dr inż. Wojciech Trzasko
Politechnika Białostocka w Białymstoku

WZGLĘDNA PUNKTOWA ZUPEŁNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

W pracy sformułowano definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności oraz względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych niecałkowitego rzędu. Podano też metodę wyznaczania nieujemnych warunków brzegowych, dla których trajektoria stanu układu względnie punktowo zupełnego przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy. Rozważania zilustrowano przykładem.

RELATIVE POINTWISE COMPLETENESS OF POSITIVE CONTINUOUS-DISCRETE TIME FRACTIONAL ORDER SYSTEMS

The paper considers a class of linear 2D positive continuous-discrete time fractional order systems. The definitions of pointwise completeness and relative pointwise completeness are introduced and necessary and sufficient conditions are given. The considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykłady dodatnich układów liniowych są podane w monografii [8] oraz cytowanej tam literaturze.

W teorii układów dodatnich zamiast z przestrzeni liniowych korzystamy z teorii stożków. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i mniej zaawansowaną od klasycznej teorii układów liniowych. Problem analizy i syntezy dodatnich układów liniowych z opóźnieniem jest tematem wielu publikacji w ostatnich kilku latach, np. [1, 4, 8, 12, 13].

Ostatnio, nowa klasa dwuwymiarowych liniowych hybrydowych (ciągło-dyskretnych) układów dodatnich została zaproponowana w pracy [7], a w pracy [6] podano trzy różne metody wyznaczania rozwiązania równań stanu układów hybrydowych. W pracy [5] wprowadzono rozszerzenie na układy niecałkowitego rzędu.

Pierwszy raz pojęcie punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji ciągłych układów z opóźnieniami wprowadził Weiss [14]. Problem punktowej zupełności oraz punktowej degeneracji dodatnich układów: dyskretnych, ciągłych, z opóźnieniami oraz niecałkowitego rzędu został sformułowany i rozwiązany w pracach [1, 4, 9, 13], zaś w pracach [2, 3, 11] został rozwiązany dla układów dwuwymiarowych, w tym hybrydowych.

W niniejszej pracy, wykorzystując rezultaty prac [5, 9, 11], rozpatrzymy problem punktowej zupełności oraz względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych niecałkowitego rzędu. Najpierw, uwzględniając specyfikę dodatnich układów dwuwymiarowych, zostaną wprowadzone definicje punktowej zupełności i względnej punktowej zupełności. Następnie zostaną podane warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności takich układów oraz prosta metoda wyznaczania nieujemnych warunków brzegowych, dla których trajektoria stanu układu względnie punktowo zupełnego przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy.

2. DODATNI UKŁAD CIĄGŁO-DYSKRETNY NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^{n}=\Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_{+}^{n\times m}$, przy czym $\Re_{+}^{n}=\Re_{+}^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_{+}, zaś zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych przez $R_{+}=[0,+\infty)$.

Weźmy pod uwagę dwuwymiarowy układ ciągło-dyskretny liniowy stacjonarny niecałkowitego rzędu opisany równaniami stanu

$$\frac{d^{\alpha}x_1(t,i)}{dt^{\alpha}}=A_{11}x_1(t,i)+A_{12}x_2(t,i),\ t\in R_{+}, \tag{1a}$$

$$\Delta^{\beta}x_2(t,i+1)=A_{21}x_1(t,i)+A_{22}x_2(t,i),\ i\in Z_{+}, \tag{1b}$$

przy czym $\alpha\,(0<\alpha<1)$ jest rzędem pochodnej niecałkowitego rzędu względem czasu ciągłego *t*, $\beta\,(0<\beta<1)$ jest rzędem różnicy niecałkowitego rzędu względem czasu dyskretnego *i*, $x_1(t,i)\in\Re^{n_1}$, $x_2(t,i)\in\Re^{n_2}$ oraz $A_{11}\in\Re^{n_1\times n_1}$, $A_{12}\in\Re^{n_1\times n_2}$, $A_{21}\in\Re^{n_2\times n_1}$, $A_{22}\in\Re^{n_2\times n_2}$.

Układ (1) ma strukturę podobną do modelu 2W Roessera [8], gdzie $x_1(t,i)\in\Re^{n_1}$ jest odpowiednikiem wektora horyzontalnego, zaś $x_2(t,i)\in\Re^{n_2}$ wektora wertykalnego. W pracach [2, 5, 6, 7] układy ciągło dyskretne są nazywane dwuwymiarowymi układami hybrydowymi.

Warunki brzegowe dla układu (1) mają postać

$$x_1(0,i)=x_1(i),\ i\in Z_{+}\ \text{ oraz }\ x_2(t,0)=x_2(t),\ t\in R_{+}. \tag{2}$$

Jako definicję pochodnej niecałkowitego rzędu $\alpha\,(0<\alpha<1)$ w pracy została przyjęta definicja Caputo [9], która dla układów ciągło-dyskretnych rzędu $\alpha\,(0<\alpha<1)$ ma postać

$$\frac{d^{\alpha}x_1(t,i)}{dt^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{x_1(\tau,i)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau, \tag{3}$$

gdzie $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ jest funkcją gamma.

Następująca definicja różnicy wstecznej niecałkowitego rzędu β została przyjęta w pracy [9]:

$$\Delta^{\beta}x_2(t,i)=\sum_{j=0}^{i}\omega_j^{(\beta)}x_2(t,i-j),\ \ 0<\beta<1,\ \ i\in Z_{+}, \tag{4}$$

gdzie współczynniki $\omega_j^{(\beta)}$ zdefiniowane są wzorem rekurencyjnym [12]

$$\omega_0^{(\beta)}=1,\ \ \omega_j^{(\beta)}=(1-\frac{1+\beta}{j})\omega_{j-1}^{(\beta)},\ \ j=1,2,\ldots \tag{5}$$

Podstawiając (4) do (1b), po przekształceniach otrzymamy

$$x_2(t,i+1)=A_{21}x_1(t,i)+A_{\beta}x_2(t,i)+\sum_{j=2}^{i+1}c_jx_2(t,i-j+1),\ i\in Z_{+}, \tag{6}$$

gdzie

$$A_\beta = A_{22} + \beta I_{n_2}, \quad c_j = -\omega_j^{(\beta)}, \quad j = 2,3,\ldots. \tag{7}$$

Z równania (6) wynika, że układ niecałkowitego rzędu jest równoważny układowi z rosnącą liczbą opóźnień, przy czym współczynniki $c_j = -\omega_j^{(\beta)}$ maleją szybko do zera, gdy j rośnie do nieskończoności.

Definicja 1. [5] Układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) nazywamy 2W modelem wewnętrznie dodatnim, jeżeli dla dowolnych dodatnich warunków brzegowych

$$x_1(i) \in \Re_+^{n_1}, \ i \in Z_+ \ \text{ oraz } \ x_2(t) \in \Re_+^{n_2}, \ t \in R_+, \tag{8}$$

zachodzi $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ i $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ dla wszystkich $t \in R_+$ i $i \in Z_+$.

Uwzględniając podane w monografii [9] rozwiązania równań stanu układów niecałkowitego rzędu: dyskretnego z opóźnieniami oraz ciągłego, rozwiązanie układu (1) spełniające warunki brzegowe (2) można napisać zależnością rekurencyjną

$$x_1(t,i) = \Phi_0(t)x_1(i) + P(t)[\Psi_i x_2(t) + \sum_{l=0}^{i-1} \Psi_{i-l-1} A_{21} x_1(t,l)] \ \text{ dla } i = 0,1,2,\ldots \tag{9a}$$

$$x_2(t,i) = \Psi_i x_2(t) + \sum_{l=0}^{i-1} \Psi_{i-l-1} A_{21} x_1(t,l) \quad dla \quad i = 1,2,\ldots \tag{9b}$$

przy czym $P(t)$ jest operatorem określonym zależnością

$$P(t)x = \int_0^t \Phi(t-\tau) A_{12} x(\tau) d\tau, \tag{10a}$$

zaś

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(A_{11}t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{11}^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{10b}$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{11}^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}, \tag{10c}$$

$$\Psi_0 = I_{n_2}, \quad \Psi_{j+1} = \Psi_j A_\beta + \sum_{l=2}^{j+1} c_j \Psi_{j-l+1} \ \text{ dla } \ j = 0,1,\ldots. \tag{10d}$$

Twierdzenie 2. Układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) jest dodatni wewnętrznie, wtedy i tylko wtedy, gdy

1. A_{11} jest macierzą Metzlera, (11a)
2. $A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \Re_+^{n_2 \times n_1}$, $A_\beta = A_{22} + \beta I_{n_2} \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$. (11b)

Dowód. Dowód przeprowadzimy podobnie jak w twierdzeniu 3 pracy [5] wykorzystując poniższe lematy.

Lemat 1. Jeżeli niecałkowity rząd β spełnia zależność $0 < \beta \le 1$, to

$$c_j = -\omega_j^{(\beta)} > 0, \quad j = 2,3,\ldots \tag{12}$$

Dowód. Dowód lematu podany został w pracach [5, 9].

Lemat 2. Niech $0 < \beta \le 1$ oraz

$$A_\beta = A_{22} + \beta I_{n_2} \in \Re_+^{n_2 \times n_2} \tag{13}$$

wtedy

$$\Psi_i \in \Re_+^{n_2 \times n_2}, \quad i \in Z_+. \tag{14}$$

Dowód. Dowód wynika wprost z zależności (10d) i warunku (12).

Lemat 3. Niech A_{11} jest macierzą Metzlera oraz $0 < \alpha \le 1$, wtedy z (10b) i (10c) mamy

$$\Phi_0(t) = I_{n_1} + \frac{A_{11}t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \ldots \in \Re_+^{n_1 \times n_1}, \ t \ge 0, \tag{15a}$$

$$\Phi(t) = I_{n_1} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{A_{11}t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + \ldots \in \Re_+^{n_1 \times n_1}, \ t \ge 0. \tag{15b}$$

Dowód. Dowód lematu podany został w pracach [4, 9].

Zakładamy, że warunki powyższych lematów są spełnione. Z (9a) dla $i = 0$ mamy $x_1(t,0) = \Phi_0(t)x_1(0) + P(t)x_2(t) \in \Re_+^{n_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A_{11} jest macierzą Metzlera, zaś macierz $A_{12} \in \Re_+^{n_1 \times n_2}$ i warunki brzegowe spełniają (8). Podobnie z (9b) dla $i = 1$ mamy $x_2(t,1) = A_{21}x_1(t,0) + A_\beta x_2(t) \in \Re_+^{n_2}$ oraz $x_1(t,1) = \Phi_0 x_1(1) + P(t)x_2(t,1) \in \Re_+^{n_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $A_\beta \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$, $A_{21} \in \Re_+^{n_2 \times n_1}$ i warunki brzegowe spełniają (8). Kontynuując procedurę dla $i = 2,3,\ldots$ wykazujemy, że układ (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (11). □

3. WZGLĘDNA PUNKTOWA ZUPEŁNOŚĆ

Wykorzystując pojęcia punktowej zupełności, zdefiniowanej dla układów ciągłych z opóźnieniami [14] oraz dla układów dyskretnych [1], w tym dwuwymiarowych [2, 3, 11], można sformułować następujące definicje.

Definicja 2. Dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) nazywamy punktowo zupełnym w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \ge 1$, jeżeli dla każdego wektora

$$x_f = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} \in \Re_+^{n_1+n_2} \tag{16}$$

można tak dobrać warunki brzegowe (8), że $x_f = \begin{bmatrix} x_1(t_f,k) \\ x_2(t_f,k) \end{bmatrix}$.

Definicja 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) będziemy nazywać względnie punktowo zupełnym dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, jeżeli dla każdej składowej

$$x_{1f} = x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1} \tag{17}$$

wektora stanu (16) można tak dobrać warunki brzegowe (8), że $x_{1f} = x_1(t_f, k)$.

Definicja 4. Dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) będziemy nazywać względnie punktowo zupełnym dla stanu $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, jeżeli dla każdej składowej

$$x_{2f} = x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2} \tag{18}$$

wektora stanu (16) można tak dobrać warunki brzegowe (8), że $x_{2f} = x_2(t_f, k)$.

Poszukiwać będziemy rozwiązania, przy założeniu $x_2(t) := x_2$ dla $0 \leq t \leq t_f$, tzn. x_2 jest stałe w całym przedziale.

Rozwiązanie (9) równań stanu układu ciągło-dyskretnego niecałkowitego rzędu z warunkami brzegowymi (8) dla $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$ można napisać w postaci

$$x_f = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} x_0 = \boldsymbol{D} x_0, \tag{19}$$

gdzie

$$x_0 = [x_1(0), x_1(1), \ldots, x_1(k), x_2]^T \in \Re_+^{(k+1)n_1 + n_2}, \tag{20a}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1(0) & D_1(1) & \cdots & D_1(k) & D_1(k+1) \\ D_2(0) & D_2(1) & \cdots & 0 & D_2(k+1) \end{bmatrix} \in \Re_+^{(n_1+n_2)\times[(k+1)n_1+n_2]} \tag{20b}$$

przy czym

$$D_1(j) = P(t_f)(D^{k-1-j} + f_j^1) A_{21} \Phi_0(t_f), \;\; D_2(j) = (D^{k-1-j} + f_j^1) A_{21} \Phi_0(t_f), \;\; j = 0, \ldots, k-3, \tag{21a}$$

$$D_1(j) = P(t_f) D^{k-1-j} A_{21} \Phi_0(t_f), \;\; D_2(j) = D^{k-1-j} A_{21} \Phi_0(t_f), \;\; j = k-2, k-1, \tag{21b}$$

$$D_1(k) = \Phi_0(t_f), \tag{21c}$$

$$D_1(k+1) = P(t_f) D, \;\; D_2(k+1) = D, \;\; k = 1, \tag{21d}$$

$$D_1(k+1) = P(t_f)(D^2 + c_2 I_{n_2}), \;\; D_2(k+1) = D^2 + c_2 I_{n_2}, \;\; k = 2, \tag{21e}$$

$$D_1(k+1) = P(t_f)(D^k + f_k^2), \;\; D_2(k+1) = D^k + f_k^2, \;\; k =\geq 3, \tag{21f}$$

$$D = A_{21} P(t_f) + A_\beta \in \Re_+^{n_2 \times n_2}, \tag{22}$$

zaś $f_j^1 \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$ i $f_k^2 \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$ są wieloliniowymi funkcjami współczynników c_j, $j = 2, 3, \ldots$ (12) i wyrażenia D (22).

Łatwo sprawdzić, że $f_j^1 \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$ i $f_k^2 \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$ są to macierze o niezerowych elementach na głównej przekątnej i odpowiadają za niecałkowity rząd β równania różnicowego (1b), tzw. efekt nieskończonej pamięci funkcji podstawowej $\Psi_i \in \Re_+^{n_2 \times n_2}$ (10d).

Z definicji 2 i wzoru (19) wynika następujący warunek konieczny punktowej zupełności.

Lemat 4. Warunkiem koniecznym, aby dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu był punktowo zupełny w punkcie $(t,i)\in R_+\times Z_+$, $t=t_f>0$, $i=k\geq 1$, musi być spełniony warunek

$$rank\boldsymbol{D}=n_1+n_2. \tag{23}$$

Dowód. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że równanie (19) ma rozwiązanie dla dowolnego x_f wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\boldsymbol{D}$ (20b) ma pełny rząd wierszowy, czyli jest spełniony warunek (23). □

Należy zauważyć, że powyższy warunek jest także warunkiem koniecznym i wystarczającym punktowej zupełności standardowych układów ciągło-dyskretnych (1), tzn. o dowolnych elementach macierzy A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} i dowolnych niecałkowitych rzędach α $(0<\alpha<1)$ i β $(0<\beta<1)$.

Twierdzenie 3. Dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) jest punktowo zupełny w punkcie $(t,i)\in R_+\times Z_+$, $t=t_f>0$, $i=k\geq 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy z macierzy $\boldsymbol{D}$ (20b) można wybrać n_1+n_2 liniowo niezależnych kolumn takich, że macierz $\tilde{\boldsymbol{D}}$ utworzona z tych kolumn jest macierzą monomialną (w każdym wierszu i każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a wszystkie pozostałe są zerowe).

Dowód. Z definicji 2 i wzoru (19), przy założeniu $x_2(t):=x_2$ dla $0\leq t\leq t_f$, wynika, że dodatni układ (1) jest punktowo zupełny w punkcie (t_f,k) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_f\in\Re_+^{n_1+n_2}$ istnieje warunek brzegowy $x_0\in\Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$, czyli gdy jest spełniony warunek twierdzenia 3. Jeżeli jest spełniony warunek twierdzenia 3, to z macierzy $\boldsymbol{D}$ można wybrać n_1+n_2 kolumn liniowo niezależnych, które tworzą bazę przestrzeni $\Re_+^{n_1+n_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym wierszu i w każdej kolumnie tylko jeden element jest dodatni, a pozostałe są zerowe. Utworzona z tych kolumn macierz $\tilde{\boldsymbol{D}}$ jest macierzą monomialną. Macierz odwrotna macierzy o nieujemnych elementach jest też macierzą o nieujemnych elementach wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona macierzą monomialną [8]. □

Przy spełnieniu warunku twierdzenia 3 na podstawie wzoru (19) można wyznaczyć warunki brzegowe (8) dla dowolnego zadanego stanu końcowego (16) w punkcie $(t,i)\in R_+\times Z_+$, $t=t_f>0$, $i=k\geq 1$.

Lemat 5. Jeżeli $rank\boldsymbol{D}=n_1+n_2$ oraz

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1}\in\Re_+^{[(k+1)n_1+n_2]\times(n_1+n_2)}, \tag{24}$$

to dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) jest punktowo zupełny w punkcie $(t,i)\in R_+\times Z_+$, $t=t_f>0$, $i=k\geq 1$ i wektor warunków brzegowych x_0 (20a), dla którego rozwiązanie równań (1) dla $t=t_f>0$, $i=k\geq 1$ jest równe zadanemu stanowi $x_f=\begin{bmatrix}x_{1f}\\x_{2f}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1(t_f,k)\\x_2(t_f,k)\end{bmatrix}\in\Re_+^{n_1+n_2}$, można wyznaczyć ze wzoru

$$x_0=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1}x_f. \tag{25}$$

Dowód. Jeżeli układ (1) jest punktowo zupełny, to $rank\boldsymbol{D}=n_1+n_2$, $\det(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})\neq 0$ i macierz $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1}$ jest dobrze zdefiniowana. Jeżeli zachodzi (24) i $x_f=\begin{bmatrix}x_{1f}\\x_{2f}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1(t_f,k)\\x_2(t_f,k)\end{bmatrix}\in\Re_+^{n_1+n_2}$, to wtedy $x_0\in\Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$ oraz

$$x_f = \boldsymbol{D}x_0 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}]^{-1}x_f = \begin{bmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{bmatrix}. \quad \square(26)$$

Z definicji 3 i 4 oraz wzoru (19) wynika następujący warunek konieczny względnej punktowej zupełności.

Lemat 6. Aby dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu był względnie punktowo zupełny w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$,

1) dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ musi być spełniony warunek

$$rank\boldsymbol{D}_1 = n_1, \tag{27}$$

2) dla stanu $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ musi być spełniony warunek

$$rank\boldsymbol{D}_2 = n_2, \tag{28}$$

gdzie macierze $\boldsymbol{D}_1$ i $\boldsymbol{D}_2$ dane są zależnością (20b).

Łatwo wykazać, że twierdzenie 3 jest prawdziwe dla względnej punktowej zupełności, przy czym dla przypadku 1) należy wziąć pod uwagę macierz $\boldsymbol{D}_1$, o postaci (20b), oraz n_1 liniowo niezależnych kolumn.

Jeżeli warunek twierdzenia 3 jest spełniony, to ze wzoru

$$x_{1f} = \boldsymbol{D}_1 x_0 \tag{29}$$

możemy wyznaczyć warunki brzegowe $x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$ takie, że $x_{1f} = x_1(t_f,k) \in \Re_+^{n_1}$. Wówczas dla otrzymanych warunków brzegowych i punktu $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$, wartość składowej $x_{2f} = x_2(t_f,k) \in \Re_+^{n_2}$ wektora stanu (16) układu (1) wyznacza się ze wzoru

$$x_{2f} = \boldsymbol{D}_2 x_0. \tag{30}$$

Powyższe rozumowanie jest również prawdziwe dla przypadku 2), przy czym w twierdzeniu 3 należy wziąć pod uwagę odpowiednio macierz $\boldsymbol{D}_2$, o postaci (20b), oraz n_2 liniowo niezależnych kolumn, zaś warunki brzegowe $x_0 \in \Re_+^{(k+1)n_1+n_2}$ wyznacza się ze wzoru (30), a następnie wartość składowej $x_{1f} = x_1(t_f,k) \in \Re_+^{n_1}$ wektora stanu (16) wyznacza się ze wzoru (29).

Uwzględniając powyższe rozważania i definicje 3 i 4 otrzymamy poniższe lematy.

Lemat 7. Jeżeli $rank\boldsymbol{D}_1 = n_1$ oraz

$$\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{[(k+1)n_1+n_2]\times n_1}, \tag{31}$$

to dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) jest względnie punktowo zupełny dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$.

Jeżeli jest spełniony warunek (31), to wektor warunków brzegowych x_0 (20a), dla którego rozwiązanie równania (1a) dla $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$ jest równe zadanemu stanowi $x_{1f} = x_1(t_f,k) \in \Re_+^{n_1}$, można wyznaczyć ze wzoru

$$x_0 = \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}]^{-1}x_{1f}, \tag{32}$$

zaś wartość składowej $x_{2f} = x_2(t_f,k) \in \Re_+^{n_2}$ wektora stanu (16) układu (1) wyznacza się ze wzoru (30), gdzie macierze $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ są odpowiednimi wierszami macierzy $\boldsymbol{D}$ o postaci (20b).

Lemat 8. Jeżeli $rank\,\boldsymbol{D}_2 = n_2$ oraz

$$\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}]^{-1} \in \Re_+^{[(k+1)n_1+n_2]\times n_2}, \tag{33}$$

to dodatni układ ciągło-dyskretny niecałkowitego rzędu (1) jest względnie punktowo zupełny dla stanu $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$ w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$.

Jeżeli jest spełniony warunek (33), to wektor warunków brzegowych x_0 (20a), dla którego rozwiązanie równania (1b) dla $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$ jest równe zadanemu stanowi $x_{2f} = x_2(t_f, k) \in \Re_+^{n_2}$ można wyznaczyć ze wzoru

$$x_0 = \boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}]^{-1} x_{2f}, \tag{34}$$

zaś wartość składowej $x_{1f} = x_1(t_f, k) \in \Re_+^{n_1}$, wektora stanu (16) układu (1) wyznacza się ze wzoru (29), gdzie macierze $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ są odpowiednimi wierszami macierzy $\boldsymbol{D}$ o postaci (20b).

Dowód powyższych lematów przeprowadza się podobnie jak lematu 5.

Wniosek 1. Dodatni układ niecałkowitego rzędu (1) jest względnie punktowo zupełny w punkcie $(t,i) \in R_+ \times Z_+$, $t = t_f > 0$, $i = k \geq 1$,

1) dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^{n_1}$, jeżeli macierz A_{11} jest macierzą diagonalną,

2) dla stanu $x_2(t,i) \in \Re_+^{n_2}$, jeżeli macierz A_{11} jest macierzą diagonalną i macierz A_{21} ma co najmniej n_2 niezależnych kolumn monomialnych oraz $n_2 \leq n_1$.

Dowód. Z (15a) wynika, że $\Phi_0(t) \in \Re_+^{n_1 \times n_1}$ jest macierzą monomialną wtedy i tylko wtedy, gdy A_{11} jest macierzą diagonalną [4, 9]. W tym przypadku z macierzy $\boldsymbol{D}_1$ można wybrać n_1 liniowo niezależnych monomialnych kolumn w postaci $D_1(k) = \Phi_0(t_f) \in \Re_+^{n_1 \times n_1}$ (21c). Dla przypadku 2) z macierzy $\boldsymbol{D}_2$ można wybrać n_2 liniowo niezależnych monomialnych kolumn z macierzy $D_2(k-1) = A_{21}\Phi_0(t_f) \in \Re_+^{n_2 \times n_1}$ (21b), jeżeli A_{21} ma n_2 kolumn monomialnych i $n_2 \leq n_1$. □

4. PRZYKŁAD

Należy zbadać punktową zupełność w punkcie $(t,i) \in \Re_+ \times Z_+$, $t = t_f = 1$, $i = k = 1$ dodatniego układu ciągło-dyskretnego niecałkowitego rzędu (1) $\alpha = 0.5$ i $B = 0.8$, o macierzach:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} -0.3 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Układ (1) jest dodatni, ponieważ $A_\beta = A_{22} + \beta I_{n_2} = 0.5 \in \Re_+^1$.

Biorąc pod uwagę, że $A_{11}^k = A$, $k = 1,2,\ldots$ oraz korzystając z (15), otrzymujemy

$$\Phi_0(t) = \begin{bmatrix} \varphi_0(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \varphi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{36}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) & 0 \\ 0 & \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix},\ \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}. \tag{37}$$

Uwzględniając (37) dla $t = t_f = 1$, operator (10a)

$$P(t_f) = \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau) A_{12} d\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{t_f^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \end{bmatrix} \in \Re_+^2 \tag{38}$$

jest wektorem kolumnowym, zaś macierz (22)

$$D = A_{21} P(t_f) + A_\beta = 0.5 + \frac{t_f^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} = 0.5 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1.63 \in \Re_+^1 \tag{39}$$

jest skalarem, przy czym $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) = 0.5\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}/2$.

Dla $t_f = 1$ i $k = 1$ ze wzoru (20b) otrzymamy macierz

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1(0) & D_1(1) & D_1(2) \\ D_2(0) & 0 & D_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(t_f)A_{21}\Phi_0(t_f) & \Phi_0(t_f) & P(t_f)D \\ A_{21}\Phi_0(t_f) & 0 & D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi_0(t_f) & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\varphi_0(t_f) & \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} & 0 & 1 & 1.63\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \\ \varphi_0(t_f) & 1 & 0 & 0 & 1.63 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{40}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz (40) ma $n_1 + n_2 = 3$ liniowo niezależne kolumny, przy czym tylko dwie z nich są monomialne. Zatem nie jest spełnione twierdzenie 3, co oznacza, że rozpatrywany układ nie jest punktowo zupełny w badanym punkcie.

Natomiast z lematu 6 wynika, że układ niecałkowitego rzędu (1) o macierzach (35) jest względnie punktowo zupełny w badanym punkcie dla stanu $x_1(t,i) \in \Re_+^2$.

Ponieważ macierz

$$\boldsymbol{D}_1^T [\boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{D}_1^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\varphi_0(t_f) & 0 & 0 \\ 1.13\varphi_0(t_f)/d_1 & 1.13/d_1 & 0 & 1/d_1 & 1.84/d_1 \end{bmatrix}^T \in \Re_+^{5\times 2} \tag{41}$$

ma nieujemne elementy, warunek (31) jest spełniony i warunki brzegowe (8) można wyznaczyć ze wzoru (32)

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{11}(0) \\ x_{12}(0) \\ x_{11}(1) \\ x_{12}(1) \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1.13\varphi_0(t_f)}{d_1} x_{12f} & \dfrac{1.13}{d_1} x_{12f} & \dfrac{1}{\varphi_0(t_f)} x_{11f} & \dfrac{1}{d_1} x_{12f} & \dfrac{1.84}{d_1} x_{12f} \end{bmatrix}^T \in \Re_+^5, \tag{42}$$

gdzie $x_{1f} = \begin{bmatrix} x_{11f} \\ x_{12f} \end{bmatrix}$, $d_1 = 1.28\varphi_0(t_f)^2 + 5.66$, zaś $\varphi_0(t_f)$ wyznaczamy z (36) dla $t = t_f = 1$.

Wartość składowej $x_{2f} = x_2(t,i) \in \Re_+^1$ wektora stanu (16) układu (1), która będzie osiągnięta w punkcie $(t_f, k) = (1{,}1)$ dla powyższych warunków brzegowych, jest równa

$$x_{2f} = \boldsymbol{D}_2 x_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1.13\varphi_0(t_f)^2 + 4.13}{d_1} \end{bmatrix} x_{1f}. \tag{43}$$

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem punktowej zupełności i względnej punktowej zupełności dodatnich liniowych dwuwymiarowych układów ciągło-dyskretnych niecałkowitego rzędu, opisanych równaniami stanu (1) przy założeniach (8) i (11).

Sformułowano podstawowe definicje oraz podano warunki konieczne i wystarczające punktowej zupełności i względnej punktowej zupełności. Podano prostą metodę wyznaczania nieujemnych warunków brzegowych, dla których trajektoria stanu układu względnie punktowo zupełnego przechodzi przez dowolny zadany nieujemny stan końcowy.

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na dodatnie dwuwymiarowe układy ciągło-dyskretne niecałkowitego rzędu z opóźnieniem.

BIBLIOGRAFIA

1. Busłowicz M., Kociszewski R., Trzasko W.: Punktowa degeneracja i punktowa zupełność liniowych dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniami, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, ser. Automatyka, vol. 145, s. 51−56, 2006.
2. Kaczorek T.: Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive hybrid systems described by the general model, Archives of Control Sciences, vol. 20, nr 2, s. 121−131, 2010.
3. Kaczorek T.: Pointwise completeness and pointwise degeneracy of standard and positive Roesser models, Pomiary, Automatyka, Kontrola, vol. 56, nr 2, s. 163−165, 2010.
4. Kaczorek T., Busłowicz M.: Pointwise completeness and pointwise degeneracy of linear continuous-time fractional order systems, JAMRIS, vol. 3, nr 1, s. 8−11, 2009.
5. Kaczorek T.: Positive fractional 2D hybrid linear systems, Bull. Pol. Ac.: Sci. Tech. 56 (3), pp. 273–277, 2008.
6. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski Ł.: Solvability of 2D hybrid linear systems − comparison of three methods, Acta Mechanica et Automatica, vol. 2, nr 2, s. 59−66, 2008.
7. Kaczorek T.: Positive 2D hybrid linear systems, Bull. Pol. Ac.: Sci. Tech. 55 (4), pp. 351–358, 2007.
8. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems, Springer-Verlag, London 2002.
9. Kaczorek T.: Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
10. Trzasko W.: Względna obserwowalność dodatnich układów ciągło-dyskretnych, Pomiary, Automatyka, Kontrola, vol. 56, nr 5, s. 396−399, 2010.
11. Trzasko W.: Względna punktowa zupełność dodatnich układów ciągło-dyskretnych, Automation 2009, CD w Pomiary Automatyka Robotyka, nr 2, 2009.
12. Trzasko W.: Reachability and controllability of positive fractional discrete - time systems with delay, JAMRIS, vol. 2, nr 3, s. 43−47, 2008.
13. Trzasko W., Busłowicz M., Kaczorek T.: Pointwise completeness of discrete-time cone-systems with delays, in Proc. of EUROCON 2007 (CD), s. 606−611, 2007.
14. Weiss L.: Controllability for various linear and nonlinear systems models, Lecture Notes in Mathematics, vol. 144, Seminar on Differential Equations and Dynamic System II, Springer Verlag, pp. 250−262, 1970.

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.