

Zadanie kinematyki odwrotnej robota eksperymentalnego w położeniach niejednoznacznych

Marcin Lubiński

Rozwiązanie zadania kinematyki odwrotnej w położeniach niejednoznacznych wymaga specjalnego podejścia. Położenia niejednoznaczne umożliwiają osiągnięcie zadanej pozycji i orientacji w wielu konfiguracjach. W pracy omówiona została metodyka postępowania dla zaprezentowanych przypadków niejednoznaczności. Przedstawiony algorytm ma zastosowanie do robota eksperymentalnego zbudowanego na bazie manipulatora IRb-6 umieszczonego na torze jezdny LP-1. Wyznaczenie prawidłowych współrzędnych naturalnych robota eksperymentalnego ma kluczowe znaczenie dla kolejnych etapów planowania trajektorii ruchu.

Wyznaczenie współrzędnych naturalnych robota IRb-6 umieszczonego na torze jezdny LP-1, opisujących go w pożądanej pozycji, nie stanowi większego problemu w przypadku znajomości równań kinematyki odwrotnej. Komplikacje pojawiają się w położeniach niejednoznacznych, w których zadana pozycja i orientacja efektora może być osiągnięta w nieskończonej liczbie rozwiązań współrzędnych naturalnych. W takiej sytuacji równania kinematyki odwrotnej nie mają zastosowania i należy wykorzystać indywidualne podejście do problemu. W dalszej części artykułu przedstawione zostaną przypadki niejednoznacznych położeń współrzędnej naturalnej λ_0 , jak również metodyka jej wyznaczania spośród zakresów możliwych do osiągnięcia.

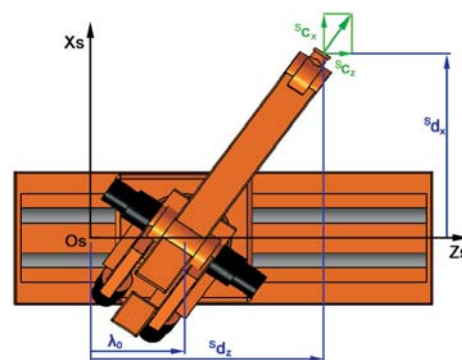
Niniejsza praca jest drugą częścią tworzonego kompleksowego oprogramowania sterującego robotem eksperymentalnym na podstawie informacji uzyskanych z systemu wizyjnego. Pierwsza część dotyczy analitycznego opisu przestrzeni roboczej [2].

Zadanie kinematyki odwrotnej

W celu rozwiązania zadania kinematyki odwrotnej niezbędne jest wyznaczenie macierzy ${}^S T_{5zad}$ opisującej orientację i położenie sprzęgu robota eksperymentalnego względem bazowego układu współrzędnych stanowiska [1], zgodnie ze wzorem:

$${}^S T_{5zad} = {}^S X_{zad} \cdot E^{-1} \quad (1)$$

Macierz ${}^S X_{zad}$ zawiera zadawane parametry położenia i orientacji efektora robota, a macierz E opisuje parametry przejścia z układu sprzęgu do układu współrzęd-



Rys. 1. Widok manipulatora IRb-6 na torze LP-1 z rzutami współczynników macierzy ${}^S T_{5zad}$

nych efektora. Z macierzy ${}^S T_{5zad}$ w postaci (2) otrzymuje się formuły stanowiące rozwiązanie zadania odwrotnego w postaci analitycznej jawnej [1].

$${}^S T_{5zad} = \begin{bmatrix} {}^s a_x & {}^s b_x & {}^s c_x & {}^s d_x \\ {}^s a_y & {}^s b_y & {}^s c_y & {}^s d_y \\ {}^s a_z & {}^s b_z & {}^s c_z & {}^s d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

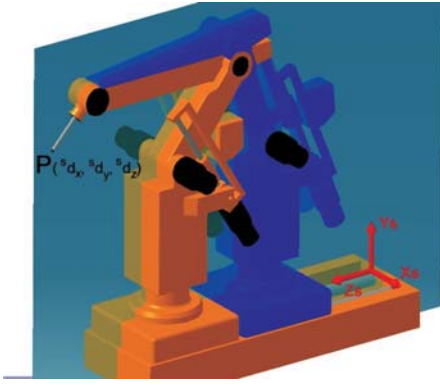
Dla warunku ${}^s c_x^2 + {}^s c_y^2 > 0$ i ${}^s c_x \neq 0$ opisującego przypadku jednoznacznego położenia robota eksperymentalnego (rys. 1), współrzędną naturalną λ_0 , określającą pozycję na torze jezdny LP-1, wyznaczamy wg wzoru (3) zgodnie z pracą [1].

$$\lambda_0 = {}^s d_z - {}^s d_x \cdot \frac{{}^s c_z}{{}^s c_x} \quad (3)$$

Wyznaczenie współrzędnej naturalnej λ_0 w położeniach niejednoznacznych

W położeniach niejednoznacznych parametrem determinującym rozwiązania wszystkich kolejnych złą-

mgr inż. Marcin Lubiński – Instytut Automatyki Politechniki Śląskiej



Rys. 2. Położenie i orientacja efektora osiągnięta za pomocą dwóch różnych konfiguracji robota

czy ruchowych (opisanych współrzędnymi $\theta_1 - \theta_5$) jest współrzędna naturalna toru jezdnego λ_0 .

Pierwszym przypadkiem nieskończonej liczby możliwych rozwiązań współrzędnych naturalnych, dających identyczne położenie i orientację efektora w przestrzeni, jest sytuacja, gdy zadany do osiągnięcia punkt P znajduje się na pionowej płaszczyźnie wyznaczonej przez osie y_s i z_s (współrzędna $s^2d_x = 0$) (rys. 2). Opisane wyżej położenia są możliwe, gdy spełniony jest zestaw warunków: $s^2c_x^2 + s^2c_y^2 > 0$ i $s^2c_x = 0$ i $s^2d_x = 0$. Przedstawione na rys. 2 położenia robota eksperymentalnego są dwoma spośród wielu dostępnych rozwiązań. Zadana orientacja i położenie osiągalne są również dla każdego λ_0 pomiędzy zaprezentowanymi na rys. 2.

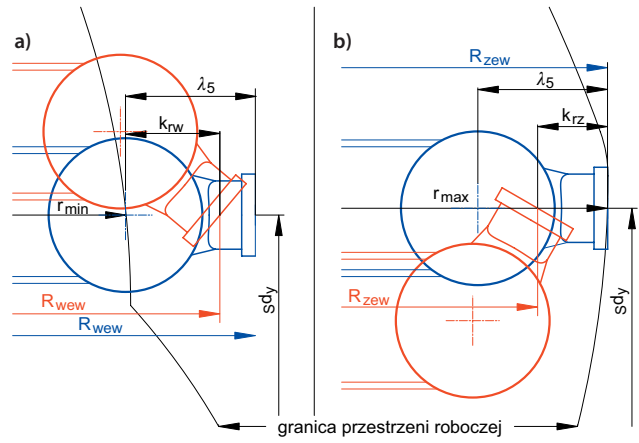
W celu jednoznacznego rozwiązania powyższej sytuacji należy wyznaczyć wymiary r_{\min} i r_{\max} ograniczające przestrzeń roboczą właściwą zgodnie z pracą [3]. Wyboru jednego z 11 przedziałów zaprezentowanych w pracy [3] należy dokonać na podstawie wartości $s^2d_y = z_0$.

W obliczonych wymiarach należy uwzględnić wartości korygujące k_{rz} i k_{rw} (4), zawężające przestrzeń roboczą w zależności od pożądanej orientacji ostatniego członu (rys. 3.). Zmodyfikowany osiągalny zakres przestrzeni roboczej obrysowany przez promienie R_{zew} i R_{wew} opisują wzory (5). Przedział $(y_2 - y_5)$, dla którego korygowana jest wartość r_{\max} , znajduje się w pracy [2]. Dla pozostałych wartości r_{\max} nie uwzględniono ww. korekty ze względu na ograniczony zakres orientacji znajdujących się blisko górnej lub dolnej granicy przestrzeni roboczej.

$$\begin{aligned} k_{rw} &= |\lambda_5 \cdot s^2c_z| \\ k_{rz} &= \lambda_5 - k_{rw} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R_{wew} &= r_{\min} + k_{rw} \\ R_{zew} &= r_{\max} - k_{rz} \quad \text{dla } y_2 \leq s^2d_y \leq y_5 \\ R_{zew} &= r_{\max} \quad \text{dla } s^2d_y < y_2 \cup s^2d_y > y_5 \end{aligned} \quad (5)$$

Rys. 3a przedstawia dwie różne orientacje na wewnętrznej granicy przestrzeni roboczej dla dwóch punktów o takiej samej współrzędnej s^2d_y . Widoczny jest wpływ orientacji na wartość promienia R_{wew} . Rys. 3b prezentuje analogiczną sytuację na zewnętrznej granicy przestrzeni roboczej.



Rys. 3. Wpływ orientacji ostatniego członu na zasięg maksymalny

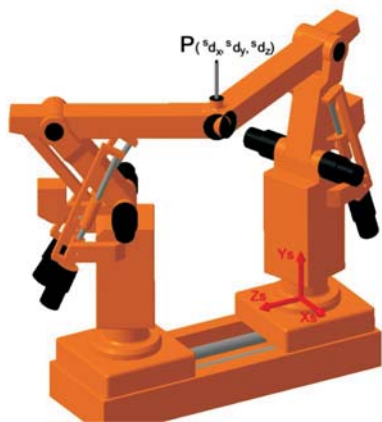
Należy wyznaczyć dwa przedziały λ_0 , w których możliwe było by osiągnięcie danego punktu, gdyby nie ograniczenie zakresu toru jezdnego oraz współrzędnej naturalnej θ_4 (ograniczenia te zostaną uwzględnione w dalszej części pracy). Przedziały te są symetryczne względem prostej równoległej do osi y_s przechodzącej przez zadany punkt i powstają poprzez dodanie lub odjęcie od współrzędnej s^2d_z wyznaczonych promieni R_{zew} i R_{wew} . Pierwszy przedział zawiera się między λ_{01} i λ_{02} wyznaczanymi z zależności (6). Drugi symetryczny przedział wartości λ_0 zawarty między λ_{03} i λ_{04} opisują wzory (7).

$$\lambda_{01} = s^2d_z - R_{zew}, \quad \lambda_{02} = s^2d_z - R_{wew} \quad (6)$$

$$\lambda_{03} = s^2d_z + R_{wew}, \quad \lambda_{04} = s^2d_z + R_{zew} \quad (7)$$

Uwzględnienie ograniczenia pracy toru jezdnego w zakresie 0 – 851 mm polega na odcięciu z wyznaczonych przedziałów wszystkich wartości $\lambda_0 < 0$ oraz $\lambda_0 > 851$. W przypadku, gdy w którymś z wyznaczonych przedziałów obydwa graniczne wartości znajdują się poza zakresem toru jezdnego LP-1, należy wyeliminować dany przedział z dalszych obliczeń.

Zasięg ruchu czwartego członu manipulatora IRb-6 od 0° do 180° względem osi y_s (opisywany przez współrzędną naturalną θ_4) jest kolejnym czynnikiem mającym wpływ na zbiór rozwiązań λ_0 . Zakres pracy powyżej opisywanego członu rozciąga się od pionowego położenia skierowanego zgodnie z osią y_s do pozycji przeciwstawnej skierowanej pionowo w dół bez możliwości „sięgnięcia za siebie”. Wybór prawidłowego zbioru rozwiązań polega na porównaniu zadanej orientacji punktu P z orientacją manipulatora w sprawdzanych położeniach. Parametrem decydującym o rozwiązaniu jest wektor s^2c_z z macierzy ${}^S T_{5zad}$. Jeżeli $s^2c_z > 0$, to orientacja jest skierowana zgodnie z osią z_s i poprawnym zbiorem rozwiązań jest przedział $A1 = \{\lambda_0 \in [\lambda_{01} \dots \lambda_{02}] \text{ i } 0 \leq \lambda_0 \leq 851\}$ zgodnie z zależnościami (6). Gdy $s^2c_z < 0$, możliwe do realizacji położenia opisane są zbiorem $A2 = \{\lambda_0 \in [\lambda_{03} \dots \lambda_{04}] \text{ i } 0 \leq \lambda_0 \leq 851\}$ wg wzorów (7). Jeżeli $s^2c_z = 0$, człon którego położenie opisuje θ_4 , ma kierunek zgodny z kierunkiem osi y_s i obydwa z wyznaczonych zakresów są poprawne.



Rys. 4. Położenie i orientacja punktu P osiągnięta dla granicznych wartości współrzędnej toru jezdnego

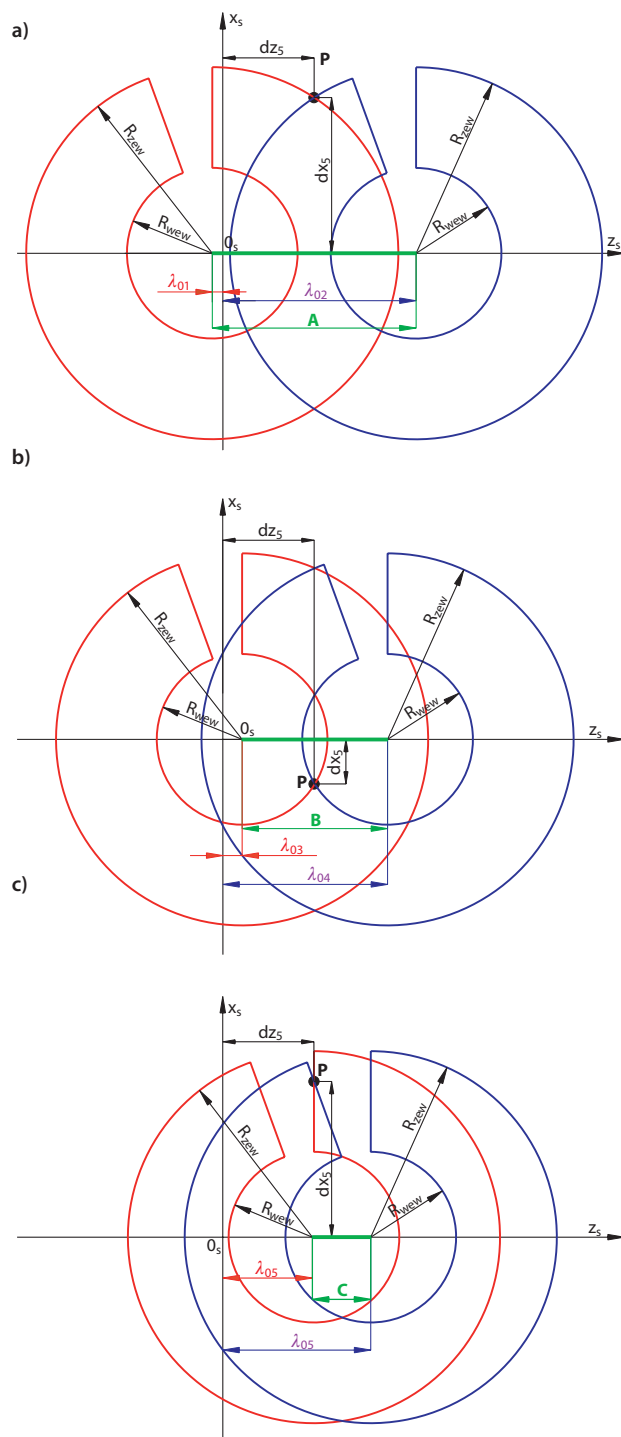
Kryteria wyboru jednego z nich pozostawia się czytelnikowi ze względu na różnorodność wymagań przy planowaniu trajektorii. Ostateczną wartość λ_0 otrzymujemy przez wyznaczenie wartości średniej arytmetycznej z końcowego przedziału.

Drugim przypadkiem, umożliwiającym rozwiązanie zadania kinematyki odwrotnej robota eksperymentalnego za pomocą wielu położeń współrzędnej λ_0 , jest sytuacja, gdy ostatni człon manipulatora skierowany jest zgodnie z kierunkiem osi y_s (rys. 4). Konfiguracja taka jest możliwa dla osi z_s układu $x_s y_s z_s$ skierowanej pionowo w "górze" lub w „dół”. Przedstawione położenia możliwe są, gdy spełniony jest warunek: ${}^s c_x^2 + {}^s c_z^2 = 0$. Zaproponowane rozwiązanie problemu doboru λ_0 zbliżone jest do opisywanego przypadku LP-1, ma jednak większą liczbę dodatkowych ograniczeń wynikających z ulokowania zadanego punktu w przestrzeni 3-wymiarowej, a nie tak jak w poprzednim przypadku na płaszczyźnie.

Obliczenia należy rozpocząć od analogicznego wyznaczenia promieni R_{zew} (4) i R_{wew} (5) opisujących zasięg robota uzależniony od współrzędnej ${}^s d_y$. Następnie wyznaczony zostanie początkowy przedział wartości λ_0 , który w kolejnych krokach będzie zawężany i dzielony na podprzedziały, uwzględniając wszystkie ograniczenia wynikające ze struktury kinematycznej robota. Skrajne wartości przedziału początkowego $A = \{\lambda_{01} \dots \lambda_{02}\}$ wyznaczone zostaną poprzez usytuowanie manipulatora na torze LP-1 w pozycjach, w których punkt P znajduje się na obwodzie koła o promieniu R_{zew} (rys. 5a). Wartości te wyznaczone są wg wzorów (8). W przypadku, gdy współrzędna ${}^s d_x = R_{zew}$, punkt P usytuowany jest na obrzeżu przestrzeni roboczej i rozwiązanie $\lambda_{01} = \lambda_{02}$.

$$\begin{aligned} \lambda_{01} &= {}^s d_z^2 - \sqrt{R_{zew}^2 - {}^s d_x^2} \\ \lambda_{02} &= {}^s d_z^2 + \sqrt{R_{zew}^2 - {}^s d_x^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Uzyskany przedział wartości λ_0 należy skontrolować, czy nie ma rozwiązań, które znajdują się zbyt blisko osi obrotu kolumny manipulatora i są z te-



Rys. 5. Wyznaczane przedziały wartości dla zbiorów A, B i C

go powodu nieosiągalne. Dla punktów, których współrzędna $|{}^s d_x| < R_{zew}$ należy wyznaczyć zakres $B = \{\lambda_{03} \dots \lambda_{04}\}$ niepoprawnych rozwiązań λ_0 , które należy wyeliminować (rys. 5b). Pozycje skrajne przedziału wyznaczone są z zależności (9).

$$\begin{aligned} \lambda_{03} &= {}^s d_z^2 - \sqrt{R_{wew}^2 - {}^s d_x^2} \\ \lambda_{04} &= {}^s d_z^2 + \sqrt{R_{wew}^2 - {}^s d_x^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Kolejnym zakresem wymagającym wyeliminowania z początkowego przedziału rozwiązań jest obszar we-

wnątrz nieosiągalnego 20° „klinu” wynikającego z ograniczonego zakresu ruchu współrzędnej naturalnej θ_1 oraz obrotu manipulatora względem toru jezdny [2]. Ograniczenie to dotyczy tylko punktów ze współrzędną ${}^s d_x > 0$. W celu określenia przedziału $C = \{\lambda_{05} \dots \lambda_{06}\}$ należy rozwiązać równania (10) (rys. 5c).

$$\begin{aligned}\lambda_{05} &= {}^s d_z \\ \lambda_{06} &= {}^s d_z + {}^s d_x \cdot \operatorname{tg}(20^\circ)\end{aligned}\quad (10)$$

W celu wyznaczenia rozwiązań λ_0 uwzględniających opisywane powyżej ograniczenia należy przeprowadzić działania na zbiorach (11):

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \quad (11)$$

Otrzymany zbiór \mathbf{D} położeń współrzędnej naturalnej λ_0 nie uwzględnia technicznych ograniczeń pracy toru jezdny od 0 mm do 851 mm. Aby otrzymać rozwiązania możliwe do zrealizowania na torze LP-1 należy wyznaczyć zbiór \mathbf{E} (12):

$$E = \{\lambda_0 : \lambda_0 \in D \text{ i } 0 \leq \lambda_0 \leq 851\} \quad (12)$$

Zbiór \mathbf{E} położeń manipulatora na torze jezdny umożliwia osiągnięcie pożądanej pozycji i orientacji efektora. W celu uzyskania jednej wartości λ_0 , należy wyliczyć wartość średnią arytmetyczną z możliwych rozwiązań zbioru \mathbf{E} . W przypadku, gdy przedział \mathbf{E} składa się z dwóch rozdzielonych podprzedziałów średnie wartości λ_0 należy wyznaczyć dla każdego z nich, uzyskując dwa rozwiązania, z których można wybrać dowolne kierując się zewnętrznymi uwarunkowaniami.

Skrajne położenia niejednoznaczne współrzędnej naturalnej θ_5

Ostatnia współrzędna naturalna θ_5 opisująca obrót efektora względem osi z_5 ma dwa różne położenia, w których osiągnięte są identyczne orientacje. Zakres zmian kąta wynosi $\Delta\theta_5 = 360^\circ$ [1]. Z tego względu, gdy θ_5 znajduje się na granicy zakresu pracy ($\theta_5 = \theta_{5\min}$ lub $\theta_5 = \theta_{5\max}$), ta sama orientacja osiągalna jest dla obydwu skrajnych pozycji z zakresu. Podczas wyboru wartości θ_5 w trakcie planowania trajektorii ruchu należy kierować się wartością θ_5 w pozycji poprzedniej, tak aby zmiana kąta z położenia poprzedniego do obecnego była jak najmniejsza.

Program do rozwiązywania zadania kinematyki odwrotnej

Zaprezentowana metodyka obliczeń współrzędnych naturalnych w pozycjach niejednoznacznych została zaimplementowana w skrypcie do rozwiązywania zadania kinematyki odwrotnej napisanego w środowisku MATLAB 6.5. Program ten zawiera również formuły z pracy [1] do wyznaczania pozostałych współrzęd-

nych naturalnych. Stworzone oprogramowanie zostało podzielone na sekcje w celu większej przejrzystości oraz prostszego odszukania i ewentualnej modyfikacji fragmentu odpowiedzialnego za pożądaną funkcję. Pierwsza część zawiera parametry stałe robota, wprowadzanie i przeliczenie parametrów zadanych. Druga sekcja odpowiada za wyznaczenie współrzędnej naturalnej λ_0 i podzielona jest na 3 moduły. Pierwszy moduł uruchamiany jest w sytuacjach jednoznacznych opisanych w pracy [1]. Kolejne dwa moduły odpowiadają przedstawionym w niniejszej pracy przypadkom niejednoznacznym. Następne 4 sekcje służą do wyliczenia wartości współrzędnych naturalnych $\theta_1 - \theta_4$. W sekcji siódmej wyznaczany jest kąt współrzędnej θ_5 przy uwzględnieniu opisanych niejednoznacznych sytuacji skrajnych. W ostatniej części wykonywana jest kontrola wyznaczonych współrzędnych pod kątem możliwości technicznych robota oraz wyświetlenie otrzymanych wyników.

Skrypt ten jest częścią obszerniejszego oprogramowania, które po przepisaniu w środowisku programowym robota eksperymentalnego będzie odpowiedzialne za sterowanie robotem.

Wnioski

Przedstawione algorytmy wyznaczania współrzędnej λ_0 w położeniach niejednoznacznych zapobiegają ułokowaniu robota na granicy osiągalnej podprzestrzeni roboczej dla zadanego punktu \mathbf{P} . Zaprezentowana metodyka postępowania przy rozwiązywaniu położeń niejednoznacznych jest dedykowana do robota eksperymentalnego. Można ją z powodzeniem stosować do innych robotów o zbliżonej strukturze kinematycznej po indywidualnym przeanalizowaniu zakresów przestrzeni roboczej oraz dostosowaniu do niej równań opisujących poszczególne przedziały i podprzestrzenie.

W pracy [3] zaprezentowano sposób wyznaczenia rozwiązania λ_0 z podziałem na szereg obszarów. W niniejszym opracowaniu zaprezentowany został jednolity algorytm w zależności od przedstawionych przypadków niejednoznaczności. Dodatkowo istnieje możliwość odczytania z programu rozwiązującego przedstawiony problem zakresów z poprawnymi rozwiązaniami (zbiór \mathbf{E}) i wybór jednej wartości wg własnych uwarunkowań.

Bibliografia

1. Szkodny T.: *Modelowanie i symulacja ruchu manipulatorów robotów przemysłowych*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004.
2. Lubiński M.: *Analityczny opis przestrzeni roboczej robota eksperymentalnego*. PAR 06/09, s. 40–42.
3. Szkodny T.: *Przestrzeń robocza robota eksperymentalnego*. Materiały Konf. Nauk-Techn. AUTOMATION'97, Warszawa 1997, t. 1, s. 165–172.
4. Jezierski E.: *Dynamika robotów*. WNT, Warszawa 2006. ■