

Zastosowanie metody głównych składowych w kartach kontrolnych procesów wieloparametrowych

Evgeniy T. Volodarsky, Oleh Kozyr

Narodowy Uniwersytet Techniczny Ukrainy «KPI», Katedra Technologii Informatyczno-Pomiarowych, Kijów, Ukraina

Zygmunt L. Warsza

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Streszczenie: W artykule opisano metodę głównych składowych PC (ang. Principal Components) służącą do tworzenia kart kontrolnych dla wieloparametrowych procesów wytwórczych o skorelowanych parametrach. Ocena skuteczności zastosowania tej metody przeprowadzono na symulowanych danych, zbliżonych do wyników pomiarów uzyskanych w sterowaniu rzeczywistym procesem technologicznym. W wyniku modelowania kontroli procesu n-parametrowego otrzymano potwierdzenie skuteczności tej metody. Praca ta kontynuuje cykl publikacji autorów o kartach stosowanych w metodach kontroli jakości produkcji.

Słowa kluczowe: kontrola wieloparametrowego procesu technologicznego, karty kontrolne Shewharta, metoda głównych składowych

1. Wprowadzenie

Metoda zapewniania jakości przemysłowo wytwarzanych wyrobów polegała początkowo na kontroli wartości parametrów pojedynczego produktu, identyfikacji ich niezgodności z wymaganymi wartościami i korekcie tego stanu. W skrajnych przypadkach, gdy korekta ta nie była możliwa, utylizowano wytworzony produkt. Przez wiele lat był to jedyny, dosyć kosztowny sposób zapewnienia jakości produkcji. Wadą był brak badania cech produktu w procesie jego wytwarzania i niemożność zapobiegania niezgodności jego parametrów z wymaganiami. Celem takich badań jest wykrycie, czy wartości istotnych parametrów produktu na poszczególnych etapach produkcji różnią się od ich wartości dopuszczalnych. Jeśli to wystąpi, wówczas oddziela się taki produkt od dobrych wyrobów, by nie uczestniczył w kolejnych etapach procesu produkcyjnego [1] i nie trafiał do użytkownika. Jest to indywidualne zarządzanie jakością każdej produkowanej jednostki, gdyż sprawdza się każdą z nich, tj. realizuje kontrolę wszystkich wyrobów.

Wskutek dążenia do poprawy efektywności ekonomicznej procesu produkcyjnego, w tym przez obniżenie kosztów produkcji, pojawiły się nowe sposoby kontroli jakości. W 1924 r. amerykański inżynier i matematyk Walter Shewhart, znany później jako konsultant i wybitny specjalista w dziedzinie zarządzania jakością produkcji, zaproponował aby do zapo-

biegania przyczynom powodującym wady wyrobów zastosować kontrolę i sterowanie ich procesem wytwórczym [2]. Wykorzystując statystykę matematyczną i teorię prawdopodobieństwa opracował sposób umożliwiający utrzymywanie procesu w stanie stabilnym statystycznie, a tym samym zapobiegający pojawianiu się jego niespójności. W tym celu stworzył narzędzie, zwane kartami kontrolnymi Shewharta. Dało to początek nowej koncepcji zapewniania jakości wyrobów opartej na założeniu, że jest ona kontrolowana i tworzona już w procesie produkcyjnym, a nie dopiero jako wynik kontroli parametrów gotowego produktu. Zidentyfikowanie rozbieżności cech produktu jest wówczas zdarzeniem, które już zaszło i jest już za późno na korektę procesu by temu zapobiec. Natomiast jest to możliwe, jeśli przeprowadza się prewencyjną kontrolę w trakcie procesu wytwarzania.

Statystyczne metody analizy dokładności i stabilności parametrów wykorzystywanych do kontroli procesów technologicznych są obecnie regulowane odpowiednimi normującymi dokumentami, w tym ISO. Stosowanie klasycznych kart Shewharta jest bardzo skuteczne, jeśli proces można kontrolować za pomocą jednego wskaźnika jakości wytwarzanego produktu. Jednak w wielu przypadkach jakość ta charakteryzuje się kilkoma wskaźnikami, w tym skorelowanymi ze sobą. Wówczas niezależna jednoczesna kontrola poszczególnych wskaźników może prowadzić do błędnych decyzji o zaburzeniu (lub jego braku) procesu technologicznego.

Karty Shewharta dla poszczególnych kontrolowanych parametrów można z powodzeniem stosować tylko wtedy, gdy istnieje pewność, że nie są one skorelowane. Dla zbioru kart kontrolnych Shewharta) oblicza się wartość średnią parametru \bar{x} (\bar{x} – wykresy) dla poziomu istotności α_i każdego wskaźnika na podstawie ogólnego poziomu istotności α_0 charakteryzującego wektor wyników $\mathbf{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_p)$ [1]. Jeśli nie ma informacji o stopniu istotności każdego ze składników \mathbf{X} , to wszystkie współczynniki α_i traktuje się jednakowo i definiuje jako $\alpha = \alpha_0/n$.

Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warsza, zlw1936@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 04.07.2023 r., przyjęty do druku 08.09.2023 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

Górne i dolne granice kontrolne i -tego parametru procesu technologicznego wyznacza się z następujących zależności:

– dla granicy górnej:
$$UCL_i = \mu_{0i} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_i$$

– dla granicy dolnej:
$$LCL_i = \mu_{0i} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_i$$

gdzie μ_{0i} i σ_i to wartość średnia i odchylenie standardowe próbki danych wyznaczane z wyników badań wstępnych lub określone w dokumentach normatywnych.

W takim przypadku obszar rozproszenia dopuszczalnych wartości wektora wyników \bar{x}_i będzie ograniczony hiper-równoległością o bokach przeciwległych odpowiadających różnicy dopuszczalnych granic górnych i dolnych: $UCL_i - LCL_i$.

Do testowania hipotezy $H_0: \mu = \mu_0$ dla próby o liczebności n z ogólnej populacji jednowymiarowej o znanej wariancji, stosuje się statystykę $\bar{z} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Podstawę zastosowania kart kontrolnych do monitorowania procesów wielowymiarowych stworzyła pionierska praca Hotellinga z 1947 r. Do opisu wielowymiarowej zmiennej losowej wykorzystuje się wyrażenie:

$$\bar{z}^2 = n(\bar{x} - \mu_0) \sigma^{-1}.$$

Można je też przedstawić w postaci macierzowej jako:

$$T_H^2 = n(X - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (X - \mu_0).$$

Otrzymane wyrażenie to statystyka T^2 zaproponowana przez Hotellinga jako uogólniona charakterystyka, którą stosuje się do oceny jakości wielowymiarowego procesu technologicznego przy występowaniu korelacji między jego wskaźnikami [2]. Przy znanej macierzy kowariancji Σ , statystyka ta ma rozkład chi-kwadrat. W takim przypadku kontroli statystycznej obiektu wieloparametrowego położenie granicy kontrolowanej o danym poziomie istotności α wyznacza z tabeli rozkładu chi-kwadrat bezpośrednio dla kwantyli, tj.:

$$T_{kp}^2 = \chi_{(1-\alpha)p}^2.$$

Karta kontrolna T^2 jest do dzisiaj najczęściej stosowana w praktyce do sterowania jakością procesów wielowymiarowych. Wykorzystywanie samego tylko kryterium Hotellinga umożliwia graficzną prezentację wyników monitorowania oraz ocenę stanu procesu jako całości, ale bez wskazywania przyczyny jego zaburzenia. Wadą karty Hotellinga jest więc to, że nie pokazuje, który wskaźnik bezpośrednio (lub jako łączny wpływ których wskaźników) powoduje zakłóceniem przebiegu procesu. Do sprawdzenia hipotezy, że przyczyną jest i -ty wskaźnik, stosuje się indywidualne kryterium Hotellinga [3, 4]. Jednakże przy identyfikacji wpływających wskaźników, może się okazać, że każdy z nich osobno nie jest przyczyną zakłócenia procesu. Powodem jest łączny ich wpływ. Stanowi to ograniczenie w korzystaniu z tych kart kontrolnych.

Konstrukcję kart kontrolnych do sterowania procesem wielowymiarowym, dla przypadków występowania w nim korelacji parametrów, można rozwiązać też za pomocą metody głównych składowych PCA (ang. *Principal Components Analysis*) zaproponowaną przez Jacksona [5]. Metoda ta opiera się na zastosowaniu liniowej transformacji otrzymywanego wektora parametrów mierzonych. Umożliwia ona przejście do niezależnej analizy każdego składnika bez zniekształcania obszaru

danych dla skorelowanych parametrów [6]. Zaletą jest znaczna redukcja liczby parametrów, które należy estymować przy projektowaniu karty (nie estymuje się całej macierzy kowariancji!). Wadą jest trudniejsza identyfikacja rzeczywistych przyczyn rozregulowania procesu.

Niniejsza praca jest rozwinięciem komunikatu [13] prezentowanego na konferencji Automation 2023 (7–8 marca) w Warszawie w Sieci Badawczej Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów. Przedstawiono metodę głównych składowych PCA i szczegółowo omówiono symulowany przykład jej zastosowania w kartach kontroli procesu n -parametrowego.

2. Podstawy teoretyczne metody głównych składowych

Metoda głównych składowych PCA polega na liniowym wielowymiarowym przekształceniu zbioru skorelowanych czynników w zbiór składowych ortogonalnych. Celem tej operacji jest wyodrębnienie podstawowych (głównych) składowych procesu, tj. tych, które w stopniu największym przyczyniają się do rozproszenia danych kontrolowanych, czyli do tworzenia obszaru ich dyspersji. Zwykle liczba takich składowych wynosi dwa lub trzy. Umożliwia to wykorzystanie metody PC w konstruowaniu kart kontrolnych, jako najprostszego i najbardziej użytecznego narzędzia do badania zmienności procesu. Zakłada się więc, że istnieje wielowymiarowy układ p czynników $X(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_p)$ przedstawiony w postaci macierzy

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,i} & \dots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,i} & \dots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{j,1} & x_{j,2} & \dots & x_{j,i} & \dots & x_{j,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,i} & \dots & x_{m,p} \end{pmatrix} \quad (1)$$

gdzie każdy element jest próbką m średnich $\bar{x}_i(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,j}, \dots, x_{i,m})^T$ z n obserwacji wylosowanych z populacji o rozkładzie normalnym i o wartościach średnich $\bar{a}_0(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_p)$ oraz z macierzą kowariancji:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 & \dots & \rho_{1i} \sigma_1 \sigma_i & \dots & \rho_{1p} \sigma_1 \sigma_p \\ \rho_{12} \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2i} \sigma_2 \sigma_i & \dots & \rho_{2p} \sigma_2 \sigma_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{1i} \sigma_i \sigma_1 & \rho_{2i} \sigma_i \sigma_2 & \dots & \sigma_i^2 & \dots & \rho_{ip} \sigma_i \sigma_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{1p} \sigma_p \sigma_1 & \rho_{2p} \sigma_p \sigma_2 & \dots & \rho_{ip} \sigma_p \sigma_i & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

gdzie: σ_i^2 – wariancja współczynnika \bar{x}_i ; ρ_{1p} – współczynnik korelacji między współczynnikami x_i oraz x_p .

Jeżeli między wartościami początkowymi istnieje korelacja, to aby było możliwe niezależne monitorowanie każdej z nich, konieczne jest przekształcenie macierzy wartości wejściowych (1) takie, aby nowe zmienne (wektory kolumnowe) zawarte w transformowanej macierzy były parami ortogonalne. Jednocześnie informacja o rozproszeniu wartości wejściowych powinna być możliwie jak najbardziej zbliżona do rozrzutu oryginalnego. Zadanie wymaga znalezienia macierzy głównych składowych F przez pomnożenie macierzy X parametrów wej-

ściowych i macierzy ortonormalnej współczynników transformacji \mathbf{V} , czyli dokonuje się liniowego przetwarzania:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \quad (3)$$

Istotę liniowej transformacji cech układu pierwotnego, prowadzącej do metody głównych składowych PC, rozważy się na przykładzie interpretacji geometrycznej dla dwu czynników. Zakłada się więc dwuwymiarowy system monitorowania pro-

cesu o $\bar{\mathbf{x}}_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j}, \dots, x_{1m})^T$ i $\bar{\mathbf{x}}_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j}, \dots, x_{2m})^T$

wyodrębnionych z populacji normalnej ze średnimi wartościami $a_0(a_1, a_2)$ i z macierzą kowariancji:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad |\rho| < 1, \quad \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0.$$

Geometrycznie oznacza to, że punkty x_{1i} oraz x_{2i} ($i = 1, \dots, n$) znajdują się w obrysie elipsy na rys. 1.

Do zbadania wpływu parametrów $\bar{\mathbf{x}}_1$ i $\bar{\mathbf{x}}_2$, prościej jest przejść do nowych współrzędnych $\bar{\mathbf{f}}_1$ i $\bar{\mathbf{f}}_2$ stosując przekształcenia:

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = (\bar{\mathbf{x}}_1 - a_1) \cos \alpha + (\bar{\mathbf{x}}_2 - a_2) \sin \alpha$$

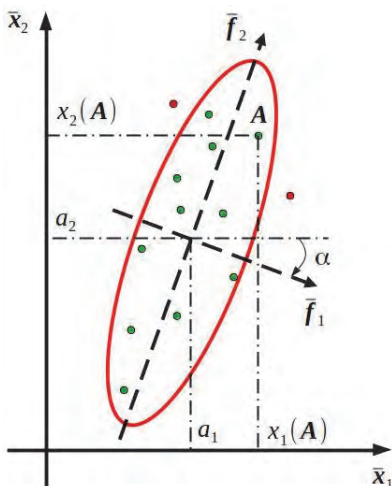
$$\bar{\mathbf{f}}_2 = -(\bar{\mathbf{x}}_1 - a_1) \sin \alpha + (\bar{\mathbf{x}}_2 - a_2) \cos \alpha$$

gdzie: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$ (przyjmuje się, że $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$).

Dla wyznaczenia macierzy transformacji, zakłada się konieczność zapewnienia niezależnej kontroli (monitorowania) parametrów $\bar{\mathbf{x}}_i$. Można to osiągnąć, jeśli macierz kowariancji $\mathbf{\Sigma}$ z wzoru (2) jest diagonalna, czyli wszystkie elementy tej macierzy, poza tymi na głównej przekątnej, są równe zeru. W diagonalizacji macierzy $\mathbf{\Sigma}$ korzysta się z macierzy współczynników transformacji \mathbf{V} . Stosując metodę dekompozycji rzeczywistych, dodatnich macierzy symetrycznych [7], przedstawia się diagonalizowaną macierz kowariancji (2) jako iloczyn trzech macierzy:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T, \quad (4)$$

gdzie $\mathbf{\Lambda}$ jest macierzą diagonalną z wartościami własnymi na jej głównej przekątnej.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna metody głównych składowych PC
Fig. 1. Geometric interpretation of the Principal Components (PC) method

Każdy niezerowy wektor nazywa się wektorem własnym macierzy kowariancji (2), jeśli liczba λ jest taka, że zachodzi równość:

$$\mathbf{\Sigma} \bar{\mathbf{v}} = \lambda \bar{\mathbf{v}} \quad (5)$$

Liczba λ nazywana jest wartością własną macierzy. Na jej podstawie znajduje się jej wektor własny. Stąd macierz diagonalną $\mathbf{\Lambda}$ można zapisać jako:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix}$$

Mnożąc po prawej stronie równanie macierzowe (4) przez \mathbf{V} , otrzymuje się:

$$\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} \quad (6)$$

Ponieważ dla macierzy ortonormalnej macierz transformowana \mathbf{V}^T i macierz odwrotna \mathbf{V}^{-1} są wyrażeniami równoważnymi, to otrzymamy, że $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}$. Macierz \mathbf{I} jest jednostkowa. Jej elementy na głównej przekątnej są równe 1, a pozostałe są zerami i wyrażenie (6) można zapisać jako:

$$\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{I} \quad (7)$$

Macierz \mathbf{F} głównych składowych (3) wyznacza się na podstawie równania (7) z wykorzystaniem wektorów własnych i wartości własnych. Jeżeli przy liniowej transformacji macierzy istnieje wektor, który nie zmienia kierunku, to jest on wektorem własnym transformacji. Każdy wektor równoległy do wektora własnego będzie też wektorem własnym. Takich wektorów będzie nieskończenie wiele. Zadanie polega na znalezieniu takiego wektora, aby dyspersja w jego kierunku była maksymalna.

Zmienne $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_i, \dots, \bar{\mathbf{x}}_p$ mogą mieć różną naturę fizyczną i zmieniać się w różnych zakresach. Dlatego dla sformalizowania dalszej analizy konieczne jest rozważenie wartości znormalizowanej i wyśrodkowanej:

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \frac{\bar{\mathbf{x}}_i - a_i}{\sigma_i}$$

Wówczas równanie (3) można zapisać jako:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \quad (8)$$

Aby znaleźć macierz współczynników transformacji \mathbf{V} uwzględnia się (5) i wychodzi z (7) przekształcając do postaci:

$$(\mathbf{\Sigma} - \lambda \mathbf{I}) \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (9)$$

Wartości własne macierzy (2) znajduje się stosując wyrażenie (9). Ponieważ wektor własny $\bar{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$, to rozważa się równanie:

$$|\mathbf{\Sigma} - \lambda \mathbf{I}| = 0. \quad (10)$$

Rozwiązanie równania (10) umożliwi wyznaczenie wag dla składowych jako wskaźników przy wyznaczaniu $\bar{\mathbf{f}}_i$ jako pierwszej składowej głównej. Wartości własne macierzy (2) wylicza

się z równania wyznacznika wyrażenia (10). Uwzględniając, że macierz jednostkowa \mathbf{I} jest diagonalna, wyznacza się wyznacznik, z którego otrzymuje się macierzone równanie charakterystyczne:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 - \lambda & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1i}\sigma_1\sigma_i & \dots & \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ \rho_{12}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 - \lambda & \dots & \rho_{2i}\sigma_2\sigma_i & \dots & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{1i}\sigma_i\sigma_1 & \rho_{2i}\sigma_i\sigma_2 & \dots & \sigma_i^2 - \lambda & \dots & \rho_{ip}\sigma_i\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{1p}\sigma_p\sigma_1 & \rho_{2p}\sigma_p\sigma_2 & \dots & \rho_{ip}\sigma_p\sigma_i & \dots & \sigma_p^2 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^p + b_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + b_1\lambda + b_0 \quad (11)$$

Równanie macierzone (11) opisuje układ liniowych równań jednorodnych o nieskończonej liczbie rozwiązań. Najpierw wyznacza się wektor pośredni $\bar{\mathbf{u}}_i$. Przyjmuje się wartości elementów tego wektora z tymi samymi indeksami równymi $u_{ii} = 1$. Wówczas równanie macierzone (10) dla wartości własnej λ_i można przedstawić jako

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 - \lambda_i & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1i}\sigma_1\sigma_i & \dots & \rho_{1p}\sigma_1\sigma_p \\ \rho_{12}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 - \lambda_i & \dots & \rho_{2i}\sigma_2\sigma_i & \dots & \rho_{2p}\sigma_2\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{1i}\sigma_i\sigma_1 & \rho_{2i}\sigma_i\sigma_2 & \dots & \sigma_i^2 - \lambda_i & \dots & \rho_{ip}\sigma_i\sigma_p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{1p}\sigma_p\sigma_1 & \rho_{2p}\sigma_p\sigma_2 & \dots & \rho_{ip}\sigma_p\sigma_i & \dots & \sigma_p^2 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ u_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11a)$$

Otrzymane równanie macierzone odpowiada układowi równań o liczbie $p - 1$ niewiadomych $\bar{\mathbf{u}}_i$.

$$\begin{aligned} (\sigma_1^2 - \lambda_i)u_{i1} + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2u_{i2} + \dots + \rho_{1p}\sigma_1\sigma_pu_{ip} &= -\rho_{1i}\sigma_1\sigma_i \\ \rho_{12}\sigma_2\sigma_1u_{i1} + (\sigma_2^2 - \lambda_i)u_{i2} + \dots + \rho_{2p}\sigma_2\sigma_pu_{ip} &= -\rho_{2i}\sigma_2\sigma_i \\ \vdots &= \vdots \\ \rho_{1i}\sigma_i\sigma_1u_{i1} + \rho_{2i}\sigma_i\sigma_2u_{i2} + \dots + \rho_{ip}\sigma_i\sigma_pu_{ip} &= -(\sigma_i^2 - \lambda_i) \\ \vdots &= \vdots \\ \rho_{1p}\sigma_p\sigma_1u_{i1} + \rho_{2p}\sigma_p\sigma_2u_{i2} + \dots + (\sigma_p^2 - \lambda_i)u_{ip} &= -\rho_{ip}\sigma_p\sigma_i \end{aligned} \quad (12)$$

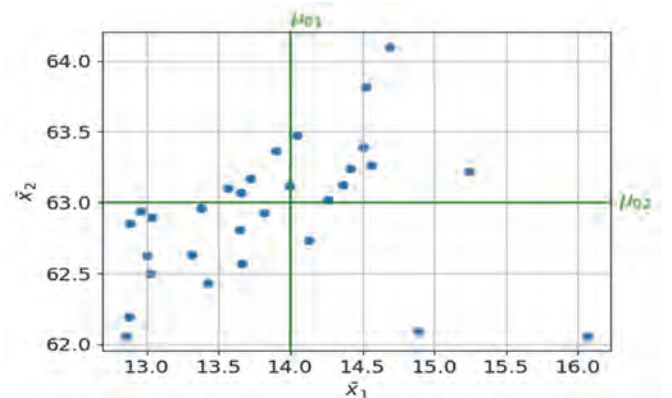
Używa się $p - 1$ pierwszych równań układu (11) do znalezienia nieznanych elementów wektora $\bar{\mathbf{u}}_i$. Aby obliczyć i -ty wektor własny $\bar{\mathbf{v}}_i$, należy znormalizować wektor $\bar{\mathbf{u}}_i$. Ortonormalność macierzy \mathbf{V} oznacza, że każdy wektor kolumnowy macierzy \mathbf{V} ma długość jednostkową, tj. $\bar{\mathbf{v}}_i^T \bar{\mathbf{v}}_i = 1$. Z geometrycznego punktu widzenia diagonalizacja macierzy kowariancji (2) jest niejednorodnym skalowaniem – rozciąganie w każdym kierunku zachodzi na ogół wg innej skali. Dlatego konieczne jest znormalizowanie otrzymanego wektora $\bar{\mathbf{u}}_i$ za pomocą równania:

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{\bar{\mathbf{u}}_i}{\sqrt{\bar{\mathbf{u}}_i^T \bar{\mathbf{u}}_i}} \quad (13)$$

Stosując wyrażenia (11–13), znajduje się wektory własne dla wszystkich wartości własnych $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$. W rezultacie otrzymuje się macierz \mathbf{V} , która umożliwia obliczenie elementów macierzy głównych składowych PC (8).

3. Przykład liczbowy

Przy badaniu przebiegu rzeczywistego procesu za pomocą kart kontrolnych dużym ułatwieniem jest szczegółowy opis jego działania, w tym numeryczny. Zastosowanie kart kontrolnych przybliży przykładem liczbowy oparty na wynikach kontroli procesu w jednym z ukraińskich zakładów przemysłowych. Jakość realizacji badanego procesu produkcyjnego zależała od dwu głównych wskaźników \bar{x}_1 i \bar{x}_2 , które wyznacza się. Zbadano przebieg tego procesu w zewnętrznych i wewnętrznych warunkach znamionowych, które odtworzono zgodnie z normami ustalonymi dla badanego procesu. Zbiory wartości tych dwu wskaźników miały wartości średnie $a_1 = 14$ i $a_2 = 63$, odchylenia średniokwadratowe $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0,41$ oraz współczynnik korelacji $\rho = 0,5$. Następnie wygenerowano dla każdego wskaźnika próbkę dwudziestu punktów kontrolnych z populacji o rozkładzie normalnym $N(a, \sigma_2)$ z dodatkowymi wartościami modelującymi zakłócenia procesu. W każdym i -tym punkcie kontrolnym ($i = 1, \dots, 30$) wykonano pięć pomiarów. Otrzymane wartości średnie wskaźników jakości procesu przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Średnie wartości wskaźników jakości procesu
Fig. 2. Average values of process quality indicators

Dla przytoczonych danych skonstruowano karty Shewharta wybierając jako linie centralne $CL_1 = 14$ i $CL_2 = 63$. Ogólny poziom istotności dla tworzenia kart wynosi $\alpha = 0,005$. Jednocześnie poziom istotności obliczania linii kontrolnych dla każdej z kart wyniósł $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,0025$. Dla wskaźnika \bar{x}_1 wyznaczono górną linię kontrolną $UCL_1 = 17$ i dolną linię kontrolną $LCL_1 = 11$, a dla drugiego wskaźnika \bar{x}_2 wartości te wyniosły odpowiednio $UCL_2 = 64,23$ i $LCL_2 = 61,77$. Wykresy kart kontrolnych badanego procesu przedstawiono na rysunku 3.

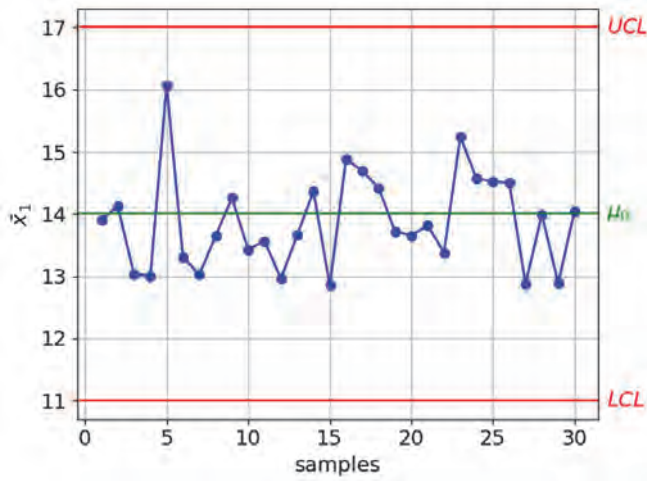
Oceniemy stabilność procesu technologicznego za pomocą kart Hotellinga. Jak już wspomniano, jako linię kontrolną wybiera się kwantyl rozkładu chi-kwadrat dla poziomu istotności statystycznej $\alpha = 0,005$ oraz liczby stopni swobody $p = 2$, tj.:

$$UCL = T_{kp}^2 = \chi_{(1-\alpha),p}^2 = \chi_{(0,995),2}^2 = 10,6$$

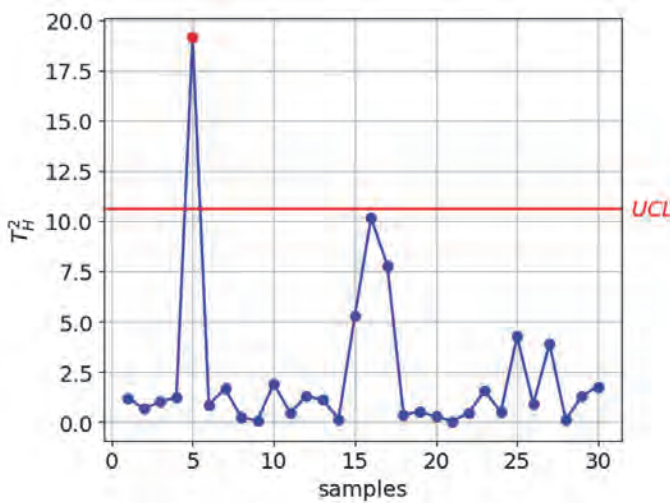
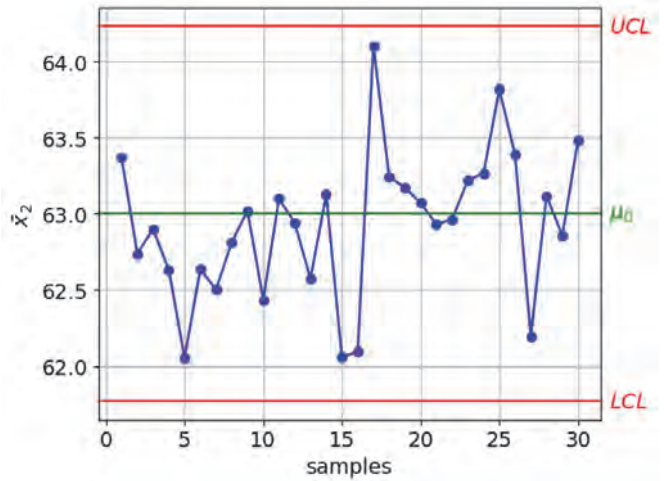
Wykres kontrolny Hotellinga, który ilustruje wyniki obliczeń z wykorzystaniem odpowiednich statystyk, pokazano na rysunku 4.

Z rys. 4 wynika, że proces jest statystycznie niekontrolowany, tj. występuje jego naruszenie w punkcie 5. Samo kryterium Hotellinga nie pokazuje jednak, który wskaźnik bezpośrednio (lub łączny wpływ których wskaźników) powoduje to naruszenie procesu. Do sprawdzenia hipotezy, czy przyczyną zaburzenia procesu jest dany wskaźnik, stosuje się indywidualne kryterium Hotellinga [3, 5]. Testowana jest hipoteza

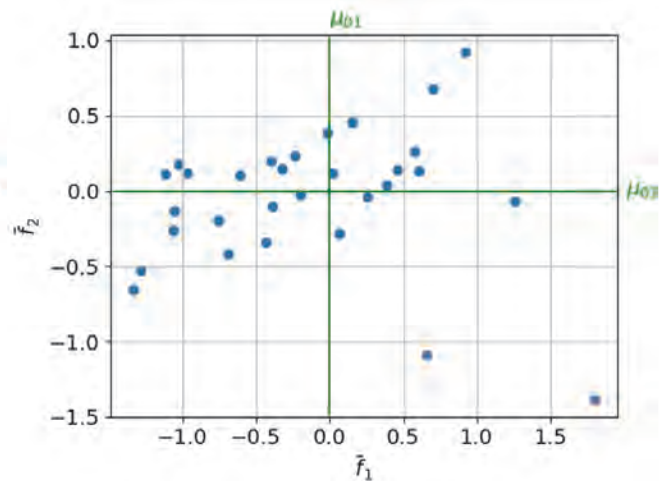
$$T_{Hj}^2 > T_{kp}^2$$



Rys. 3. Karty kontrolne Shewharta dla danych początkowych
Fig. 3. Shewhart control charts on initial data



Rys. 4. Karta kontrolna Hotellinga dla procesu z dwiema zmiennymi
Fig. 4. Hotelling's control chart for a process with two variables



Rys. 5. Pole rozrzutu we współrzędnych składowych głównych
Fig. 5. Scatter area in principal components coordinates

gdzie: $T_{Hj}^2 = n \left[C_j^T (\bar{X}_j - \mu_{0j}) \right]^2 / \left[C_j^T S C_j \right]$, C_j – specjalny wektor kolumnowy, który wyrównuje wartości wszystkich cech z wyjątkiem j -tego i zawiera zera we wszystkich wierszach z wyjątkiem j -tego, w którym występuje jedynka. Tak więc dla $j = 1$ mamy $C_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Jeżeli $T_{H1}^2 > T_{kp}^2$ i $T_{H2}^2 > T_{kp}^2$, to z prawdopodobieństwem $P = (1 - \alpha) = 0,95$ można stwierdzić, że oba badane wskaźniki (parametry) wpływają na stabilność procesu.

Jednak nie zawsze określony parametr jest przyczyną zaburzenia procesu technologicznego. Na przykład, gdy karta kontrolna Hotellinga pokazuje dezorganizację procesu, a sprawdzenie pokazuje, że poszczególne kryteria spełniają nierówność $T_{Hj}^2 < T_{kp}^2$. Zatem dopiero kombinacja kilku wskaźników znacząco wpływa na sterowność statystyczną procesu technologicznego. Dla tych samych danych konstruuje się wykresy kontrolne dla głównych składowych \bar{f}_1 i \bar{f}_2 . Po wstawieniu do (2) wartości: $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 0,1681$, $\rho\sigma_1\sigma_2 = 0,2050$, uzyskuje się macierz kowariancji:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,2050 \\ 0,2050 & 0,1681 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Aby znaleźć wartości własne, korzysta się z wyrażenia (10). Ponieważ macierz jednostkowa \mathbf{I} jest diagonalna, to wyznacza się wyznacznik macierzy Σ , który tworzy równanie charakte-

rystyczne. Po jego rozwiązaniu otrzymuje się wartości własne macierzy (14): $\lambda_1 = 1,0478$ i $\lambda_2 = 0,1203$. Każdej z nich odpowiada wektor własny. Po ich wyznaczeniu otrzymuje się równanie macierzowe (11):

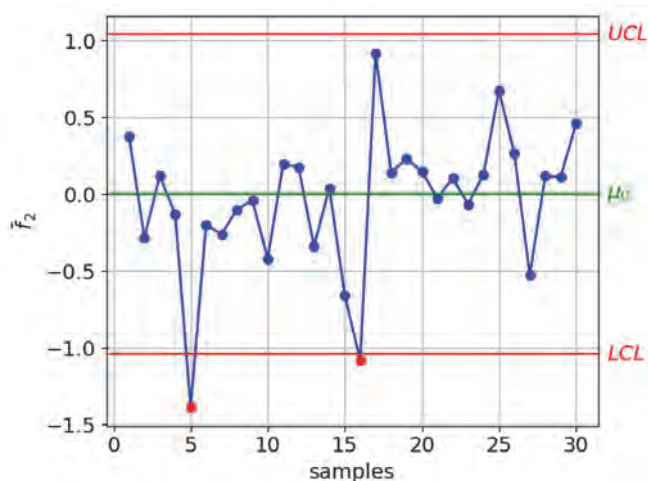
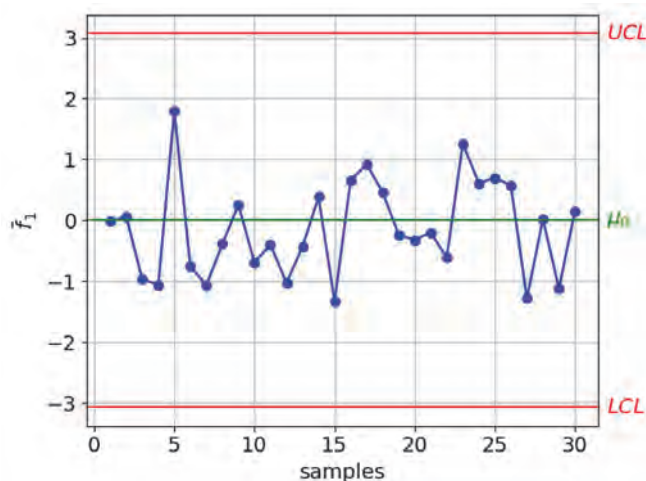
$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_i & 0,2050 \\ 0,2050 & 0,1681 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Po podstawieniu wartości własnych λ_1 i λ_2 kolejno do wzoru (15) otrzymuje się odpowiednie układy równań, takie jak w (12). Rozwiązując te równania, otrzymuje się wektory \bar{u}_1 i \bar{u}_2 dla przyjętych danych. Po skorzystaniu z normalizującego równania (13) otrzymuje się wektory własne \bar{v}_1 i \bar{v}_2 , które tworzą macierz współczynników przetwarzania \mathbf{V} :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,9739 & -0,2270 \\ 0,2270 & 0,9739 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując macierz znormalizowanych i wyśrodkowanych wartości wejściowych, na podstawie równania (8), wyznacza się współrzędne danych początkowych w płaszczyźnie składowych głównych.

Na rys. 5 przedstawiono pole rozrzutu danych wejściowych we współrzędnych składowych głównych. Widać, że punkty zmieniły swoje położenie względem położenia na rys. 2 ze względu na wspomnianą wyżej transformację geometryczną.



Rys. 6. Karty kontrolne metody wykorzystujące główne składowe
Fig. 6. Control charts of the method using principal components

Na rysunku 6 przedstawiono punkty charakteryzujące zmiany procesu na dwu kartach kontrolnych z wykorzystaniem metody składowych głównych.

Druga główna składowa w punktach 5 i 16 wykresów na rysunku 6 przekracza dolną granicę kontrolną, co świadczy o zaburzeniach badanego procesu. Z przeprowadzonej analizy wynika, że w procesie technologicznym wystąpiły trzy zakłócenia. Jeżeli odchylenia te nie prowadzą do sytuacji krytycznej, to ich konsekwentna identyfikacja może służyć jako narzędzie do udoskonalenia jakości obserwowanego procesu.

4. Wnioski

W kontroli jednoparametrowych procesów technologicznych stosuje się powszechnie wykresy na kartach Shewharta. Wykresy te tworzy się na osiach ortogonalnych, co umożliwia na podstawie rozrzutu odrębną ocenę wpływu każdego z monitorowanych parametrów na przebieg procesu technologicznego. Przy sterowaniu procesami o dwu kontrolowanych parametrach, rozrzut wartości wyjściowych w większości przypadków opisuje się równaniem elipsy o nachyleniu głównej osi zależnej od współczynnika korelacji. Dlatego też przy występowaniu korelacji karty Shewharta dają nieprawidłowe wskazanie punktu na karcie kontrolnej, który odpowiada wyjściu procesu ze stanu statystycznie kontrolowanego. W takim przypadku wiarygodny wynik otrzymuje się stosując kryteria wieloparametrowe.

Przykładem jest zastosowanie kart kontrolnych Hotellinga. W większości przypadków pozwalają one najpierw zidentyfikować występowanie zaburzenia procesu. Jeśli ono występuje, to stosując określone kryterium, można zidentyfikować przebieg każdego ze składników. Jednak karty Hotellinga mogą nie zawsze pokazywać, który wskaźnik bezpośrednio (lub łączny wpływ których wskaźników) powoduje naruszenie właściwego przebiegu procesu.

Odrębne i niezależne szacowania wpływu obserwowanych parametrów procesu umożliwia zastosowanie w konstrukcji kart kontrolnych omówionej metody analizy głównych składowych PCA. Metoda ta eliminuje wpływ korelacji na ocenę zaburzenia procesu, gdyż wybierane są w niej osie, które pokrywają się z osiami wektora rozpraszania.

Przy dużej liczbie parametrów wpływających na przebieg procesu technologicznego, metoda ta pozwala na ocenę prawidłowości tego przebiegu przez monitoring dwu lub trzech najbardziej istotnych parametrów. Ułatwia to budowanie wykresów kontrolnych i stanowi uzasadnienie, że metoda głównych składowych ma perspektywy zastosowania w kartach kontrolnych do badania jakości procesów produkcyjnych.

Bibliografia

1. Joint Committee for Guides in Metrology, *Evaluation of Measurement Data—The Role of Measurement Uncertainty in Conformity Assessment*, [www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_106_2012_E.pdf].
2. Shewhart W.A., *The Application of Statistics as an Aid in Maintaining Quality of a Manufactured Product*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 20, No 152, 1925, 546–548, DOI: 10.2307/2277170.
3. Volodarsky E., Warsza Z.L., Kosheva I., Dobrolyubova M., *Zastosowanie kart kontrolnych Hotellinga w kontroli jakości wieloparametrowego procesu technologicznego*, „Przemysł Chemiczny”, Vol. 97, No. 4, 2018, 579–583, DOI: 10.15199/62.2018.4.13.
4. Bersimis S., Psarakis S., Panaretos J., *Multivariate statistical process control charts: an overview*, „Quality and Reliability Engineering International”, Vol. 23, No. 5, 2007, 517–543. DOI: 10.1002/qre.829.
5. Montgomery D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, 3rd ed., New York: John Wiley & Sons, 1996
6. Jackson J.E., Mudholkar G.S., *Control Procedures for Residuals Associated with Principal Component Analysis*, „Technometrics”, Vol. 21, No. 3, 1979, 341–349, DOI: 10.1080/00401706.1979.10489779.
7. Strang G., *Eigenvalues and Eigenvectors, Introduction to Linear Algebra*, 5th ed., Wellesley-Cambridge Press, 2016, 283–297, ISBN:978-09802327-7-6.
8. Volodarsky E., Warsza Z.L., Kosheva L., Idźkowski A., *Precautionary statistical criteria in the monitoring quality of technological process*. SCIT 2016 Recent Advances in Systems, Control, and Information Technology. (Editors: R. Szewczyk, M. Kaliczyńska), Vol. 543, “Advances in Intelligent Systems and Computing” Springer International Publishing 2017, 740–750, DOI: 10.1007/978-3-319-48923-0_80.
9. Volodarsky E., Warsza Z.L., Kosheva L., *Nowe statystyczne kryteria ostrożności do monitorowania jakości procesów technologicznych*. „Przemysł Chemiczny”, Vol. 96, No. 2, 2017, 386–390, DOI: 10.15199/62.2017.2.21.
10. Volodarsky E., Warsza Z.L., Kosheva I., Dobrolyubova M., *Zastosowanie kart kontrolnych Hotellinga w kontroli jakości n-parametrowego procesu technologicznego*. „Przemysł Chemiczny”, Vol. 97, No 4, 2018, 579–583, DOI: 10.15199/62.2018.4.13.
11. Volodarskiy Y., Warsza Z.L., Pototskiy I., *The use of CUSUM-charts for identification the technological process disorder at the initial stage*, Proceedings of

AUTOMATION 2020, AISIC, Vol. 1140, 2020, 147–156, DOI: 10.1007/978-3-030-40971-5_14.

12. Volodarsky Y., Kosheva L., Warsza Z.L., Klevtsova M., *Control stability of indicators product quality*. Proceedings of 28th Symposium “Metrology and Metrology Assurance 2018. Sozopol, Bulgaria, 7–11 September 2017, 332–336.

13. Volodarskyi Y., Kozyr O., Warsza Z.L., *Principal Components Method in Control Charts Analysis*. Automation 2023: Key Challenges in Automation, Robotics and Measurement Techniques. LNNS, Vol. 630, Springer Nature Switzerland AG, 2023, 212–222, DOI: 10.1007/978-3-031-25844-2_20.

Application of Principal Components Method in Control Charts of Multi-Parameter Processes

Abstract: The article describes in detail the method of constructing control charts based on principal components. Evaluation of the effectiveness of the application of the method is carried out on simulated data, which are close to the measurement results obtained during the control of a real technological process. The results show that the proposed method is effective for controlling a multi-parameter technological process in the presence of a correlated parameters.

Keywords: Shewhart control charts, principal components method, control of a multi-parametric technological process

doc. dr inż. Zygmunt Lech Warsza

zlw1936@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3537-6134



Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatyki i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor lub współautor ponad 400 publikacji, 10 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.

prof. dr nauk techn. Evgeniy T. Volodarsky

vet-1@ukr.net

ORCID: 0000-0003-2573-6543



Praca: Narodowy Techniczny Uniwersytet Ukrainy – Politechnika Kijowska „KPI”, Katedra Automatyki i Badań Eksperymentalnych; Przewodniczący Podkomisji „Metrologia” w Państwowej Agencji Akredytacyjnej Ukrainy. Senior member of IEEE. Prezydent Ukraińskiej Akademii Metrologii. Zainteresowania naukowe: podstawy teoretyczne systemów pomiarowych do monitorowania i testowania. Autor kilku książek i ponad 300 publikacji. Odznaczony przez Prezydenta „Zasłużony wykładowca Ukrainy”.

dr inż. Oleh Kozyr

olegkozyr86@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9285-5940



W 2021 r. obronił pracę magisterską o specjalności: normalizacja, certyfikacja i aparatura pomiarowa oraz uzyskał stopień doktora nauk inżynierskich na Politechnice Kijowskiej im. Igora Sikorskiego. Pracuje na stanowisku profesora nadzwyczajnego w Katedrze Technologii Informatycznych i Pomiarowych Wydziału Inżynierii Instrumentalnej Politechniki Kijowskiej. Zainteresowania naukowe: modelowanie statystyczne, statystyczna kontrola jakości, uczenie maszynowe.