

mgr inż. Tomasz Nartowicz  
Studium Doktoranckie,  
Wydział Elektryczny PB

## **OBSZARY STABILNOŚCI UKŁADU REGULACJI Z REGULATOREM UŁAMKOWYM DLA NIESTABILNEGO OBIEKTU PIERWSZEGO RZĘDU Z OPÓŹNIENIEM**

*Rozważono problem doboru wartości regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu regulacji z obiektem niestabilnym pierwszego rzędu z opóźnieniem. Transmitancja operatorowa regulatora wynika z zastosowania idealnej transmitancji Bodego jako wzorca dla układu otwartego z regulatorem. Podano komputerową metodę syntezy regulatora ułamkowego rzędu. Ponadto wykorzystując klasyczną metodę podziału  $D$  podano prostą analityczną metodę wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów regulatora, uwzględniając zadane wartości zapasu fazy i modułu. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym i wynikami badań symulacyjnych.*

### **DESIGN OF FRACTIONAL ORDER CONTROLLER FOR A FIRST ORDER UNSTABLE PLANT WITH DELAY**

*The paper presents the design problem of fractional order controller satisfying gain and phase margin of the closed-loop system with time-delay first order unstable plant. The transfer function of the controller follows directly from the use of Bode's ideal transfer function as a reference transfer function of the open loop system. Computer method for synthesis of fractional controller is given. Using the classical  $D$ -partition method a simple analytical method for determining stability regions respecting phase and gain margins in the controller parameters space is given. The considerations are illustrated by numerical example and results of computer simulation.*

## **1. WSTĘP**

Ostatnie lata przyniosły intensywny rozwój teorii analizy i syntezy liniowych układów ułamkowego rzędu, patrz np. monografie [1–6] i cytowana tam literatura. Praca [7] jest przeglądem wybranych zagadnień rachunku ułamkowego rzędu oraz teorii ciągłych układów liniowych ułamkowego rzędu.

Problem badania stabilności oraz odpornej stabilności liniowych układów ułamkowych był rozpatrywany w pracach [8–16]. Do pierwszych prac naukowych, w których zaczęto rozpatrywać regulatory rzędu ułamkowego, należą prace Podlubnego, m.in. [15]. Problemowi doboru wartości nastaw regulatorów  $PI^\lambda D^\mu$  są poświęcone między innymi prace [10–16]. Podano w nich różne metody syntezy regulatorów, między innymi bazujące na klasycznej metodzie Zieglera-Nicholsa, np. [17], jak i inne metody, np. optymalizacyjne [10]. Zastosowanie regulatora ułamkowego rzędu poprawia wskaźniki jakości regulacji. W pracach [8–11] synteza regulatora opiera się na takim dobraniu transmitancji ułamkowego regulatora, aby transmitancja operatorowa układu otwartego miała tzw. idealną postać Bodego [17].

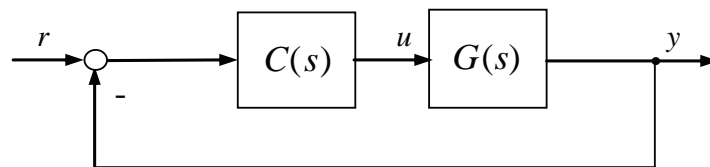
W niniejszej pracy rozpatrzony zostanie problem doboru wartości parametrów regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu regulacji z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu z całkowaniem i opóźnieniem. Ponadto podane zostaną analityczne metody wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów rozpatrywanego regulatora, uwzględniające zadane zapasy stabilności modułu i fazy. Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie podziału D oraz podejściu zaproponowanym w pracach [18–20].

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie blokowym pokazanym na rys. 1, składający się z obiektu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{k}{1 - s\tau} e^{-sh}, \quad k > 0, \tau > 0 \quad (1)$$

i szeregowego regulatora ułamkowego rzędu o transmitancji  $C(s)$ .



Rys. 1. Rozpatrywany układ regulacji automatycznej

Postać transmitancja operatorowa ułamkowego regulatora  $C(s)$  wynika z doboru jego postaci w taki sposób, aby transmitancja operatorowa układu otwartego miała tzw. idealną postać Bodego [9] opisaną równaniem (2). Szersza analiza układu otwartego o idealnej postaci Bodego (w tym w dziedzinie czasu) jest podana w pracy [17]. Synteza regulatora wykorzystująca powyższe podejście została przedstawiona w pracach [8–11].

$$K(s) = \left( \frac{\omega_c}{s} \right)^\beta, \quad (2)$$

W celu uzyskania transmitancji operatorowej układu otwartego o postaci (2) (bez uwzględniania członu opóźniającego  $e^{-sh}$ ) zastosowano uproszczenie:

$$G(s) = \frac{k}{1 - s\tau} e^{-sh} \approx -\frac{k}{s\tau} e^{-sh}. \quad (3)$$

Dobierając transmitancję regulatora o postaci:

$$C(s) = -k_c \frac{s}{s^\alpha} = k_c s^{1-\alpha}, \quad (4)$$

gdzie  $\alpha$  jest liczbą rzeczywistą, otrzymano transmitancję układu otwartego:

$$K(s) = C(s)G(s) = \frac{kk_c}{\tau} \frac{e^{-sh}}{s^\alpha}. \quad (5)$$

Zauważmy, że uzyskana postać transmitancji układu otwartego (5) różni się od idealnej transmitancji Bodego (2) członem opóźniającym  $e^{-sh}$ . Przeanalizujmy teraz proces projektowania regulatora ułamkowego rzędu o transmitancji operatorowej (4). Ze względu na

zadany zapas modułu  $A_m$  i zadany zapas fazy  $\phi_m$ , poszukiwane parametry regulatora to wartość wzmocnienia  $k_c$  oraz rzeczywista liczba  $\alpha$ .

Uwzględniając wzór  $(j\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha e^{j\alpha\pi/2}$  obliczamy moduł i fazę transmitancji (5):

$$|K(j\omega)| = \frac{kk_c}{\tau \omega^\alpha}, \quad \phi(\omega) = \arg K(j\omega) = -h\omega - \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Dla pulsacji odcięcia modułu  $\omega_g$  oraz fazy  $\omega_p$  zachodzą następujące zależności:

$$|K(j\omega_g)| = 1, \quad \phi(\omega_p) = \arg K(j\omega_p) = -\pi. \quad (7)$$

Uwzględniając wzory (6) możemy napisać:

$$\frac{kk_c}{\tau \omega_g^\alpha} = 1, \quad -h\omega_p - \alpha \frac{\pi}{2} = -\pi. \quad (8)$$

Po przekształceniu wzorów (8) otrzymujemy:

$$\omega_g^\alpha = \frac{kk_c}{\tau}, \quad \omega_p = \frac{(2-\alpha)\frac{\pi}{2}}{h}. \quad (9)$$

Z drugiego wzoru (9) wynika, że aby pulsacja  $\omega_p$  była liczbą dodatnią musi być spełniony warunek  $\alpha < 2$ . Przy zadanym zapasie stabilności, tj. zapasie modułu  $A_m$  i zapasie fazy  $\phi_m$  zachodzą poniższe zależności:

$$\frac{kk_c}{\tau \omega_p^\alpha} = \frac{1}{A_m}, \quad \phi_m = \pi - h\omega_g - \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Po przekształceniu wzorów (10) mamy:

$$\omega_p = \left( \frac{A_m kk_c}{\tau} \right)^{1/\alpha}, \quad \omega_g = \frac{(2-\alpha)\frac{\pi}{2} - \phi_m}{h}. \quad (11)$$

Uwzględniając pierwsze wzory (9) i (10) otrzymamy:

$$A_m = \frac{\omega_p^\alpha}{\omega_g^\alpha}. \quad (12)$$

Podstawiając drugie ze wzorów (9) i (11) do (12) otrzymamy:

$$A_m = \left( \frac{(2-\alpha)\frac{\pi}{2}}{(2-\alpha)\frac{\pi}{2} - \phi_m} \right)^\alpha. \quad (13)$$

Nieliniowe równanie (13) wiąże ze sobą zapasy modułu i fazy ( $A_m$  i  $\phi_m$ ) z ułamkowym rzędem  $\alpha$  regulatora (4).

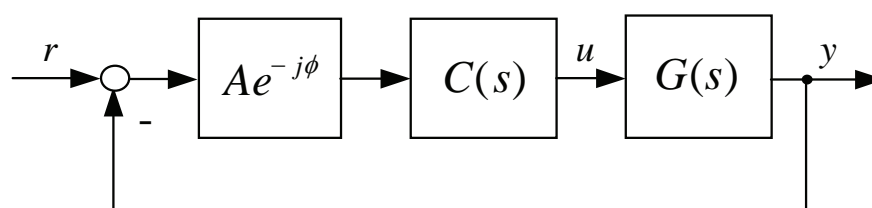
Wartość parametru  $\alpha$  możemy obliczyć rozwiązując nieliniowe równanie (13). Wartość wzmocnienia  $k_c$  regulatora wyznaczamy z pierwszych wzorów (8) lub (10):

$$k_c = \frac{\tau \omega_g^\alpha}{k} = \frac{\tau \omega_p^\alpha}{k A_m}, \quad (14)$$

na podstawie znajomości wzmocnienia  $k$  obiektu i obliczonej pulsacji odcięcia modułu z drugiego ze wzorów (11) lub pulsacji odcięcia fazy z drugiego ze wzorów (9).

Wyznaczenia wartości parametru  $\alpha$  wymaga znajomości tylko zadanego zapasu stabilności (zapasu modułu  $A_m$  i zapasu fazy  $\phi_m$ ). Wartość wzmocnienia  $k_c$  regulatora wymaga natomiast znajomości dodatkowo pulsacji odcięcia modułu  $\omega_g$  (lub pulsacji odcięcia fazy  $\omega_p$ ) i wzmocnienia  $k$  oraz stałej czasowej  $\tau$  obiektu.

Rozważmy układ regulacji automatycznej pokazany na rysunku 2, składający się z obiektu regulacji opisano transmitancją operatorową (1), oraz regulatora ułamkowego (4). Na rys. 2 w tor główny sterowania zawiera tzw. tester zapasu modułu i fazy  $Ae^{-j\phi}$ , gdzie  $A$  – zapas modułu i  $\phi$  – zapas fazy. Tester ten wykorzystuje się tylko przy syntezy parametrycznej regulatora, nie występuje on w rzeczywistym układzie regulacji. Wartości parametrów regulatora dobiera się tak, aby układ regulacji charakteryzował się określonymi zapasami stabilności modułu i fazy. Zapasy te związane są ze wskaźnikami jakości.



Rys. 2. Rozpatrywana struktura układu regulacji automatycznej z testerem zapasu fazy i modułu

Zapiszmy quasi-wielomian charakterystyczny rozpatrywanego układu regulacji:

$$w(s) = sT - Akk_c s^{1-\alpha} e^{-j\phi} e^{-sh} \quad (15)$$

Rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest stabilny, wtedy i tylko wtedy gdy jego quasi-wielomian charakterystyczny ułamkowego stopnia (15) jest stabilny, tzn. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste [21].

Celem pracy jest podanie prostej metody syntezy regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności (tj. zapas modułu  $A_m$  i zapas fazy  $\phi_m$ ) układu zamkniętego z regulatorem ułamkowym i obiektem niestabilnym ułamkowego rzędu. Dodatkowo wykorzystując metodę podziału D zostanie podana metoda wyznaczenia wartości wzmocnienia  $k_c$  regulatora oraz parametru  $\alpha$ , dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej ma zadane zapasy stabilności, tj. zapas modułu  $A$  i zapas fazy  $\phi$ .

### 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Wykorzystując klasyczną metodę podziału D [22] możemy wyznaczyć obszary stabilności w przestrzeni parametrów regulatora (2). Wyznaczone obszary definiują zbiór wartości parametrów regulatora zapewniających stabilność rozpatrywanego układu regulacji automatycznej. Granice stabilności dla metody podziału D odpowiadają wartościom parametrów regulatora, dla których quasi-wielomian charakterystyczny (15) rozpatrywanego układu ma przynajmniej jedno zero położone na osi urojonej. Może to być zero rzeczywiste lub para zer urojonych sprzężonych. Zatem granice podziału D rozdzielamy na granice zer zespolonych i rzeczywistych, dzieląc przestrzeń parametrów regulatora na obszary  $D(k)$  o skończonej liczbie zer quasi-wielomianu (15) o dodatniej części rzeczywistej. Dowolnie wybrany punkt w  $D(k)$  odpowiada takim wartościom parametrów regulatora, dla których

quasi-wielomian (15) ma dokładnie  $k$  zer o dodatniej części rzeczywistej. Stabilność quasi-wielomianu (15) dla jednego punktu z tego obszaru można zbadać stosując np. kryterium Michajłowa [21].

Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (15), który ma zero  $s = 0$ . Na płaszczyźnie  $(\alpha, k_c)$  granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (15) jest linia prosta  $k_c = 0$ .

Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując względem  $\alpha$  i  $k_c$  równanie

$$w(j\omega) = j\omega T - Akk_c (j\omega)^{1-\alpha} e^{-j\phi} e^{-j\omega h} = 0 \quad (16)$$

Przyrównujemy do zera quasi-wielomian (15) przy  $s = j\omega$ . Równanie zespolone (16) jest spełnione, gdy odpowiednio jego części rzeczywiste  $\text{Re}[w(j\omega)]$  i urojone  $\text{Im}[w(j\omega)]$  są równe zero:

$$\text{Re}[w(j\omega)] = 0, \quad (17)$$

$$\text{Im}[w(j\omega)] = 0. \quad (18)$$

Rozwiązując układ równań (17), (18) względem  $\alpha$  i  $k_c$  otrzymujemy:

$$\alpha = 2 + p, \quad (19)$$

$$k_c = -\frac{T\omega^{2+p}}{Ak}, \quad (20)$$

gdzie  $p = -2(\omega h + \phi) / \pi$ .

Wykreślając funkcji  $\omega$  linię o opisie parametrycznym (19), (20), otrzymamy przestrzeni  $(\alpha, k_c)$  granicę zer zespolonych rozpatrywanego quasi-wielomianu (15).

Otrzymane opisy granic stabilności (podziału D) umożliwiają wyznaczenie obszarów stabilności uwzględniając zadane zapasy modułu i fazy. Wyznaczając obszary stabilności, dla danego zapasu modułu  $A$  należy przyjąć  $\phi = 0$ , zaś dla danego zapasu fazy  $\phi$  należy przyjąć  $A = 1$ .

**Przykład 1.** Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej o schemacie pokazanym na rys. 1, przy czym obiekt regulacji jest opisany transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{0.55}{1 - 62s} e^{-10s}. \quad (21)$$

Należy wyznaczyć parametry transmitancji regulatora (4) tak, aby układ zamknięty miał zapas modułu  $A_m = 4$  (ok. 12 dB) i zapas fazy  $\phi_m = 55^\circ$  (ok. 0,96 rad). W rozpatrywanym przypadku mamy:  $k = 0,55$ ;  $\tau = 62$ ;  $h = 10$ .

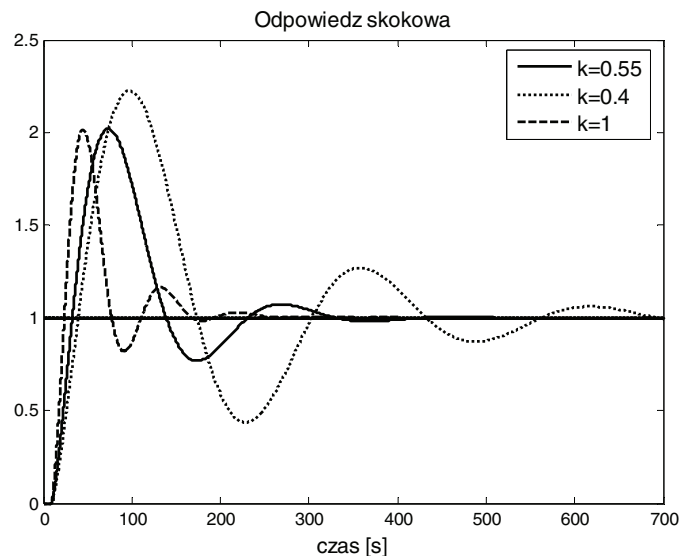
Postępując zgodnie z metodą syntezy regulatora [8–11] – wzory (9–14) – bazującą na transmitancji operatorowej układu otwartego zbliżonej do tzw. idealnej postaci Bodego, otrzymujemy:

$$C(s) = -\frac{2.9358}{s^{0.13385}} \quad (22)$$

Na rys. 3 pokazano charakterystyki skokowe układu regulacji z obiektem (21) i wyznaczonym regulatorem  $C(s)$  o transmitancji operatorowej (22), wyznaczone dla kilku

wartości wzmocnienia obiektu  $k$ . Dla  $k = 0,55$  charakterystyka skokowa ma przeregulowanie około 100 %, zaś czas regulacji wynosi około 300 s. Mniejsze wartości wzmocnienia układu otwartego powodują wzrost przeregulowania, dla  $k=0,4$  nawet do ok. 130 %, wydłuża się też czas regulacji. Nie obserwujemy natomiast wzrostu przeregulowania dla wartości współczynnika wzmocnienia obiektu większych od 0,55 (badano zmianę wartości wzmocnienia do  $k = 1$ ), w tym też przypadku czas regulacji zmniejsza się. Uzyskano stabilną odpowiedź skokową układu zamkniętego.

Wyznaczony regulator  $C(s)$  opisany transmitancją (22), ma ujemną wartość wzmocnienia. Powoduje to zmianę sprzężenia zamkniętego układu automatycznej regulacji na dodatnie.



Rys. 3. Charakterystyki skokowe układu zamkniętego z obiektem (21) i regulatorem (22) wyznaczone dla kilku wartości wzmocnienia  $k$  obiektu

Zaprojektowany układ regulacji sprawdzono w dziedzinie częstotliwości otrzymując zapas stabilności:

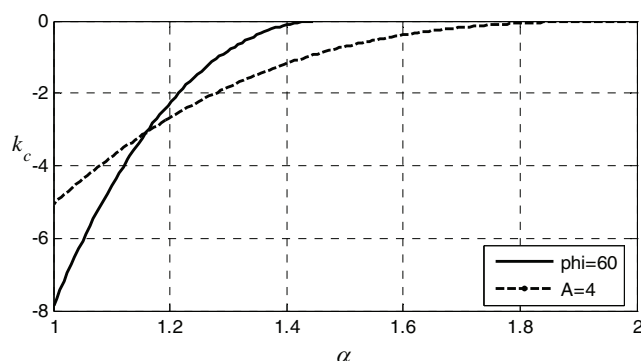
$$A_m = 3,5956, \phi_m = 32,9208^\circ.$$

Obliczone wartości zapasu modułu i fazy są mniejsze od zakładanych podczas syntezy regulatora dla uproszczonej transmitancji (3) ( $A_m = 4$ ,  $\phi_m = 55^\circ$ ).

**Przykład 2.** Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej taki jak w przykładzie 1. Należy dokonać syntezy regulatora (2), tak aby rozpatrywany układ regulacji miał zapas modułu  $A = 4$  (około 12 dB) i zapas fazy  $\phi_m = 60^\circ$

Wykorzystując obszary stabilności wyznaczamy wartości parametrów regulatora jednocześnie dla zadanego zapasu modułu  $A$  i zapasu fazy  $\phi$ . Aby to uzyskać na jednym rysunku, wykreślamy granicę zer zespolonych dla określonego zapasu fazy  $\phi$ , przy  $A = 1$  oraz granicę zer zespolonych dla określonego zapasu modułu  $A$ , przy  $\phi = 0$ . Punkt przecięcia wyznaczonych granic jest poszukiwanym rozwiązaniem.

Na rys. 4 pokazano obszary stabilności wyznaczone dla  $A = 4$  oraz  $\phi = 60^\circ$ . Punkt przecięcia ma współrzędne  $\alpha = 1,08$ ,  $k_c = -3,5$ .



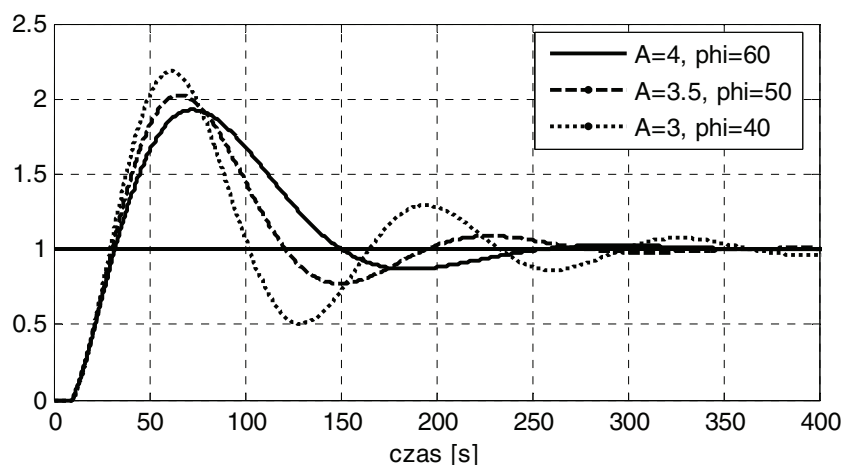
Rys. 4. Obszary stabilności quasi-wielomianu (15) dla wartości  $\phi = 60^\circ$  oraz  $A = 4$

W tab. 1 podano wyznaczone wartości parametrów transmitancji regulatora oraz odpowiadające im zapasy stabilności dla kilku zapasów stabilności.

Tab. 1. Zapasy modułu i fazy i odpowiadające im nastawy regulatora

	Zapas modułu	Zapas fazy [°]	Nastawy regulatora
1	3	40	$\alpha = 1.245$ , $k_c = -2.68$
2	3.5	50	$\alpha = 1.16$ , $k_c = -3.07$
3	4	60	$\alpha = 1.08$ , $k_c = -3.5$

Na rys. 5 pokazano charakterystyki skokowe układu regulacji wyznaczone dla otrzymanych wartości nastaw regulatora zgodnie z tab. 1. Z rysunku wynika, że dla większego zapasu stabilności mamy mniejsze przeregulowanie, oraz krótszy czas regulacji.



Rys. 5. Odpowiedzi skokowe układu regulacji

## BIBLIOGRAFIA

1. S. Das: Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls. Springer, Berlin 2008.
2. P. Ostalczyk: Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
3. I. Podlubny: Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego 1999.
4. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam 2006.

5. J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. T. Machado (Eds): *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, London 2007.
6. T. Kaczorek.: *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
7. M. Busłowicz: *Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu*, *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2/2010.
8. B. Boudjehem, D. Boudjehem, H. Tebbikh: *Simple analytical design method for fractional-order controller*. Proc. 3<sup>rd</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Ankara, Turkey, 2008 (CD-ROM).
9. M. Busłowicz, T. Nartowicz: *Projektowanie regulatora ułamkowego rzędu dla określonej klasy obiektów z opóźnieniem*. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2/2009, 398–405.
10. Nartowicz T.: *Synteza regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności układu zamkniętego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu z całkowaniem i opóźnieniem*. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 2010, str. 443–452.
11. Nartowicz T.: *Synteza regulatora ułamkowego rzędu zapewniającego zadany zapas stabilności dla określonej klasy obiektów inercyjnych z opóźnieniem*. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 5/2010, vol. 56, str. 409–413.
12. Y.Q. Chen, H. Dou, B. M. Vinagre and C.A. Monje: *A Robust Tuning Method for Fractional Order PI Controllers*, *The Second IFAC Symposium on Fractional Derivatives and Applications*, Porto, Portugal (2006).
13. S. E. Hamamci: *An Algorithm for Stabilization of Fractional-Order Time Delay Systems Using Fractional-Order PID Controllers*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52, 1964–1969 (2007).
14. C. A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu, Y. Chen: *Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications*. *Control Engineering Practice*, 16, 798–812 (2008)
15. I. Podlubny: *Fractional-order systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44, 208–214 (1999).
16. D. Valerio, J. S. da Costa: *Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules*. *Signal Processing*, 2006, vol. 86, pp. 2771–2784.
17. R. S. Barbosa, J. A. Machado, I. M. Ferreira: *Tuning of PID controllers based on Bode's ideal transfer function*. *Nonlinear Dynamics*, 38, 305–321 (2004).
18. A. Ruszewski: *Parametric synthesis of controllers for particular plants with uncertain parameters*, PhD Dissertation, Faculty of Electrical Engineering, Białystok Technical University (in Polish), 2008.
19. A. Ruszewski: *Stability regions of closed loop system with time delay inertial plant of fractional order and fractional order PI controller*, *Bull. Pol. Ac.: Sci. Tech.* 56 (4), 329–332 (2008).
20. A. Ruszewski: *Stabilisation of inertial processes with time delay using a fractional order PI controller*, *PAK*, 56, 2 (2010), 160–162.
21. M. Busłowicz: *Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems*, [in:] K. Malinowski, L. Rutkowski (Eds.): *Recent Advances in Control and Automation*, Academic Publishing House EXIT, Warsaw 2008, 83–92.
22. H. Górecki, S. Fuksa, P. Grabowski and A. Korytowski: *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, PWN-J. Wiley, Warsaw Chichester, 1989.