

dr inż. Piotr Marusak  
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej  
Politechniki Warszawskiej

## **REGULATORY PREDYKCYJNE Z ZAŁOŻONĄ TRAJEKTORIĄ PRZYROSTÓW STEROWANIA I UWZGLĘDNIANIEM OGRANICZEŃ NAŁOŻONYCH NA WYJŚCIA OBIEKTU REGULACJI**

*W artykule przedstawiono metody uwzględniania ograniczeń nałożonych na wartości wyjść obiektu regulacji w algorytmach predykcyjnych z trajektorią przyszłych przyrostów sterowania opisaną pewną z góry założoną funkcją. Rozważono przy tym zarówno numeryczne, jak i analityczne wersje algorytmów. Zaproponowane mechanizmy uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji są stosunkowo proste a w sprzyjających okolicznościach, umożliwiają uwzględnianie tych ograniczeń na całym horyzoncie predykcji, także w przypadku algorytmów w wersji analitycznej.*

### **PREDICTIVE CONTROLLERS WITH PRESUMED TRAJECTORY OF CONTROL CHANGES AND EFFICIENT MECHANISM OF OUTPUT CONSTRAINTS HANDLING**

*A method of taking into consideration constraints put on output variables in predictive control algorithms with presumed trajectory of control changes is presented in the paper. Thanks to different choices of function describing this trajectory one can influence behavior of the predictive controller. Thus, the algorithms under consideration offer bigger freedom of shaping properties of the controllers than the conventional algorithms. The proposed mechanisms of taking into consideration output constraints are relatively simple. Moreover, in favorable conditions, they make possible to take these constraints into consideration on the whole prediction horizon also in the case of analytical algorithms.*

#### **1. WSTĘP**

W artykule przedstawiono mechanizmy uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji w algorytmach predykcyjnych z trajektorią przyszłych przyrostów sterowania będącą z góry określoną przez projektanta funkcją. Badania te są kontynuacją prac przedstawionych w [5]. Przypomnijmy, że oprócz otrzymania dodatkowej możliwości strojenia takich algorytmów, uwzględnianie w nich ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący jest stosunkowo proste. Co więcej, możliwe jest uwzględnianie ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący na całym horyzoncie sterowania zarówno w przypadku algorytmów numerycznych jak i analitycznych. W przypadku tych ostatnich, właściwość ta wynika z nowego podejścia do generacji sygnału sterującego. Podobnie jest w przypadku mechanizmów zaproponowanych w niniejszej pracy, tzn. możliwe jest uwzględnianie ograniczeń nałożonych na wyjście obiektu regulacji na całym horyzoncie predykcji, także w algorytmach analitycznych, bez konieczności założenia krótkiego horyzontu sterowania, jak w pracy [6].

W następnym rozdziale przypomniano sformułowanie standardowych algorytmów predykcyjnych w wersjach numerycznej i analitycznej. W rozdz. 3 zaprezentowano rozszerzenie standardowych algorytmów polegające na zastosowaniu z góry założonej trajektorii przyszłych przyrostów sterowania. W kolejnym rozdziale, omówiono problem uwzględniania, w zaproponowanych algorytmach, ograniczeń nałożonych na wyjście obiektu regulacji.

Rozdz. 5 zawiera opis eksperymentów, przeprowadzonych w układzie regulacji nieliniowego obiektu chemicznego (reaktora polimeryzacji), ilustrujących zalety zaproponowanego podejścia. Artykuł kończy krótkie podsumowanie.

## 2. ALGORYTMY REGULACJI PREDYKCYJNEJ

W algorytmach predykcyjnych z przesuwającym horyzontem sygnał sterujący wyznacza się w taki sposób, aby przewidywane zachowanie układu regulacji w przyszłości spełniało założone kryteria. Najczęściej minimalizowany jest następujący wskaźnik jakości [1, 2, 4, 7, 10, 11]:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \left\{ J_{MPC} = \sum_{i=1}^p (\bar{y}_k - y_{k+i|k})^2 + \sum_{i=0}^{s-1} \lambda \cdot (\Delta u_{k+i|k})^2 \right\}, \quad (1)$$

gdzie  $\bar{y}_k$  jest wartością zadaną,  $y_{k+i|k}$  jest przewidywaną, w bieżącej chwili  $k$ , wartością wyjścia obiektu dla przyszłej chwili  $k+i$  wyznaczaną na podstawie modelu obiektu regulacji,  $\Delta u_{k+i|k}$  jest przyszłym (szukanym) przyrostem sterowania,  $p$  jest horyzontem predykcji,  $s \leq p$  jest horyzontem sterowania,  $\lambda \geq 0$  jest współczynnikiem wazącym przyszłe przyrosty sterowania,  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_{k|k}, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}]^T$  jest wektorem zmiennych decyzyjnych.

### 2.1. Algorytm w wersji numerycznej

Wskaźnik jakości (1) może być minimalizowany numerycznie, w każdej iteracji algorytmu przy obecności ograniczeń nałożonych na przyszłe wartości: przyrostów sterowania, sterowania i wyjścia obiektu:

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_{\min} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{\max}, \quad (4)$$

gdzie,  $\mathbf{u} = [u_{k|k}, \dots, u_{k+s-1|k}]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}]^T$ ;  $\Delta \mathbf{u}_{\min}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{\max}$ ,  $\mathbf{u}_{\min}$ ,  $\mathbf{u}_{\max}$ ,  $\mathbf{y}_{\min}$ ,  $\mathbf{y}_{\max}$  są wektorami dolnych i górnych ograniczeń wartości odpowiednio: przyrostów sterowania, sterowania i wyjścia obiektu.

W przypadku zastosowania modeli liniowych, wektor zawierający przewidywane wartości wyjścia obiektu regulacji  $\mathbf{y}$ , można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u}, \quad (5)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_{k+1|k}, \dots, \tilde{y}_{k+p|k}]^T$  jest wektorem zwanym odpowiedzią swobodną obiektu, ponieważ opisuje wpływ jedynie przeszłych oddziaływań na obiekt;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_p & a_{p-1} & \cdots & a_{p-s+2} & a_{p-s+1} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

gdzie  $a_i$  są rzędnymi odpowiedzi skokowej obiektu. Macierz  $\mathbf{A}$  jest nazywana macierzą dynamiczną i można pokazać, że występuje we wszystkich odmianach algorytmów predykcyjnych niezależnie od użytego modelu liniowego [11].

Wykorzystanie predykcji (5) w zadaniu optymalizacji prowadzi do otrzymania standardowego zadania optymalizacji kwadratowej. W wyniku rozwiązania tego zadania, otrzymuje się wektor przyszłych zmian sterowania  $\Delta \mathbf{u}$ , z którego używany jest pierwszy element  $\Delta u_{k|k}$  a następnie optymalizacja jest powtarzana w kolejnej chwili próbkowania.

## 2.2. Algorytm w wersji analitycznej

Jeśli wskaźnik jakości (1) jest minimalizowany bez ograniczeń, wówczas rozwiązanie analityczne jest dane wzorem [7, 8, 9, 11]:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}), \quad (7)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową,  $\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}_k, \dots, \bar{y}_k]^T$  jest wektorem o długości  $p$ . W takim razie, wartość pierwszego elementu z ciągu przyszłych sterowań, jest dana zależnością:

$$\Delta u_{k|k} = \mathbf{K}_1 \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}), \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{K}_1$  jest pierwszym wierszem macierzy  $\mathbf{K} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ .

## 3. ALGORYTMY Z ZAŁOŻONĄ POSTACIĄ STEROWAŃ

Przypomnijmy, że w zaproponowanych w pracy [5] algorytmach z założoną postacią sterowań, można stosować wszystkie typowo dostępne w algorytmach predycyjnych parametry dostrajalne a ponadto, na zachowanie regulatora, można wpływać dzięki wyborowi różnych postaci funkcji opisującej trajektorię przyszłych przyrostów sterowania. Zakłada się bowiem, że trajektoria przyszłych przyrostów sterowania jest pewną z góry założoną funkcją zależną od czasu, tzn.

$$\Delta u_{k+j-1|k} = \alpha_k \cdot \Delta u_B(j), \quad j = 1, \dots, s, \quad (9)$$

gdzie  $\alpha_k$  jest wartością zmienianą w każdej chwili próbkowania przez regulator. Wektor przyszłych przyrostów sterowania jest więc opisany zależnością:

$$\Delta \mathbf{u} = \alpha_k \cdot \mathbf{Z}, \quad (10)$$

gdzie  $\mathbf{Z} = [\Delta u_B(1) \quad \Delta u_B(2) \quad \dots \quad \Delta u_B(s)]^T$ . Po podstawieniu (10) do (5), otrzyma się więc:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \alpha_k \cdot \mathbf{B}, \quad (11)$$

gdzie  $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_p]^T$ .

### 3.1. Algorytm w wersji numerycznej

W przypadku wykorzystania predykcji (11), zadanie optymalizacji rozwiązywane w każdej iteracji algorytmu w wersji numerycznej będzie miało następującą postać:

$$\min_{\alpha_k} \left\{ J_{MPC} = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \lambda \cdot \Delta \mathbf{u}^T \cdot \Delta \mathbf{u} \right\}, \quad (12)$$

przy ograniczeniach:

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}, \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_{\min} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{\max}, \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \alpha_k \cdot \mathbf{Z}, \quad (16)$$

gdzie zmienną decyzyjną jest  $\alpha_k$  oraz dodane zostały do problemu optymalizacji ograniczenia (16) opisujące zależność przyszłych przyrostów sterowania od zmiennej decyzyjnej.

### 3.2. Algorytm w wersji analitycznej

Zauważmy, że w minimalizowanym wskaźniku jakości (12) zgodnie z (10),  $\Delta \mathbf{u}^T \cdot \Delta \mathbf{u} = (\alpha_k)^2 \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z}$ , a zgodnie z (11),  $(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}} - \alpha_k \cdot \mathbf{B})$ . W takim razie, jeśli przeprowadzona zostanie optymalizacja bez ograniczeń, otrzyma się następujące rozwiązanie [5]:

$$\alpha_k = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}), \quad (17)$$

gdzie  $\mathbf{M} = \lambda(\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z})$ . W takim razie, przyszłe wartości sterowań będą opisane wzorem:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{Z}. \quad (18)$$

a pierwsze z ciągu wyznaczonych sterowań  $\Delta u_{k|k}$  jest równe:

$$\Delta u_{k|k} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}) \cdot \Delta u_B(1). \quad (19)$$

## 4. UWZGLĘDNIANIE OGRANICZEŃ SYGNAŁÓW WYJŚCIOWYCH

W przypadku istnienia w układzie regulacji ograniczeń ich zignorowanie, w przypadku ograniczeń dotyczących sygnałów sterujących, może wpłynąć negatywnie na jakość działania układu regulacji a w przypadku ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu sterowania – na pogorszenie jakości produktu lub nawet zagrożenie bezpieczeństwa procesu. Uwzględnianie ograniczeń w algorytmach numerycznych wynika wprost z zastosowanego podejścia. Większym problemem jest uwzględnianie ograniczeń w algorytmach analitycznych. W standardowych, analitycznych algorytmach predykcyjnych, zwykle stosuje się mechanizm przycinania sterowań. Mechanizm ten jest stosunkowo prosty i polega na odpowiednim modyfikowaniu przyrostów sterowań, według stosownych reguł wynikających z istniejących ograniczeń [7, 9, 11]. Mechanizm ten jest prosty w implementacji, jednak w klasycznych analitycznych algorytmach predykcyjnych za jego pośrednictwem można wpływać tylko na pierwszą wartość z horyzontu sterowania.

W przypadku algorytmów z założoną trajektorią przyrostów sterowań, nawet w wersji analitycznej jest możliwe uwzględnianie ograniczeń sygnału sterującego na całym horyzoncie sterowania. Ponadto, w przypadku wyboru pewnych funkcji bazowych, mechanizm uwzględniania tych ograniczeń może zostać znacznie uproszczony. Zagadnienia te zostały szczegółowo opisane w pracy [5].

Idea zaproponowanych w niniejszej pracy mechanizmów uwzględniania ograniczeń nałożonych na wartości wyjść obiektu regulacji, w algorytmach analitycznych, polega na takim przycinaniu wartości sterowania, aby wymusić spełnienie ograniczeń nałożonych na wartości wyjścia obiektu. Mechanizm ten w połączeniu z algorytmami z założoną trajektorią przyszłych przyrostów sterowania umożliwia wpływanie na wartości wyjścia z całego horyzontu predykcji, także w przypadku algorytmów w wersji analitycznej i to pomimo zastosowania dowolnego horyzontu sterowania. Zauważmy bowiem, że skoro przyszłe, przewidywane wartości wyjścia obiektu są dane wzorem (przekształcony wzór (11)):

$$y_{k+i|k} = \tilde{y}_{k+i|k} + b_i \cdot \alpha_k, \quad (11a)$$

to jest możliwe przekształcenie ograniczeń

$$y_{k+i|k} \geq y_{\min}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (20)$$

$$y_{k+i|k} \leq y_{\max}, i = 1, \dots, p, \quad (21)$$

w ograniczenia nałożone na zmienną decyzyjną  $\alpha_k$ :

$$b_i \cdot \alpha_k \geq y_{\min} - \tilde{y}_{k+i|k}, i = 1, \dots, p, \quad (22)$$

$$b_i \cdot \alpha_k \leq y_{\max} - \tilde{y}_{k+i|k}, i = 1, \dots, p. \quad (23)$$

Następnie, można użyć reguł przycinania w następującej postaci:

- dla ograniczenia dolnego (22):

$$\text{– jeśli } b_i \cdot \alpha_k \leq y_{\min} - \tilde{y}_{k+i|k}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\min} - \tilde{y}_{k+i|k}}{b_i} \text{ oraz}$$

- dla ograniczenia górnego (23):

$$\text{– jeśli } b_i \cdot \alpha_k \geq y_{\max} - \tilde{y}_{k+i|k}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\max} - \tilde{y}_{k+i|k}}{b_i}.$$

Zauważmy, że zamiast analizować wszystkie ograniczenia (22) i (23) z osobna, procedurę można uprościć. Załóżmy, że

$$y_{k+l|k} = \min\{y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}\}, \quad (24)$$

$$y_{k+h|k} = \max\{y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}\}, \quad (25)$$

gdzie  $l$  jest numerem chwili z horyzontu predykcji, dla której przewidywana wartość wyjścia jest najmniejsza, a  $h$  – numerem chwili, dla której ta wartość jest największa. Wtedy, zamiast analizowania  $2 \cdot p$  reguł, wystarczy sprawdzić tylko dwie:

- w przypadku ograniczenia dolnego:

$$\text{– jeśli } y_{k+l|k} \leq y_{\min}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\min} - \tilde{y}_{k+l|k}}{b_l} \text{ i}$$

- w przypadku ograniczenia górnego:

$$\text{– jeśli } y_{k+h|k} \geq y_{\max}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\max} - \tilde{y}_{k+h|k}}{b_h}.$$

Następnie, biorąc pod uwagę ograniczenia nałożone na wyjścia obiektu i na sterowania, jeśli to potrzebne, należy skorygować (przyciąć) wartość  $\alpha_k$ , a w konsekwencji  $\Delta u_{k|k}$ . Może się przy tym zdarzyć, że po przycięciu  $\alpha_k$ , inne ograniczenie jest złamane. W takiej sytuacji ograniczenia nałożone na wyjścia obiektu powinny zostać osłabione. Można w szczególności zrezygnować z wymuszania ograniczeń nałożonych na wartości wyjścia w dalszych chwilach z horyzontu predykcji.

#### 4.1. Przypadek niepewności modelowania

Niestety często, ze względu na błędy modelowania, zastosowanie przedstawionych reguł nie gwarantuje spełnienia ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu. W takiej sytuacji, należy oszacować błąd modelowania a następnie uwzględnić go w ograniczeniach. Predykcja wyjścia obiektu regulacji z uwzględnionym wpływem niepewności modelowania jest opisana wzorem:

$$y_{k+i|k}^r = y_{k+i|k} + r_{k+i|k} = \tilde{y}_{k+i|k} + b_i \cdot \alpha_k + r_{k+i|k}, \quad (26)$$

gdzie  $r_{k+i|k}$  jest nieznanym wpływem niepewności modelowania na dokładność predykcji.

Przyjmijmy, że wpływ ten można oszacować (np. na podstawie poprzednich, już znanych błędów predykcji) przyjmując minimalną i maksymalną wartość składnika  $r_{k+i|k}$ :

$$r_{k+i|k}^{\min} \leq r_{k+i|k} \leq r_{k+i|k}^{\max}, \quad (27)$$

gdzie  $r_{k+i|k}^{\min} \leq 0, r_{k+i|k}^{\max} \geq 0$ . Przyjmijmy następnie, że

$$y_{k+l|k}^r = y_{k+l|k} + r_{k+l|k}^{\min} = \min\{y_{k+1|k} + r_{k+1|k}^{\min}, \dots, y_{k+p|k} + r_{k+p|k}^{\min}\}, \quad (28)$$

$$y_{k+h|k}^r = y_{k+h|k} + r_{k+h|k}^{\max} = \max\{y_{k+1|k} + r_{k+1|k}^{\max}, \dots, y_{k+p|k} + r_{k+p|k}^{\max}\}. \quad (29)$$

Tym razem,  $y_{k+l|k}^r$  oraz  $y_{k+h|k}^r$  są odpowiednio: najmniejszą i największą wartością wyjścia obiektu przewidywaną z uwzględnieniem niepewności modelowania, a ograniczenia, które należy uwzględnić w algorytmie, przyjmą postać:

$$b_l \cdot \alpha_k \geq y_{\min} - r_{k+l|k}^{\min} - \tilde{y}_{k+l|k}, \quad (30)$$

$$b_h \cdot \alpha_k \leq y_{\max} - r_{k+h|k}^{\max} - \tilde{y}_{k+h|k}. \quad (31)$$

Ograniczenia te, w przypadku algorytmu w wersji numerycznej należy dodać do problemu optymalizacji a w przypadku algorytmu w wersji analitycznej – zastosować następujące reguły przycinania zmiennej decyzyjnej  $\alpha_k$ .

- dla ograniczeń dolnych:

$$\text{– jeśli } y_{k+l|k} + r_{k+l|k}^{\min} \leq y_{\min}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\min} - r_{k+l|k}^{\min} - \tilde{y}_{k+l|k}}{b_l} \text{ i}$$

- dla ograniczeń górnych:

$$\text{– jeśli } y_{k+h|k} + r_{k+h|k}^{\max} \geq y_{\max}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\max} - r_{k+h|k}^{\max} - \tilde{y}_{k+h|k}}{b_h}.$$

Przedstawiony wyżej mechanizm może zostać uproszczony po założeniu, że:

$$r_{\min} = \min\{r_{k+1|k}^{\min}, \dots, r_{k+p|k}^{\min}\}, \quad (32)$$

$$r_{\max} = \max\{r_{k+1|k}^{\max}, \dots, r_{k+p|k}^{\max}\}, \quad (33)$$

wtedy

$$y_{k+l|k}^r = y_{k+l|k} + r_{\min} = \min\{y_{k+1|k} + r_{\min}, \dots, y_{k+p|k} + r_{\min}\}, \quad (34)$$

$$y_{k+h|k}^r = y_{k+h|k} + r_{\max} = \max\{y_{k+1|k} + r_{\max}, \dots, y_{k+p|k} + r_{\max}\}. \quad (35)$$

W takim razie, reguły przycinania będą teraz następujące:

- dla ograniczeń dolnych:

$$\text{– jeśli } y_{k+l|k} + r_{\min} \leq y_{\min}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\min} - r_{\min} - \tilde{y}_{k+l|k}}{b_l} \text{ i}$$

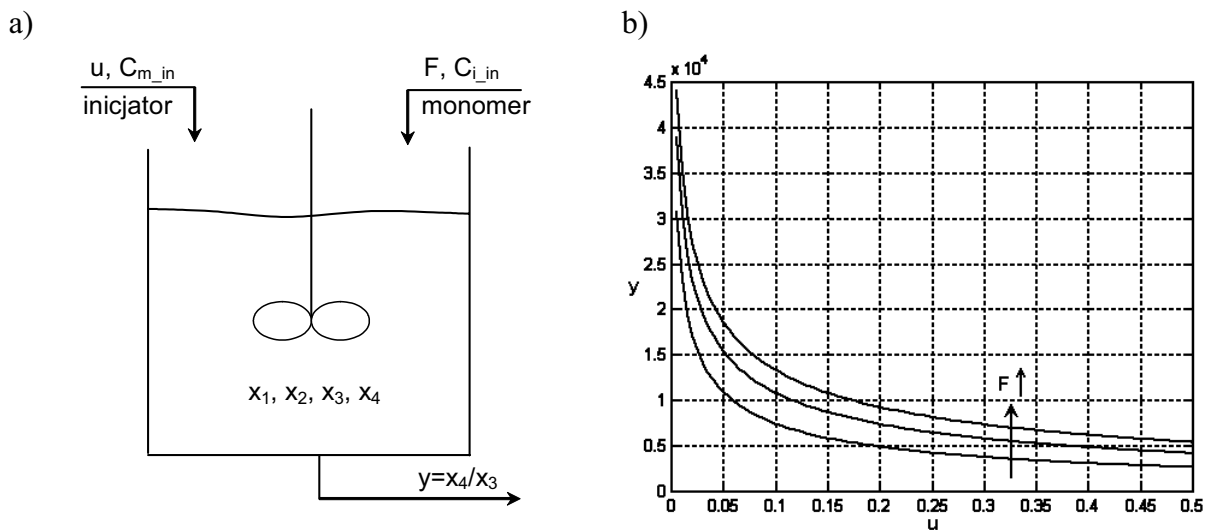
- dla ograniczeń górnych:

$$- \text{jeśli } y_{k+h|k} + r_{\max} \geq y_{\max}, \text{ to } \alpha_k = \frac{y_{\max} - r_{\max} - \tilde{y}_{k+h|k}}{b_h},$$

gdzie  $r_{\min}$  i  $r_{\max}$  są właściwie marginesami bezpieczeństwa otrzymanymi na podstawie oszacowania wpływu błędów modelowania. Zauważmy, że, w praktyce, im dalsza jest chwila z horyzontu predykcji, tym bardziej konserwatywne musi być oszacowanie wpływu błędów modelowania. Z drugiej strony predykcja jest powtarzana w każdej chwili próbkowania regulatora. W takim razie rozsądne jest przyjęcie oszacowania błędu modelowania dla wszystkich chwil z horyzontu predykcji, równego błędowi dla chwili pierwszej, tzn.  $r_{\min} = r_{k+1|k}^{\min}$  i  $r_{\max} = r_{k+1|k}^{\max}$ . W kolejnej chwili próbkowania możemy bowiem dysponować nowym oszacowaniem niepewności.

## 5. EKSPERYMENTY SYMULACYJNE

Przykładowym obiektem regulacji jest nieliniowy reaktor polimeryzacji (rys. 1a) [3, 11]. Charakterystyki statyczne obiektu są pokazane na rys. 1b.



Rys. 1. Reaktor polimeryzacji; a) schemat, b) charakterystyki statyczne  $y(u)$

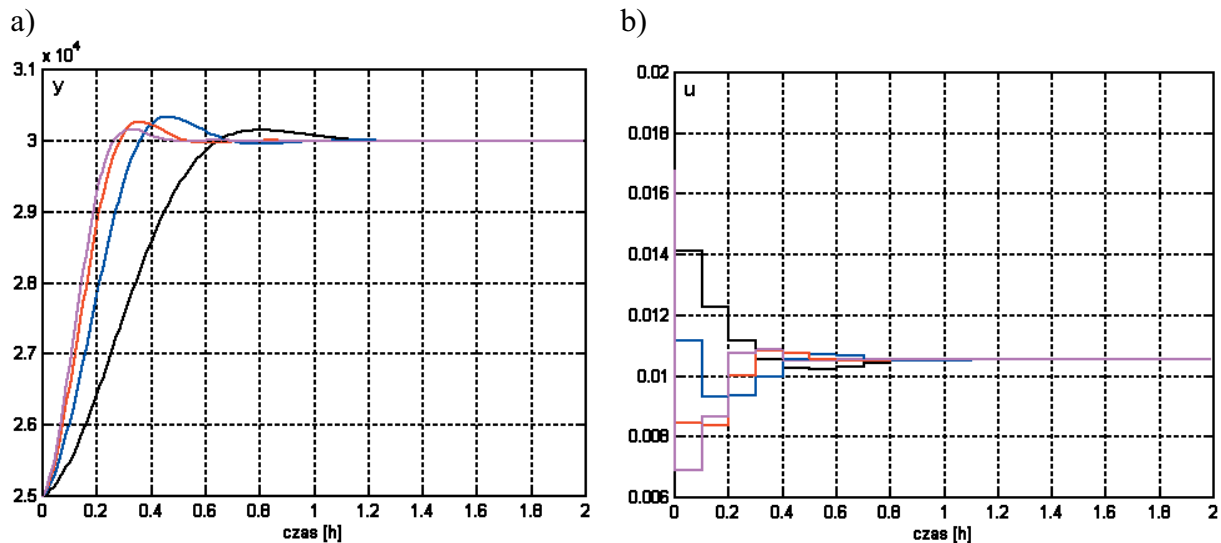
Równania obiektu są następujące:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10 \cdot (6 - x_1) - 2,4568 \cdot x_1 \sqrt{x_2}, \\ \dot{x}_2 &= 80 \cdot u - (0,1022 + 10 \cdot F) \cdot x_2, \\ \dot{x}_3 &= 0,0024121 \cdot x_1 \sqrt{x_2} + 0,112191 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3, \\ \dot{x}_4 &= 245,978 \cdot x_1 \sqrt{x_2} - 10 \cdot x_4, \\ y &= \frac{x_4}{x_3}, \end{aligned} \quad (36)$$

gdzie  $x_1$  – stężenie monomeru,  $x_2$  – stężenie inicjatora,  $y$  – wyjście, ciężar molekularny produktu (NAMW – ang. number-average molecular weight),  $u$  – sterowanie, dopływ inicjatora,  $F$  – dopływ monomeru,  $C_{m\_in}$  – stężenie monomeru w strumieniu zasilaającym ( $C_{m\_in}=6 \text{ kmol/m}^3$ ),  $C_{i\_in}$  – stężenie inicjatora w strumieniu wejściowym ( $C_{i\_in}=8 \text{ kmol/m}^3$ ) [3].



Odpowiedź skokową, użytą następnie podczas syntezy regulatorów predykcyjnych, pozyskano z okolic punktu pracy takiego, jak przyjęty w [3, 11], czyli:  $x_{10}=5,50677$ ,  $x_{20}=0,132906$ ,  $x_{30}=0,0019752$ ,  $x_{40}=49,3818$ ,  $u_0=0,016783 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $F_0=1 \text{ m}^3/\text{h}$  oraz  $y_0=25000 \text{ kg/kmol}$ . Do obiektu dobrano regulatory DMC w wersji analitycznej i numerycznej, założono okres próbkowania  $T_p=6 \text{ min}$  oraz następujące wartości parametrów dostrajalnych: horyzont predykcji  $p=10$ , horyzont sterowania  $s=5$ , kara za zmienność sterowania  $\lambda=10^{11}$ .



Rys. 2. Odpowiedzi układów regulacji na skok wartości zadanej do  $\bar{y} = 30000 \text{ kg/kmol}$ ; regulator z trajektorią przyszłych przyrostów sterowania, opisaną funkcją:  $\Delta u_B(j)=1$ ,  $\Delta u_B(j)=1/j$ ,  $\Delta u_B(j)=1/j^2$ ,  $\Delta u_B(j)=1/j^3$ ; a) wyjście, b) sterowanie

Podczas pierwszej serii eksperymentów przetestowano wpływ różnych postaci trajektorii przyszłych przyrostów sterowania na działanie układu sterowania (rys. 2). Najwolniejszy przebieg został otrzymany dla trajektorii opisanej funkcją  $\Delta u_B(j)=1$  (przebiegi oznaczone kolorem czarnym). Odpowiedzi układu regulacji dla funkcji rosnących  $\Delta u_B(j)=j$  i  $\Delta u_B(j)=j^2$ , były bardzo wolne więc nie zostały umieszczone na rysunku. Największe przeregulowanie otrzymano, gdy zastosowano funkcję  $\Delta u_B(j)=1/j$  (przebiegi niebieskie). W przypadku funkcji  $\Delta u_B(j)=1/j^2$ ,  $\Delta u_B(j)=1/j^3$ , uzyskano przebiegi szybsze i z mniejszym przeregulowaniem. Dobierając odpowiednią postać trajektorii przyszłych przyrostów sterowania, można więc w znaczący sposób wpływać na zachowanie układu sterowania – w badanym przypadku zmniejszyć przeregulowanie i jednocześnie przyspieszyć działanie układu regulacji. Możliwość zmniejszenia przeregulowania jest szczególnie pożądana w sytuacjach, gdy powinny być spełnione ograniczenia nałożone na wartości wyjść obiektu regulacji.

Podczas kolejnego eksperymentu, założono ograniczenie nałożone na wartości wyjścia obiektu (ograniczenie składu produktu):

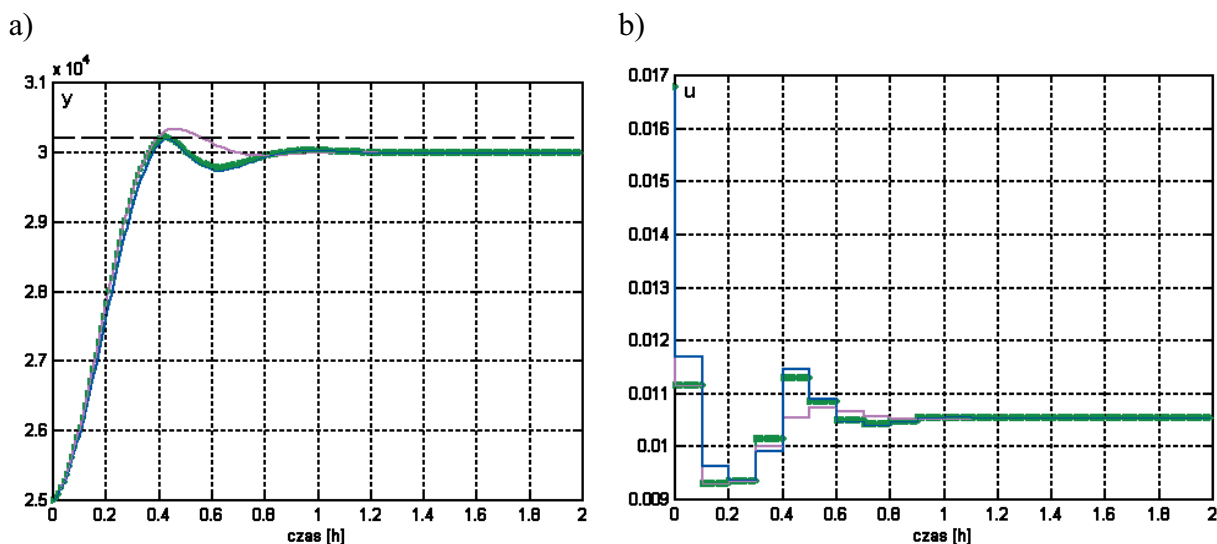
$$y \leq y_{\max}, \quad (37)$$

gdzie  $y_{\max} = 30200 \text{ kg/kmol}$ .

Przyjęto także, że trajektoria przyszłych przyrostów sterowania jest opisana funkcją  $\Delta u_B(j)=1/j$ . Otrzymane odpowiedzi zostały zamieszczone na rys. 3.



W przypadku, gdy ograniczenie (37) nie zostało uwzględnione w regulatorze, zostało ono złamane (różowe przebiegi na rys. 3). Uwzględnienie ograniczenia w sposób standardowy (wpływanie tylko na najbliższą chwilę z horyzontu predykcji) spowodowało poprawienie sytuacji. Ograniczenie jest naruszone jedynie nieznacznie, przez stosunkowo krótki czas (zielone przebiegi na rys. 3). W przypadku, gdy ograniczenie było uwzględniane na całym horyzoncie predykcji, nie zostało ono naruszone (niebieskie przebiegi na rys. 3). Ponadto, z analizy przebiegu sterowania wynika, że regulator zawczasu zaczyna uwzględnianie tego ograniczenia. Jest to szczególnie widoczne, gdy porówna się ten przebieg z przebiegiem otrzymanym gdy ograniczenie było nakładane tylko na pierwszą chwilę z horyzontu predykcji (kolor zielony). W tym drugim przypadku, pierwsze trzy przyrosty sterowania są dokładnie takie same, jak w przypadku bez uwzględniania ograniczeń.



Rys. 3. Odpowiedzi układu regulacji na skok wartości zadanej do  $\bar{y} = 30000 \text{ kg/kmol}$ ; regulator z trajektorią przyszłych przyrostów sterowania opisaną funkcją  $\Delta u_B(j) = 1/j^2$ ; ograniczenie: nie uwzględniane w regulatorze, uwzględniane w sposób standardowy, uwzględniane na całym horyzoncie predykcji; a) wyjście, b) sterowanie

## 6. PODSUMOWANIE

W referacie zaproponowano mechanizmy uwzględniania ograniczeń nałożonych na wartości wyjść obiektu regulacji w algorytmach predykcyjnych z założoną postacią trajektorii przyszłych przyrostów sterowania. Dzięki nowemu sposobowi generacji sterowań i zastosowaniu opracowanego mechanizmu uwzględniania ograniczeń, możliwe jest uwzględnianie ograniczeń nałożonych na wyjście obiektu regulacji na całym horyzoncie predykcji nie tylko w przypadku algorytmów numerycznych ale także w przypadku algorytmów analitycznych. Jest to znaczne rozszerzenie możliwości algorytmów w wersji analitycznej, mogące przyczynić się do polepszenia ich działania i powiększenia puli ich zastosowań. Dotychczas bowiem (w przypadku standardowych algorytmów predykcyjnych w wersji analitycznej) mechanizmy uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu pozwalały ograniczać jedynie pierwszą wartość z horyzontu predykcji lub wymagały założenia krótkiego horyzontu sterowania.

Zaproponowana metoda uwzględniania ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu regulacji jest mało skomplikowana a ponadto w stosunkowo łatwy sposób można w niej uwzględnić

niedokładność modelowania. Skuteczność metody została zademonstrowana w przykładowym układzie sterowania nieliniowego obiektu chemicznego – reaktora polimeryzacji. Zademonstrowano przy tym efektywność uwzględniania w algorytmie analitycznym ograniczeń nałożonych na wyjścia obiektu na całym horyzoncie predykcji.

## 7. LITERATURA

- [1] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model predictive control in the process industry*; Springer, 1995.
- [2] E. F. Camacho, C. Bordons, *Model predictive control*; Springer, 1999.
- [3] F. Doyle, B.A. Ogunnaike, R.K. Pearson: *Nonlinear model-based control using second-order Volterra models*. Automatica, vol. 31, str. 697–714, 1995.
- [4] J.M. Maciejowski: *Predictive control with constraints*; Prentice Hall 2002.
- [5] P. Marusak: *Regulatory predykcyjne z założoną trajektorią przyrostów sterowania i uwzględnianiem ograniczeń sygnału sterującego*; Pomiary Automatyka Robotyka 2/2008, str. 581–590.
- [6] P. Marusak: *Analytical predictive controllers with efficient handling of output constraints*, w pracy pod redakcją: K. Malinowskiego i L. Rutkowskiego: *Recent advances in control and automation*, Academic Publishing House EXIT, Warszawa 2008, str. 131–140.
- [7] P. Marusak, J. Pułaczewski: *Szczególne zalety algorytmu regulacji Dynamic Matrix Control (DMC)*; Pomiary Automatyka Kontrola 12/1999, str. 39–43.
- [8] J. Pułaczewski: *Algorytm regulacji DMC. Przypadek obiektu z opóźnieniem o jednym wejściu i jednym wyjściu z pomiarem i predykcją zakłóceń*; Raport IAiS PW nr 98-06, Warszawa, 1998.
- [9] J. Pułaczewski: *Wielowymiarowy algorytm DMC*; Raport IAiS PW nr 98–11, Warszawa, 1998.
- [10] J. A. Rossiter, *Model-based predictive control: a practical approach*; CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [11] P. Tatjewski: *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych: struktury i algorytmy*; Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2002.