własne $\lambda_1(t)$ oraz $\lambda_2(t)$ macierzy stanu $A(t)$ modelu bioreaktora zlinearyzowanego wzdłuż trajektorii nominalnej $x^*(t)$; a) części rzeczywiste: $\text{Re}\{\lambda_1(t)\}$, $\text{Re}\{\lambda_2(t)\}$; b) części urojone: $\text{Im}\{\lambda_1(t)\}$, $\text{Im}\{\lambda_2(t)\}$
 Fig. 10. Eigenvalues $\lambda_1(t)$ and $\lambda_2(t)$ the matrix $A(t)$ of the bioreactor model linearized along the nominal trajectory $x^*(t)$; a) real parts: $\text{Re}\{\lambda_1(t)\}$, $\text{Re}\{\lambda_2(t)\}$; b) imaginary parts: $\text{Im}\{\lambda_1(t)\}$, $\text{Im}\{\lambda_2(t)\}$

niejszej wiedzy o procesie, a w konsekwencji skutkować będzie wzrostem rzędu oraz stopnia złożoności modelu.

Przedstawione w artykule wyniki badań odpowiedzi bioreaktora na sygnał wejściowy reprezentujący strumień napowietrzający wykazały, że możliwe jest jego wykorzystanie jako potencjalnego sygnału sterującego procesem. Analizując wykresy z Rys. 9. można odnieść wrażenie, że wpływ napowietrzania na przebieg procesu jest stosunkowo niewielki – jednak wynika on z przyjętych tu stałych wartości strumieni. W przypadku dużych wartości strumienia, napowietrzanie prowadzi do hamowania procesu przy jego temperaturze niższej od optymalnej. Dlatego przy niskiej ($T_B < T_{opt}$) wartości temperatury wsadu należałoby ograniczyć napowietrzanie, aby zbyt go nie wychładzać. Z kolei, gdy jest ona zbyt wysoka ($T_B > T_{opt}$) – wskazane byłoby zwiększenie napowietrzania w celu jej obniżenia. W konsekwencji będziemy dążyć do utrzymania przez jak najdłuższy czas optymalnej temperatury wsadu, co w efekcie powinno przyspieszyć czas powstawania produktu końcowego.

Analiza właściwości zlinearyzowanych modeli procesu wskazuje na zróżnicowany charakter jego dynamiki, począwszy od jego niestabilności na etapie jego rozpoczęcia oraz rozwoju mikroorganizmów, przez stabilizację na etapie osiągnięcia maksymalnej temperatury wsadu, aż do w pełni stabilnego charakteru w ostatnim etapie, kończącym się osiągnięciem przez proces stanu równowagi. W ramach dalszych prac planowana jest rozbudowa modelu o wspomniane wyżej dodatkowe wielkości fizyczne, mające wpływ na proces zachodzący w bioreaktorze. Ponadto planowane są badania dotyczące zaprojektowania układu sterowania, którego celem byłaby optymalizacja warunków pracy bioreaktora poprzez zapewnienie odpowiednich warunków dla mikroorganizmów, a w konsekwencji zwiększenie wydajności i jakości produktu procesu kompostowania. Planowana jest także weryfikacja otrzymanych modeli oraz wyników badań symulacyjnych na obiekcie rzeczywistym, zbudowanym w skali laboratoryjnej lub półprzemysłowej.

Bibliografia

- Bochenek D., *Ochrona środowiska w 2018 r.*, GUS, 2018.
- Forewicz K., *Wsparcie proekologicznych inwestycji w banku ochrony środowiska*, „Środowisko”, Vol. 526, 2016, 23–27.
- Sidelko R., Seweryn K., Walendzik B., *Optymalizacja procesu kompostowania w warunkach rzeczywistych*, „Rocznik Ochrona Środowiska”, Vol. 13, 2011, 681–691.
- Nordahl S., Davkota J., Amirebrahimi J., Smith S., Breunig H., Prable C., Satchwell J., Jin L., Brown N., Kirchstetter T., Scown C., *Life-Cycle Greenhouse Gas Emissions and Human Health Trade-Offs of Organic Waste Management Strategies*, “Environmental Science & Technology”, Vol. 54, 2020, 9200–9209, DOI: 10.1021/acs.est.0c00364.
- Kamyaba H., Limb J., Khademic T., Ho W., Ahmade R., Hashim H., Siong H., Keyvanfarg A., Lee C., *Greenhouse Gas Emission of Organic Waste Composting: A Case Study of University Technology Malaysia Green Campus Flagship Project*, “Jurnal Teknologi”, Vol. 74, No. 4, 2015, 113–117, DOI: 10.11113/jt.v74.4618.
- McNicol G., Jeliakvski J., Francois J.J., Kramer S., Ryals R., *Climate change mitigation potential in sanitation via off-site composting of human waste*, “Nature Climate Change”, Vol. 10, 2020, 1–12, DOI: 10.1038/s41558-020-0782-4.
- Poz. 1052, *Rozporządzenie ministra środowiska z dnia 11 września 2012 r. w sprawie mechaniczno-biologicznego przetwarzania zmieszanych odpadów komunalnych, na podstawie art. 14 ust. 10 ustawy z dnia 27 kwietnia 2001 r. o odpadach* (Dz. U. z 2010 r. Nr 185, poz. 1243, z późn. zm.).
- Czekała W., Grzelak M., Rodriguez Carmona P., Witaszek K., *Instalacje do przemysłowego kompostowania bioodpadów: wady i zalety*, „Technika Rolnicza Ogrodnicza Leśna”, Nr 2, 2013, 23–25.
- Sołowiej P., *Koncepcja budowy bioreaktora do kompostowania biomasy – stanowisko badawcze*, „Inżynieria Rolnicza”, R. 12, Nr 11, 2008, 227–321.
- Białobrzęski I., Dziejowski J., *Symulacyjny model procesu wytwarzania kompostu w biostabilizatorze DANO*, „Inżynieria Rolnicza”, R. 19, Nr 14, 2005, 29–36.
- Yamada Y., Kawasa Y., *Aerobic composting of waste activated sludge: Kinetic analysis for microbiological reaction and oxygen consumption*, “Waste Management”, Vol. 26, No. 1, 2006, 49–61, DOI: 10.1016/j.wasman.2005.03.012.
- Szűcs E., *Modelowanie matematyczne w fizyce i technice*, 1977, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa.
- Mason I.G., *Mathematical modeling of composting process: A review*, “Waste Management”, Vol. 26, No. 1, 2006, 3–21, DOI: 10.1016/j.wasman.2005.01.021.
- Finger M.E., Hatch R.T., *Aerobic microbial growth in semi-solid matrices: heat and mass transfer limitation*, “Biotechnology and Bioengineering”, Vol. 18, No. 9, 1976, 1193–1218, DOI: 10.1002/bit.260180904.
- Ajmal M., Aiping S., Uddin S., Awais M., Faheem M., Ye L., Rehman K., Saif Ullah M., Shi Y., *A review on mathematical modeling of in-vessel composting process and energy balance*, “Biomass Conversion and Biorefinery”, Vol. 12, 2020, DOI: 10.1007/s13399-020-00883-y.
- Vidriales-Escobar G., Rentería-Tamayo R., Alariste-Mondragón F., González-Ortega O., *Mathematical modeling of a composting process in a small-scale tubular bioreactor*, “Chemical Engineering Research and Design”, Vol. 120, 2017, 360–371, DOI: 10.1016/j.cherd.2017.02.006.
- Khater G., Bahnasawy A.H., Ali S.A., *Mathematical model of compost pile temperature prediction*, “Journal of Environmental & Analytical Toxicology”, Vol. 4, No. 6, 2014, DOI: 10.4172/2161-0525.1000242.
- Papračanin E., Petric I., *Mathematical modeling and simulation of the composting process in a pilot reactor*, “Bulletin of the Chemists and Technologists of Bosnia and Herzegovina”, Vol. 47, 2017, 39–48.
- Kaiser J., *Modelling composting as a microbial ecosystem: a simulation approach*, “Ecological Modelling”, Vol. 91, No. 1-3, 1996, 25–37, DOI: 10.1016/0304-3800(95)00157-3.
- Petric I., Mustafić N., *Dynamic modeling the composting process of the mixture of poultry manure and wheat straw*, “Journal of Environmental Management”, Vol. 161, 2015, 392–401, DOI: 10.1016/j.jenvman.2015.07.033.
- Kaczorek T., *Teoria układów regulacji automatycznej*, 1977, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Raina M., *Bacterial Growth*, Review of Basic Microbiological Concepts, 2015, 37–54.
- Skupin P., Metzger M., *Oscillatory Behavior Control in Continuous Fermentation Processes*, “IFAC-PapersOnLine”, Vol. 48, No. 8, 2015, 1114–1119, DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.09.117.
- Ciesielski A., *Nieliniowe sterowanie predykcyjne procesem produkcji bioetanolu metodą fermentacji ciągłej*, Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska, 2021.
- Sangsurasak P., Mitchell D.A., *Validation of a model describing two dimensional dynamic heat transfer during solid-state fermentation in packed bed bioreactors*, “Biotechnology and Bioengineering”, Vol. 60, No. 6, 1998, 739–749, DOI: 10.1002/(SICI)1097-0290(19981220)60:6<739::AID-BIT10>3.0.CO;2-U.

Mathematical Modeling and Simulation Analysis of a Bioreactor with Forced Aeration

Abstract: The composting process is commonly used in waste management as a method of converting or stabilizing organic waste. Due to the complex, non-linear nature of biological and physicochemical phenomena involved, this process is relatively difficult to predict and control. The control is usually aimed at obtaining the final product, that is, the compost that meets legal standards. The article presents a simple mathematical model of the composting process with forced aeration, which will potentially facilitate the control task. A second order model was developed, with two inputs signals. Based on the mathematical model in the form of the state equations, the computer model of the bioreactor was built in the MATLAB/Simulink environment, which was then used to conduct different simulation tests. It was shown that it is possible to control the process using forced aeration, directly influencing the temperature changes in the bioreactor, and consequently also the time of obtaining the final product of the reaction. The analysis of the dynamic properties of the process performed using its model linearized about some nominal state trajectory shows the changes in its internal stability—starting from the unstable character in the initial phases of the reaction, through stabilization in its intermediate phase, up to the asymptotic stability, ending in the stable equilibrium state.

Keywords: composting process, bioreactor, mathematical modeling, computer simulation, model linearization, internal stability

mgr inż. Michał Przysiężnik

M.Przysieznik@doktorant.po.edu.pl
ORCID: 0000-0001-5890-0309

Ukończył studia magisterskie o specjalności Rybactwo oraz Odnawialne Źródła Energii i Gospodarka Odpadami na Uniwersytecie Rolniczym im. Hugona Kołłątaja w Krakowie. Obecnie jest uczestnikiem szkoły doktorskiej na Politechnice Opolskiej w dyscyplinie automatyka, elektronika, elektrotechnika i technologii kosmiczne. W ramach prac związanych z doktoratem prowadzi badania nad modelowaniem oraz optymalizacją procesu kompostowania.



dr hab. inż. Krzysztof Bartecki, prof. PO

K.Bartecki@po.edu.pl
ORCID: 0000-0002-5744-808X

W 1996 r. ukończył studia magisterskie o specjalności Automatyka i Metrologia Elektryczna w Wyższej Szkole Inżynierskiej w Opolu. Stopień naukowy doktora nauk technicznych w dyscyplinie elektrotechnika uzyskał w 2004 r. w Politechnice Opolskiej. W 2016 r. otrzymał stopień doktora habilitowanego w dyscyplinie automatyka i robotyka; główne osiągnięcie naukowe stanowiła monografia „Modeling and Analysis of Linear Hyperbolic Systems of Balance Laws”, wydana w wydawnictwie Springer. Obecnie pracuje w Katedrze Automatyki Politechniki Opolskiej na stanowisku profesora uczelni. Jego zainteresowania naukowe dotyczą głównie modelowania matematycznego układów z czasoprzestrzenną dynamiką, a także zastosowania tzw. metod sztucznej inteligencji w zagadnieniach modelowania oraz sterowania obiektami dynamicznymi.

