

prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
 Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
 mgr inż. Michał Sokółski
 Studium Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB

ODPORNĄ STABILNOŚĆ UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH O FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNEJ ZALEŻNEJ LINIOWO OD JEDNEGO NIEPEWNEGO PARAMETRU

Rozpatrzono problem badania odpornej stabilności liniowego układu hybrydowego ciąгло-dyskretnego, którego wielomian charakterystyczny zależy liniowo od jednego niepewnego parametru. Wielomian ten można przedstawić w postaci wypukłej kombinacji dwóch wielomianów dwóch zmiennych niezależnych. Podano częstotliwościowe metody badania odpornej stabilności takiej kombinacji. Bazują one na warunku wykluczenia zera znanym z teorii odpornej stabilności rodzin wielomianów jednej zmiennej. Rozważania zilustrowano przykładem.

ROBUST STABILITY OF CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEM WITH CHARACTERISTIC FUNCTION LINEARLY DEPENDENT ON ONE UNCERTAIN PARAMETER

The problem of robust stability of linear continuous-discrete systems with characteristic polynomial linearly dependent on one uncertain parameter is considered. This problem is equivalent to the problem of robust stability of convex combination of two polynomials of two independent variables. Frequency domain methods for robust stability analysis of such a combination are given. The method proposed are based on the zero exclusion condition known from the theory of robust stability of families of polynomials of one variable. The considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

Układami ciąгло-dyskretnymi (hybrydowymi) nazywamy takie układy dynamiczne, w których modelu matematycznym jedna część zmiennych stanu jest z czasem ciągłym zaś druga część jest z czasem dyskretnym, przy czym nie da się rozdzielić równań dynamiki opisujących część ciągłą oraz część dyskretną.

Zagadnienia stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów hybrydowych ciąгло-dyskretnych były rozpatrywane np. w pracach [5, 8-12]. W niniejszej pracy zostanie rozpatrzony problem badania odpornej stabilności liniowego układu ciąгло-dyskretnego, którego funkcja charakterystyczna (wielomian dwóch niezależnych zmiennych s i z) zależy liniowo od jednego niepewnego parametru. Rozpatrywany problem jest równoważny z badaniem odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów, które są wielomianami dwóch zmiennych niezależnych. Problem analizy odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów był tematem wielu publikacji, patrz np. monografie [1-4, 6] w przypadku wielomianów naturalnego stopnia oraz pracę [7] w przypadku wielomianów stopnia ułamkowego. W pracy [11] sformułowano ogólne warunki odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów dwóch zmiennych niezależnych. Nie podano jednak metod ich sprawdzania. Takie metody, dogodne do obliczeń komputerowych, zostaną podane w niniejszej pracy.

2. WPROWADZENIE

Funkcja charakterystyczna liniowych układów ciągle-dyskretnych jest wielomianem dwóch zmiennych niezależnych o rzeczywistych współczynnikach o ogólnej postaci

$$w(s, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} s^i z^k, \quad a_{nm} \neq 0. \quad (1)$$

Z pracy [8] wynikają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 1. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad |z| \geq 1. \quad (2)$$

Wielomian (1) dwóch zmiennych niezależnych spełniający warunek (2) będziemy nazywać wielomianem stabilnym w sensie Hurwitza-Schura.

Twierdzenie 2. Układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym $w(s, z)$ jest asymptotycznie stabilny (zachodzi (2)) wtedy i tylko wtedy, gdy

- 1) $w(s, 1) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$
- 2) $w(s, z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad |z| \geq 1.$

Warunek 2) twierdzenia 2 można napisać w postaci

$$w(jy, z) \neq 0, \quad y \in Y = (-\infty, \infty), \quad |z| \geq 1, \quad (3)$$

przy czym możemy ograniczyć się do przedziału $Y = [0, \infty)$.

Z twierdzenia 2 wynika, że układ ciągle-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- rzeczywisty wielomian $w(s, 1)$ jest stabilny w sensie Hurwitza (wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste),
- wielomian zespolony $w(jy, z)$ dla każdego $y \in Y$ jest stabilny w sensie Schura (wszystkie jego zera mają wartości bezwzględne mniejsze od 1).

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Wartości współczynników wielomianu charakterystycznego (1) zależą od wartości parametrów układu ciągle-dyskretnego. Jeżeli te wartości nie są dokładnie znane, to również nie są dokładnie znane wartości współczynników wielomianu (1).

W pracy rozpatrzmy przypadek, w którym współczynniki wielomianu charakterystycznego zależą liniowo od jednego niepewnego parametru. W takiej sytuacji, postępując podobnie jak w przypadku wielomianów jednej zmiennej (np. [6], [7]), wielomian charakterystyczny można przedstawić w postaci wypukłej kombinacji dwóch wielomianów

$$w(s, z, q) = (1 - q)w_a(s, z) + qw_b(s, z), \quad q \in Q = [0, 1], \quad (4)$$

gdzie $w_a(s, z)$ i $w_b(s, z)$ są to znane wielomiany o stałych rzeczywistych współczynnikach o ogólnych postaciach

$$w_a(s, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} s^i z^k, \quad a_{nm} \neq 0, \quad (5)$$

$$w_b(s, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m b_{ik} s^i z^k, \quad b_{nm} \neq 0. \quad (6)$$

Będziemy zakładać, że wielomian (4) dla każdego $q \in Q$ ma stopień n ze względu na zmienną s i stopień m ze względu na zmienną z .

Uwzględniając teorię odpornej stabilności układów dynamicznych o niepewnych parametrach (np. [6]) możemy sformułować poniższą definicję.

Definicja 1. Układ ciąгло-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (4) nazywamy odpornie stabilnym, jeżeli jest on asymptotycznie stabilny dla każdej ustalonej wartości niepewnego parametru z zadanego zbioru, tj. dla każdego $q \in Q$.

Z powyższej definicji i twierdzeń 1, 2 wynikają bezpośrednio następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3. Układ ciąгло-dyskretny, którego wielomian charakterystyczny ma postać (4) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w(s, z, q) \neq 0 \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geq 0, |z| \geq 1, q \in Q. \quad (7)$$

Twierdzenie 4. Układ ciąгло-dyskretny o wielomianie charakterystycznym (4) jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1) \quad w(s, 1, q) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad q \in Q,$$

2) jest spełniony warunek

$$w(jy, z, q) \neq 0, \quad y \in Y, |z| \geq 1, q \in Q. \quad (8)$$

Wielomian (4) spełniający warunek (7) (równoważnie, warunki 1) i 2) twierdzenia 4) będziemy nazywać wielomianem odpornie stabilnym w sensie Hurwitza-Schura.

Zadanie badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura wielomianu (4) dla każdego $q \in Q$ jest równoważne z badaniem odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów

$$W(s, z, Q) = \{w(s, z, q) : q \in Q = [0, 1]\}, \quad (9)$$

gdzie wielomian $w(s, z, q)$ ma postać (4).

Celem pracy jest podanie komputerowych metod badania odpornej stabilności układu ciąгло-dyskretnego o wielomianie charakterystycznym (4). Ponieważ odporna stabilność tego układu jest równoważna z odporną stabilnością w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (9), podane metody będą bezpośrednio dotyczyły rodziny wielomianów (9).

Konieczność badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (9) wynika nie tylko z faktu, że jest ona wielomianem charakterystycznym układu dynamicznego o funkcji charakterystycznej liniowo zależnej od jednego niepewnego parametru, ale też z faktu, że stabilność tej rodziny jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności np. rodziny układów o liniowej lub wieloliniowej strukturze niepewności. Można to pokazać dokładnie w ten sam sposób jak w przypadku rodziny wielomianów jednej zmiennej, np. [6].

Przy formułowaniu metod badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (9) wykorzystamy teorię dotyczącą odpornej stabilności rodzin wielomianów charakterystycznych jednej zmiennej, podaną w monografii [6].

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Zgodnie z twierdzeniem 4, badając odporną stabilność rodziny wielomianów (9) musimy sprawdzić spełnienie dwóch warunków tego twierdzenia. Metody sprawdzania tych warunków rozpatrzmy oddzielnie.

Warunek 1) twierdzenia 4 można napisać w postaci

$$w(s,1,q) = (1-q)w_a(s,1) + qw_b(s,1) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad q \in Q = [0,1], \quad (10)$$

przy czym wielomiany $w_a(s,1)$ i $w_b(s,1)$ mają odpowiednio postaci (5) i (6) dla $z = 1$. Są one wielomianami jednej zmiennej s . Warunek (10) jest równoważny z odporną stabilnością w sensie Hurwitza wypukłej kombinacji dwóch wielomianów $w_a(s,1)$ i $w_b(s,1)$. Metody badania odpornej stabilności wypukłej kombinacji dwóch wielomianów jednej zmiennej są podane w pracy [6]. Jedną z nich, dogodną do obliczeń numerycznych, podamy poniżej.

Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmiemy, że wielomian $w_a(s,1)$ jest wielomianem nominalnym (odniesienia). Musi on być wielomianem stabilnym w sensie Hurwitza, aby wypukła kombinacja dwóch wielomianów $w_a(s,1)$ i $w_b(s,1)$ była stabilna w sensie Hurwitza. Stabilność w sensie Hurwitza wielomianu $w_a(s,1)$ można łatwo sprawdzić stosując np. kryterium stabilności Hurwitza.

Twierdzenie 5. Niech wielomian nominalny $w_a(s,1)$ będzie stabilny w sensie Hurwitza. Warunek 1) twierdzenia 4) jest spełniony (tj. zachodzi (10)) wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji

$$\phi(jy) = w_b(jy,1) / w_a(jy,1), \quad y \in Y = [0, \infty), \quad (11)$$

nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Przeanalizujemy teraz badanie spełnienia warunku 2) twierdzenia 4.

Spełnienie warunku 2) twierdzenia 4 jest równoważne z odporną stabilnością w sensie Schura zespolonej rodziny wielomianów

$$W(jy, z, Q) = \{w(jy, z, q) : q \in Q = [0,1]\} \quad (12)$$

dla każdego $Y = [0, \infty)$. Rodzinę (12) otrzymuje się z (9) stosując podstawienie $s = jy$. Zatem

$$w(jy, z, q) = (1-q)w_a(jy, z) + qw_b(jy, z). \quad (13)$$

Przy formułowaniu metody badania odpornej stabilności w sensie Schura zespolonej rodziny wielomianów (12) uogólnimy rezultaty znane z teorii odpornej stabilności rodziny rzeczywistych wielomianów jednej zmiennej (np. [6]).

Za wielomian nominalny rodziny (12) możemy przyjąć np. wielomian $w_a(jy, z)$. Musi on być wielomianem stabilnym w sensie Schura dla każdego $y \in Y = [0, \infty)$, aby rodzina wielomianów (12) była stabilna w sensie Schura.

Wielomian zespolony $w_a(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$ jest stabilny w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w_a(jy, z) \neq 0, \quad y \geq 0, \quad |z| \geq 1. \quad (14)$$

Przeanalizujemy teraz problem sprawdzania warunku (14). Z zasady argumentu wynika, że dla dowolnego ustalonego $y \geq 0$ warunek (14) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji $w_a(jy, \exp(j\omega))$, $\omega \in \Omega = [0, 2\pi]$, okrąży m razy w kierunku matematycznie

dotatnim początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, przy czym m jest stopniem wielomianu $w_a(s, z)$ ze względu na zmienną z .

Jeżeli wartość parametru $y \in Y$ rośnie, to wykresy funkcji $w_a(jy, \exp(j\omega))$, $\omega \in \Omega$ (krzywe zamknięte) mają coraz większe wymiary. Wtedy sprawdzenie liczby okrążeń początku płaszczyzny zmiennej zespolonej przez te wykresy jest bardzo trudne.

Aby uniknąć tej niedogodności, postępując podobnie jak w przypadku wielomianów jednej zmiennej [6], będziemy rozpatrywać „unormowaną” funkcję

$$\tilde{w}_a(jy, \exp(j\omega)) = \frac{w_a(jy, \exp(j\omega))}{w_{od}(y, \exp(j\omega))}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi], \quad (15)$$

zamiast funkcji $w_a(jy, \exp(j\omega))$, przy czym $w_{od}(y, z)$ można przyjąć w postaci

$$w_{od}(y, z) = w_0(z), \quad (16)$$

gdzie $w_0(z)$ jest stabilnym w sensie Schura rzeczywistym wielomianem tego samego stopnia co wielomian $w_a(s, z)$ ze względu na zmienną z .

Z (15) wynika, że przy ustalonym $y \geq 0$ wielomian $w_a(jy, z)$ jest stabilny w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{\omega \in \Omega} \tilde{w}_a(jy, \exp(j\omega)) = 0, \quad (17)$$

czyli wykres funkcji (15) nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. Wielomian zespolony $w_a(jy, z)$ jest stabilny w sensie Schura dla każdego $y \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $y \geq 0$ wykres funkcji (15) nie obejmuje początku płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Przy sprawdzaniu warunku twierdzenia 6 należy dla każdego ustalonego $y \in Y = [0, y_{kon}]$, wyznaczonego z odpowiednio małym krokiem Δy , wyznaczyć wykres funkcji (15) i sprawdzić, czy nie obejmuje on początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Wartość y_{kon} należy przyjąć odpowiednią dużą, taką aby na podstawie wyznaczonych wykresów stwierdzić spełnienie (lub niespełnienie) powyższego warunku dla wszystkich $y \geq 0$.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjąć, że wielomian $w_a(jy, z)$ jest stabilny w sensie Schura dla każdego $y \in Y$.

Uogólniając warunek wykluczenia zera, znany z teorii odpornej stabilności rodzin rzeczywistych wielomianów jednej zmiennej (np. [6]), otrzymamy podane poniżej rezultaty.

Niech $y \geq 0$ będzie ustalone. Dla dowolnej ustalonej liczby zespolonej $z = z_d$ wartościami wielomianów $w_a(jy, z)$ i $w_b(jy, z)$ są punkty $w_a(jy, z_d)$ i $w_b(jy, z_d)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Natomiast "wartością" rodziny wielomianów (12) jest zbiór wartości tej rodziny, zdefiniowany w sposób podany poniżej.

Definicja 2. Dla ustalonego $y \geq 0$ zbiorem wartości rodziny wielomianów (12) przy ustalonym $z = z_d$ nazywamy zbiór

$$w(jy, z_d, Q) = \{w(jy, z_d, q) : q \in Q = [0, 1]\}, \quad (18)$$

przy czym $w(jy, z_d, q)$ ma postać (13) dla $z = z_d$.

Zbiór wartości (18) jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $w_a(jy, z_d)$ i $w_b(jy, z_d)$.

Jeżeli $z_d = \exp(j\omega)$ zaś wartość parametru ω zmienia się w sposób ciągły od 0 do π , to zbiór wartości $w_a(jy, \exp(j\Omega)) = \{w_a(jy, \exp(j\omega)) : \omega \in \Omega = [0, \pi]\}$ jest odcinkiem linii krzywej łączącym punkty $w_a(jy, 1)$ i $w_a(jy, -1)$.

Wtedy też zbiór wartości $w_b(jy, \exp(j\Omega)) = \{w_b(jy, \exp(j\omega)) : \omega \in \Omega\}$ jest odcinkiem linii krzywej łączącym punkty $w_b(jy, 1)$ i $w_b(jy, -1)$.

Zatem przy ustalonym $y \geq 0$ brzeg zbioru wartości

$$w(jy, \exp(j\Omega), Q) = \{w(jy, \exp(j\omega), q) : \omega \in \Omega, q \in Q\} \quad (19)$$

tworzą linie krzywe o opisie parametrycznym $w_a(jy, \exp(j\omega))$, $\omega \in \Omega$ i $w_b(jy, \exp(j\omega))$, $\omega \in \Omega$ oraz dwa odcinki linii prostej, jeden łączy punkty $w_a(jy, 1)$ i $w_b(jy, 1)$ zaś drugi łączy punkty $w_a(jy, -1)$ i $w_b(jy, -1)$. Zauważmy, że wymienione powyżej linie krzywe są liniami zamkniętymi przy $\Omega = [0, 2\pi]$.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy unormowany zbiór wartości zdefiniowany poniżej.

Definicja 3. Unormowanym (względem $w_a(jy, z)$) zbiorem wartości rodziny wielomianów (12) dla ustalonego $z = z_d$ nazywamy zbiór

$$w_{un}(jy, z_d, Q) = \{w_{un}(jy, z_d, q) : q \in Q = [0, 1]\}, \quad (20)$$

gdzie

$$w_{un}(jy, z_d, q) = w(jy, z_d, q) / w_a(jy, z_d), \quad w_a(jy, z_d) \neq 0, \quad (21)$$

przy czym $w(jy, z_d, q)$ ma postać (13) dla $z = z_d$.

Ze wzorów (21) i (13) dla $z = z_d$ wynika, że dla ustalonych wartości $y \in Y$ i $z = z_d$ unormowany zbiór wartości (20) jest odcinkiem linii prostej, łączącym punkty $w_{un}(jy, z_d, 0) = 1 + j0$ i $w_{un}(jy, z_d, 1) = w_b(jy, z_d) / w_a(jy, z_d)$. Jeżeli $z_d = \exp(j\omega)$ i wartość parametru ω zmienia się w sposób ciągły od 0 do π , to ten odcinek na płaszczyźnie zmiennej zespolonej obraca się wokół punktu $1 + j0$, przy czym jego koniec $w_{un}(jy, \exp(j\omega), 1)$ zakreśla linię krzywą o opisie parametrycznym $w_b(jy, \exp(j\omega)) / w_a(jy, \exp(j\omega))$, $\omega \in \Omega = [0, \pi]$. Jest ona krzywą zamkniętą dla $\Omega = [0, 2\pi]$.

Podobnie jak w przypadku rodziny wielomianów naturalnego stopnia możemy udowodnić poniższe twierdzenie [6].

Twierdzenie 7. Niech wielomian nominalny $w_a(jy, z)$ będzie stabilny w sensie Schura dla każdego ustalonego $y \in Y$. Rodzina wielomianów (12) jest odpornie stabilna w sensie Schura wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej ustalonej wartości $y \in Y$ wykres funkcji

$$\psi(jy, \omega) = w_b(jy, \exp(j\omega)) / w_a(jy, \exp(j\omega)), \quad \omega \in \Omega, \quad (22)$$

nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Dowód. Zauważmy, że punkt $1 + j0$ zawsze należy do unormowanego zbioru wartości. Zatem przy ustalonym $y \geq 0$ warunek $0 \notin w_{un}(jy, \exp(j\Omega), Q)$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji (22) nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$.

Przy sprawdzaniu warunku twierdzenia 7 (podobnie jak przy sprawdzaniu twierdzenia 6) należy dla każdego ustalonego $y \in Y = [0, y_{kon}]$, wyznaczonego z odpowiednio małym krokiem Δy , wyznaczyć wykres funkcji (22) i sprawdzić, czy nie przecina on ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$. Wartość y_{kon} należy przyjąć odpowiednią dużą, taką aby na podstawie wyznaczonych wykresów można było stwierdzić spełnienie (lub niespełnienie) powyższego warunku dla wszystkich $y \geq 0$.

Z powyższych rozważań wynika następujący sposób postępowania przy badaniu odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (9), będącej wypukłą kombinacją (4) wielomianów (5) i (6) dwóch zmiennych niezależnych.

Sposób postępowania:

Krok 1. Sprawdzany stabilność w sensie Hurwitza wielomianu $w_a(s,1)$, stosując np. kryterium stabilności Hurwitza.

Krok 2. Stosując twierdzenie 5 badamy odporną stabilność w sensie Hurwitza wypukłej kombinacji wielomianów $w_a(s,1)$ i $w_b(s,1)$. Jeżeli jest ona odpornie stabilna w sensie Hurwitza, to jest spełniony warunek 1) twierdzenia 4 i przechodzimy do kroku 3.

Krok 3. Stosując twierdzenie 6 badamy stabilność w sensie Schura wielomianu zespolonego $w_a(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$. Jeżeli jest on stabilny w sensie Schura, to przechodzimy do kroku 4.

Krok 4. Stosując twierdzenie 7 badamy odporną stabilność w sensie Schura rodziny wielomianów (12) dla każdego $y \geq 0$. Jeżeli jest ona odpornie stabilna, to jest spełniony warunek 2) twierdzenia 4 i rodzina wielomianów (9) jest odpornie stabilna w sensie Hurwitza-Schura.

5. PRZYKŁAD

Należy zbadać odporną stabilność układu ciągle-dyskretnego, którego wielomian charakterystyczny jest wypukłą kombinacją (4) dwóch wielomianów

$$w_a(s, z) = s(0.95z + 0.7) + 0.9z + 0.5, \quad (23)$$

$$w_b(s, z) = s(0.5z + 0.3) + 1.5z + 0.1. \quad (24)$$

Badanie odpornej stabilności przeprowadzimy zgodnie z opisanym powyżej sposobem postępowania.

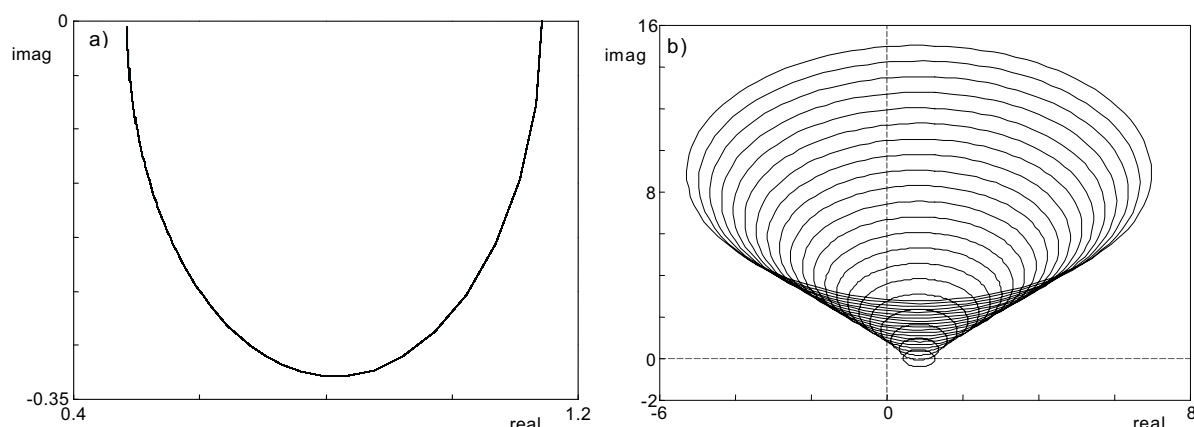
Krok 1. Podstawiając $z = 1$ w wielomianie (23) otrzymamy $w_a(s, 1) = 1.65s + 1.4$. Wszystkie współczynniki wielomianu $w_a(s, 1)$ są dodatnie, co oznacza, że jest on stabilny w sensie Hurwitza.

Krok 2. Aby zbadać odporną stabilność w sensie Hurwitza wypukłej kombinacji wielomianów $w_a(s, 1)$ i $w_b(s, 1)$ sporządzamy wykresy funkcji

$$\phi(jy) = \frac{w_b(jy, 1)}{w_a(jy, 1)} = \frac{0.8jy + 1.6}{1.65jy + 1.4}, \quad y \in Y. \quad (25)$$

Rozpoczyna się on przy $y = 0$ w punkcie $\phi(0) = 1.1429$ i kończy się przy $y \rightarrow \infty$ w punkcie $\phi(\infty) = 0.4848$. Wykres funkcji $\phi(jy)$, $y \in [0, 100]$, jest pokazany na rysunku 1a). Nie przecina on ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$, co oznacza, że wypukła kombinacja wielomia-

nów $w_a(s,1)$ i $w_b(s,1)$ jest odpornie stabilna w sensie Hurwitza. Warunek 1) twierdzenia 4 jest więc spełniony.



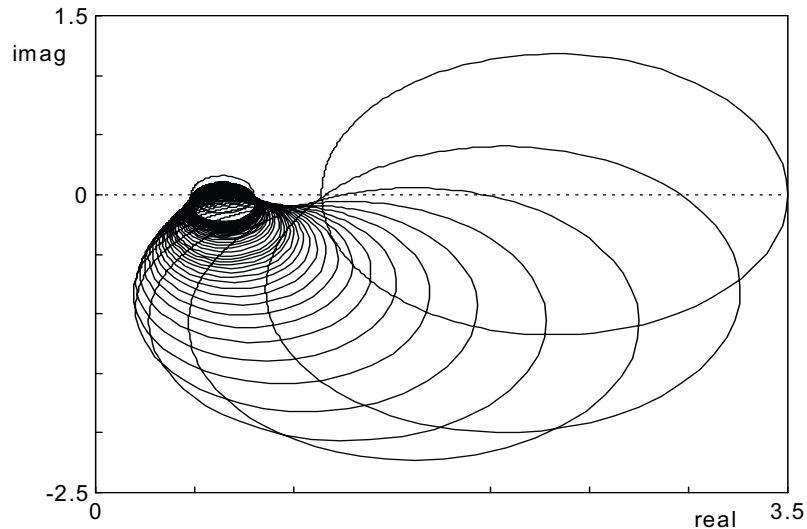
Rys. 1. Wykresy: a) funkcji (25) dla $y \in [0, 100]$, b) funkcji (26) dla $y \in [0, 10]$

Krok 3. Badamy stabilność w sensie Schura wielomianu zespolonego $w_a(jy, z)$ dla każdego $y \geq 0$. Sporządzamy w tym celu wykresy funkcji (15) przy wielomianie odniesienia $w_{od}(z) = z + 0.1$. Funkcja (15) ma zatem postać

$$\tilde{w}_a(jy, \exp(j\omega)) = \frac{(0.95jy + 0.9)\exp(j\omega) + (0.7jy + 0.5)}{\exp(j\omega) + 0.1}, \quad \omega \in \Omega = [0, 2\pi]. \quad (26)$$

Przy ustalonym $y \geq 0$ wykresem funkcji (26) przy $\omega \in \Omega = [0, 2\pi]$ linia krzywa zamknięta. Wykresy funkcji (26) sporządzone dla $y \in [0, 10]$ (z krokiem $\Delta y = 0.5$) są pokazane na rys. 1b). Dla rosnących wartości parametru $y > 0$ wykresy funkcji (26) oddalają się od początku układu współrzędnych. Zatem nie obejmują one początku płaszczyzny zmiennej zespolonej. Oznacza to, zgodnie z twierdzeniem 6, że wielomian zespolony $w_a(jy, z)$ jest stabilny w sensie Schura.

Krok 4. Badamy odporną stabilność w sensie Schura rodziny wielomianów (12) dla każdego $y \geq 0$. Wykresy funkcji (22), wyznaczone dla wartości $y \in [0, 40]$ (ze zmiennym krokiem) oraz dla wartości $y = 10^{10}$ są pokazane na rys. 2. Przy ustalonym $y \geq 0$ wykresem funkcji (22) linia krzywa zamknięta. Jeżeli wartości parametru $y > 0$ rosną, to wykresy są coraz mniejszymi liniami zamkniętymi. Najmniejsza linia krzywa odpowiada wartości $y = 10^{10}$. Z rys. 2 wynika, że wykresy funkcji (22) nie przecinają ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$ dla każdego $y \geq 0$. Zgodnie z twierdzeniem 7, rodzina wielomianów (12) jest więc odpornie stabilna w sensie Schura dla każdego $y \geq 0$. Jest zatem spełniony warunek 2) twierdzenia 4 i wypukła kombinacja (4) dwóch wielomianów (23) i (24) jest odpornie stabilna w sensie Hurwitza-Schura.



Rys. 2. Wykresy funkcji (22) dla $y \in [0, 40]$ i $y = 10^{10}$

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem odpornej stabilności liniowego układu ciągle-dyskretnego, którego wielomian charakterystyczny zależy liniowo od jednego niepewnego parametru. Analizowany problem jest równoważny z problemem badania odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura rodziny wielomianów (9). Warunki konieczne i wystarczające odpornej stabilności w sensie Hurwitza-Schura tej rodziny zostały sformułowane w twierdzeniu 4. Ich sprawdzenie wymaga stosowania obliczeń komputerowych. W pracy zostały podane komputerowe metody służące do sprawdzania warunków twierdzenia 4 oraz sposób postępowania przy badaniu odpornej stabilności.

Proponowane warunki i metody badania odpornej stabilności należą do grupy warunków częstotliwościowych. Są one istotnym rozszerzeniem na klasę rozpatrywanych układów ciągle-dyskretnych metod podanych w monografii [6] w przypadku układów ciągłych oraz dyskretnych.

Oryginalnym osiągnięciem pracy jest podanie komputerowych metod służących do sprawdzania warunków twierdzenia 4. Warunki zawarte w twierdzeniu 4 są podobne do zaproponowanych w pracy [11]. Nie podano tam jednak metod sprawdzania tych warunków.

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

LITERATURA

1. Ackermann J. (in co-operation with Bartlett A., Kaesbauer D., Sienel W., Steinhauser R.): Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters. Springer-Verlag, London 1994.
2. Barmish B. R.: New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Publishing Company, New York 1995.
3. Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H.: Robust Control: The Parametric Approach. Prentice Hall PTR, New York 1995.

4. Białas S.: Odporna stabilność wielomianów i macierzy. Uczelniane Wyd. Nauk.-Techn. AGH, Kraków 2002.
5. Bistritz Y.: A stability test for continuous-discrete bivariate polynomials, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 3, pp. III682-685, 2003.
6. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.
7. Busłowicz M., Kalinowski T.: Odporna stabilność liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego o funkcji charakterystycznej zależnej liniowo od jednego niepewnego parametru, Warszawa 2008, PAR 2/2008, str. 465-474.
8. Busłowicz M.: Stabilność modeli liniowych układów ciąгло-dyskretnych, Warszawa 2009, PAR 2/2009.
9. Czornik A.: Dynamika układów hybrydowych. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, ser. Automatyka, z. 151, str. 31-36, 2008.
10. Xiao Y.: Stability test for 2-D continuous-discrete systems, Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3649-3654, 2001.
11. Xiao Y.: Robust Hurwitz-Schur stability conditions of polytopes of 2-D polynomials. Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control, vol. 4, pp. 3643-3648, 2001.
12. Xiao Y.: Stability, controllability and observability of 2-D continuous-discrete systems, Proc. of the Int. Symp. on Circuits and Systems, vol. 4, pp. IV468-IV471, 2003.