

Identyfikacja parametrów modelu kondensatora dwiema metodami Monte Carlo

Stefan Kubisa

emerytowany profesor Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego

Zygmunt Lech Warsza

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Streszczenie: Omówiono dokładność identyfikacji wartości parametrów modelu kondensatora rzeczywistego przeprowadzoną dwiema metodami Monte Carlo. Jako prosty przykład numeryczny zidentyfikowano parametry pięciu elementów skupionych RC schematu zastępczego kondensatora na podstawie wyników zasymulowanych pomiarów składowych jego impedancji zastępczej przy kilku częstotliwościach. Parametry mierzone i identyfikowane są powiązane układem nieliniowych zależności i ich rozwiązanie analityczne jest bądź bardzo uciążliwe, bądź może nie być znane. Identyfikację wykonano jednokrotną oraz wielokrotną procedurą iteracyjną Monte Carlo. Dla otrzymanych rozkładów wartości zidentyfikowanych parametrów oszacowano przedziały o prawdopodobieństwie 0,95 i 0,99, które charakteryzują poziom obserwowalności tych parametrów. Dokładność parametrów oszacowano na podstawie otrzymanych rozkładów ich zidentyfikowanych wartości. Omówiono skuteczność i użyteczność identyfikacji parametrów modelu oboma metodami Monte Carlo.

Słowa kluczowe: model kondensatora, identyfikacja parametrów, metoda Monte Carlo, rozkład parametrów

1. Wprowadzenie

W wielu dziedzinach praktycznych i naukowych konieczne jest oszacowanie dokładności parametrów modelu obiektu fizycznego uzyskanych na podstawie wyników pomiarów jego parametrów dostępnych zewnętrznie. W ocenie tej trzeba uwzględnić zarówno dokładność pomiarów jak i dokładność identyfikacji parametrów wewnętrznych modelu, czyli wyznaczenia ich wartości z wyników pomiaru. Parametry identyfikowane i mierzone są często powiązane układem nieliniowych zależności i dokładne rozwiązanie analityczne jest albo bardzo uciążliwe, albo nawet nie istnieje. Można do identyfikacji wykorzystywać wówczas metody numeryczne, w tym symulację metodą Monte Carlo (MC). Uzyskane wyniki są przybliżone i konieczne jest oszacowanie ich dokładności.

W elektryce metody Monte Carlo stosuje już od kilkadziesiąt lat [1, 2], w tym do określania wrażliwości parametrów układów analogowych i cyfrowych na zmiany wartości elementów i dopuszczalnej ich tolerancji [3–5].

W metrologii metodą Monte Carlo wyznacza się rozszerzoną niepewność pomiaru wg zaleceń przewodnika międzynarodowego GUM. Natomiast w wielu pracach wykorzystujących metody Monte Carlo, nawet zaawansowanych matematycznie, metrologiczna ocena dokładności identyfikowanych parametrów nie występuje, bądź jedynie marginalnie szacuje się rozrzuty wyników.

Oszacowanie dokładności identyfikacji metodą Monte Carlo dokonamy dla prostego przykładu schematu zastępczego kondensatora zawierającego pięć elementów [6]. Parametry tego układu wyznaczy się na podstawie wyników symulowanych pomiarów składowych impedancji zastępczej przy kilku częstotliwościach. Dla uproszczenia rozważań zakłada się, że wpływ niedokładności pomiarów impedancji można pominąć. Identyfikację przeprowadzi się za pomocą jednokrotnej oraz wielokrotnej iteracyjnej procedury MC i na podstawie otrzymanych rozkładów zidentyfikowanych wartości parametrów układu oszacuje się i porówna ich dokładności. Analiza tego przykładu posłuży wstępnej ocenie szybkości i dokładności metod MC stosowanych w identyfikacji na podstawie pomiarów.

2. Schemat zastępczy kondensatora

Kondensatory są powszechnie stosowane w wielu urządzeniach elektrycznych i jako elementy układów elektronicznych. Również w technice pomiarowej stosuje się wiele rodzajów czujników pojemnościowych. W szczegółowym opisie właściwości rzeczywistego kondensatora, obok jego podstawowego parametru – pojemności C , podaje się też wartości innych parametrów zwanych resztkowymi lub pasożytniczymi. Na rysunku 1 poka-

Autor korespondujący:

Zygmunt L. Warsza, zlw@op.pl

Artykuł recenzowany

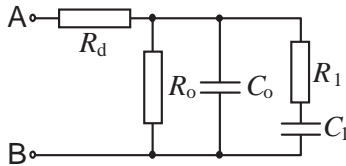
nadesłany 16.01.2018 r., przyjęty do druku 16.04.2018 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

zono przyjętą do dalszych rozważań strukturę RC schematu zastępczego kondensatora [6].

Głównym parametrem kondensatora jest pojemność C_o , związana z jego wymiarami geometrycznymi i przenikalnością dielektryczną dielektryka między okładkami. Rezystancja R_o modeluje niedoskonałość kondensatora, tj. jego upływność przy niskich częstotliwościach, gałąź zawierająca elementy R_1 , C_1 modeluje zjawisko polaryzacji dielektryka, a R_d – jest rezystancją doprowadzeń. Jest to model nieco uproszczony, gdyż nie uwzględnia indukcyjności upływu izolacji i zastępuje zjawisko polaryzacji dielektryka, pojedynczą gałęzią R_1 , C_1 , a nie zaś wieloma równoległymi gałęziami RC. Zakłada się też, że układ jest liniowy, czyli że jego parametry nie zależą od napięcia i są stałe w rozpatrywanym zakresie częstotliwości.



Rys. 1. Uproszczony model kondensatora
Fig. 1. Simplified 5-element model of the capacitor

W pracy zostanie opisane zastosowanie dwu procedur metody MC do modelowania obiektów rzeczywistych na przykładzie identyfikacji parametrów R_d , R_o , C_o , R_1 , C_1 zastosowanego schematu (rys. 1). Przyjęty do tych rozważań model kondensatora jest w pełni zadowalający. Zamierzam autorów pracy, poza omówieniem wyników identyfikacji parametrów modelu kondensatora i uzyskanej tu dokładności, jest ocena przydatność tej metody MC w praktyce.

3. Podstawowe wzory i dane pomiarowe do identyfikacji

W praktyce dane wejściowe do identyfikacji parametrów schematu pochodzą z pomiarów składowych impedancji zespolonej \underline{Z} między końcówkami AB kondensatora. Pomiar wykonuje się przemiennym prądem sinusoidalnym (AC) przy kilku odpowiednio wybranych częstotliwościach. Impedancja \underline{Z} modelu kondensatora (rys. 1) jest złożoną nieliniową funkcją częstotliwości f i parametrów układu R_d , R_o , C_o , R_1 , C_1 o ogólnej postaci:

$$\underline{Z}(f, R_d, R_o, C_o, R_1, C_1) = R_d + \frac{\underline{Z}_o(f, R_o, C_o) \cdot \underline{Z}_1(f, R_1, C_1)}{\underline{Z}_o(f, R_o, C_o) + \underline{Z}_1(f, R_1, C_1)} \quad (1)$$

gdzie:

$$\underline{Z}_o(f, R_o, C_o) = \frac{R_o}{j2\pi f C_o} = \frac{R_o}{R_o + \frac{1}{j2\pi f C_o}} \quad (1a)$$

$$\underline{Z}_1(f, R_1, C_1) = R_1 + \frac{1}{j2\pi f C_1} \quad (1b)$$

Po podstawieniu \underline{Z}_o , i \underline{Z}_1 do wzoru (1) uzyskuje się postać impedancji \underline{Z} z ujawnionymi wszystkimi parametrami RC układu. To przekształcanie nie jest jednak konieczne, gdyż przy obliczeniach wykonywanych za pomocą oprogramowania Mathcad wystarczy wzory wpisać tak, jak to pokazano w powyższych postaciach złożonych (1) oraz (1a, 1b). Aplikacja ta dokonuje też operacji na liczbach zespolonych. Jakiegokolwiek „ręczne” ich przekształcanie, dla nadania bardziej eleganckiej formy, nie ma w praktyce sensu – nie przyspieszy obliczeń, a nawet może prowadzić do omyłek.

Identyfikacja ma umożliwić wyznaczenie wartości pięciu parametrów R_d , R_o , C_o , R_1 , C_1 . Zatem pomiary impedancji muszą dostarczyć co najmniej pięć równań rzeczywistych lub co najmniej trzy równania zespolone, z których każde jest równoważne dwóm równaniom rzeczywistym. Ogólnie, w rozpatrywanym przykładzie potrzeba $N \geq 3$ równań zespolonych. Pomiary impedancji zespolonej trzeba wykonać przy odpowiednio wybranych $N \geq 3$ częstotliwościach, by uzyskać N równań zespolonych:

$$\underline{Z}(f_n, R_d, R_o, C_o, R_1, C_1) = \underline{Z}_n; \quad n = 1, \dots, N \quad (2)$$

gdzie \underline{Z}_n jest wynikiem pomiaru przy n -tej częstotliwości f_n .

W przypadku rozważanego modelu (rys. 1) układ równań (2) jest oznaczony (czyli ma rozwiązania). W rozpatrywanym zakresie częstotliwości f , model powinien być adekwatny i o znanych wartościach składowych impedancji zespolonej $\underline{Z}_n(j\omega_n) = R_s(\omega_n) + jX_s(\omega_n)$ znane dokładnie. W rzeczywistości wszystkie pomiary obarczone są niepewnościami. Jednak zasadniczym celem pracy jest ocena przydatności i dokładności samej procedury MC do identyfikacji parametrów R_d , R_o , C_o , R_1 , C_1 , czyli ocena niedokładności numerycznego rozwiązania nieliniowego układu równań (2) metodą MC. W komputerowej symulacji pomiarów można założyć, że wartości składowych \underline{Z}_n na końcówkach zewnętrznych modelu są dokładnie znane.

Do celów przeprowadzanej tu analizy dokonamy symulacji pomiarów. Przyjmijmy pewne wartości parametrów R_d , R_o , C_o , R_1 , C_1 układu (rys. 1) i obliczymy wartości składowych, które zmierzyłby idealny miernik impedancji przy określonych częstotliwościach. Taką operację nazywa się pomiarami wirtualnymi.

Mierniki impedancji, np. transformatorowe mostki automatyczne AC, przy zadanej częstotliwości mierzą składowe impedancji \underline{Z} dwuelementowego układu zastępczego dwójnika, szeregowego lub równoległego. Z pomiarów impedancji o charakterze pojemnościowym otrzymuje się następujące wartości szeregowej rezystancji R_s i szeregowej pojemności C_s :

$$R_s = \text{Re } \underline{Z}(j\omega); \quad C_s = -\frac{1}{2\pi f \text{Im } \underline{Z}(j\omega)} \quad (3)$$

W wyniku pomiarów miernikiem impedancji można też uzyskać dla danej częstotliwości parametry równoległych elementów impedancji zastępczej kondensatora – rezystancji R_r i pojemności C_r , opisanych wzorami.

$$R_r = \frac{1}{\text{Re } \underline{Z}^{-1}}; \quad C_r = \frac{\text{Im } \underline{Z}^{-1}}{2\pi f} \quad (4)$$

Parametry R_r i C_r są powiązane z parametrami R_s i C_s wzorami (3) i (4) z impedancją \underline{Z} badanego kondensatora. Jej wartość nie zależy od przyjętego schematu zastępczego. Wyniki identyfikacji będą takie same bez względu na to, czy miernik impedancji mierzy parametry szeregowo czy równoległe, jeśli w obu przypadkach dokładność pomiarów jest zadowalająca. Dla układu z rysunku 1 założono następujące wartości jego parametrów:

$$R_d = 0,2 \ \Omega, \quad R_o = 10 \times 10^6 \ \Omega, \quad C_o = 5 \times 10^{-9} \ \text{F}, \\ R_1 = 1 \times 10^6 \ \Omega, \quad C_1 = 3 \times 10^{-9} \ \text{F}. \quad (5)$$

Dla symulowanych tu pomiarów z danych (5) obliczono wartości szeregowych elementów zastępczych $R_{s,n}$ i $C_{s,n}$ dla pięciu częstotliwości f_n . W tabeli 1 podano je w zaokrągleniu, ale w obliczeniach można korzystać z pełnej precyzji programu Mathcad – 17 cyfr.

Tabela 1. Wyniki wirtualnych pomiarów impedancji modelu
Table 1. Results of virtual measurements of capacitor impedance

Numer pomiaru n	Częstotliwość f_n	Rezystancja szeregową $R_{s,n}$	Pojemność szeregową $C_{s,n}$
	Hz	Ω	F
1	1×10^1	$5,083 \times 10^5$	$8,476 \times 10^{-9}$
2	1×10^2	$6,561 \times 10^4$	$6,006 \times 10^{-9}$
3	1×10^3	$1,107 \times 10^3$	$5,015 \times 10^{-9}$
4	1×10^4	$1,134 \times 10^1$	$5,000 \times 10^{-9}$
5	1×10^5	$3,115 \times 10^{-1}$	$5,000 \times 10^{-9}$

4. Układ równań warunkowych

W tabeli 1 zawarto dane dla układu pięciu warunkowych równań zespolonych wg (2):

$$\underline{Z}(f_n, R_d, R_o, C_o, R_1, C_1) = \underline{Z}_n \quad (6)$$

gdzie: $\underline{Z}_n = R_{s,n} + \frac{1}{j2\pi f C_{s,n}}$; $n = 1, \dots, N$; $N = 5$.

Układ ten jest równoważny dziesięciu równaniom rzeczywistym o pięciu niewiadomych R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 .

Dla danych wziętych z przedstawionych wyżej pomiarów wirtualnych rozwiązaniami tego układu równań są oczywiście wartości wg (5). Dla danych z realnych pomiarów układ równań (6) jest nadmiarowy i na ogół mógłby być sprzeczny. W takiej sytuacji należy poszukiwać przybliżonego rozwiązania wartości R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 minimalizującego przyjęte kryterium oceny niedokładności rozwiązania. Identyfikacja metodą MC wymaga sformułowania takiego kryterium. Ponadto, jak każda przybliżona metoda rozwiązywania układu równań, wymaga też dla parametrów R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 wyznaczenia wartości początkowych (startowych) $R_{d,0}, R_{o,0}, C_{o,0}, R_{1,0}, C_{1,0}$.

5. Kryterium oceny dokładności rozwiązania

Kryterium to formuluje się zwykle jako pewną funkcję modułów różnic między impedancją obliczoną ze wzoru (2) dla poszukiwanego rozwiązania R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 , a impedancją \underline{Z}_n zmierzoną przy danej częstotliwości f_n :

$$|\Delta \underline{Z}_n| = \left| \underline{Z}(f_n, R_d, R_o, C_o, R_1, C_1) - \underline{Z}_n \right|; \quad n = 1 \dots N \quad (7)$$

Dosyć często stosuje się klasyczne kryterium kwadratowe:

$$\sum_i |\Delta \underline{Z}_n|^2 = \min; \quad n = 1, \dots, N \quad (8)$$

Przy jego stosowaniu istnieje rozwiązanie podane przez Gaussa pod warunkiem, że równania warunkowe są liniowe. Gdy ten przypadek, tak jak tu nie ma miejsca, wówczas identyfikację

można dokonać metodą MC, która daje też wiele swobody w wyborze i ukształtowaniu kryterium.

Dla rozpatrywanej identyfikacji parametrycznej modelu kondensatora właściwsze wydaje się kryterium jednostajne:

$$\max_n |\Delta \underline{Z}_n| = \min; \quad n = 1, \dots, N \quad (9)$$

Oznacza ono poszukiwanie takiego rozwiązania, które minimalizuje największy moduł różnicy impedancji (7) otrzymanych przy częstotliwościach, w których dokonywano pomiarów. Moduł impedancji zmienia się jednak z częstotliwością w szerokich granicach. Dlatego bardziej sensowne wydaje się kryterium jednostajne odnoszące się do modułów względnych różnic impedancji:

$$\max_n \left| \frac{\delta \underline{Z}_n}{\underline{Z}_n} \right| = \min; \quad n = 1, \dots, N \quad (10)$$

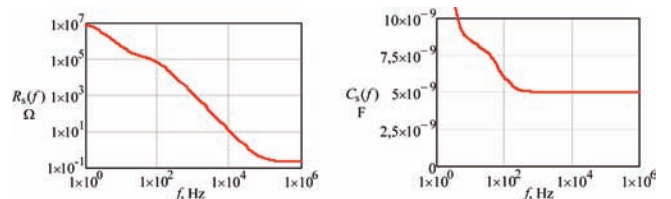
gdzie:

$$\delta \underline{Z}_n = \frac{\Delta \underline{Z}_n}{\underline{Z}_n}; \quad n = 1, \dots, N \quad (11)$$

W dalszych obliczeniach zastosuje się kryterium (11).

6. Wyznaczenie początkowych (startowych) wartości identyfikowanych parametrów

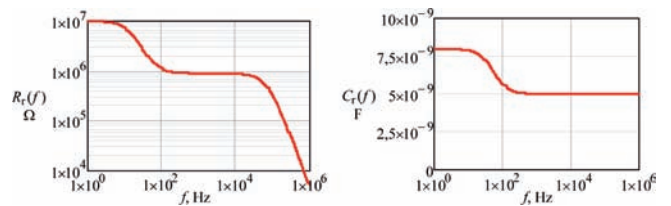
Na rysunku 2 przedstawiono wykresy rezystancji szeregowej R_s i pojemności szeregowej C_s impedancji \underline{Z} kondensatora wg wzorów (3). Są one obliczone z założonych danych (5), czyli są wirtualnymi wynikami pomiarów.



Rys. 2. Wyniki badań modelu kondensatora – rezystancja R_s i pojemność C_s układu szeregowego w funkcje częstotliwości f

Fig. 2. The measurement results of serial resistance R_s and capacitance C_s of the 2-element model of capacitor as frequency f functions

Z kolei na rysunku 3 przedstawiono wykresy zastępczych równoległych rezystancji R_r i pojemności C_r wg wzorów (4). Wykresy z rysunków 2 i 3 wykorzystano też do wyboru wartości częstotliwości, przy których wykonano wirtualne pomiary z wynikami podanymi w tabeli 1. Intuicja podpowiada, że zakres tych częstotliwości powinien być na tyle szeroki, aby obejmował istotne zmiany dla poszukiwanych wartości R_s, C_s, R_r, C_r .



Rys. 3. Wynik wirtualnych badań kondensatora – rezystancja R_r i pojemność równoległa C_r jako funkcje częstotliwości f

Fig. 3. Results of the virtual testing of resistance R_r and capacitance C_r as functions of frequency f

Z analizy schematu (rys. 1) otrzymuje się przybliżone wyrażenia (12) w zapisie programu Mathcad dla początkowych wartości wyznaczanych parametrów:

$$\begin{aligned}
 R_{d,0} &\approx R_s(\text{high freq.}), \\
 R_{o,0} &\approx R_r(\text{low freq.}), \\
 C_{o,0} &\approx C_s(\text{high freq.}), \\
 \frac{R_o \cdot R_1}{R_o + R_1} &\approx R_r(\text{mean freq.}) \\
 R_{1,0} &\approx \frac{R_r(\text{low freq.}) \cdot R_r(\text{mean freq.})}{R_r(\text{low freq.}) - R_r(\text{mean freq.})}, \\
 C_o + C_1 &\approx C_r(\text{low freq.}) \\
 C_{1,0} &\approx C_r(\text{low freq.}) - C_s(\text{high freq.}). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Na tej podstawie, wg danych z tabeli 1 i wzorów (12) obliczono następujące początkowe wartości parametrów:

$$\begin{aligned}
 R_{d,0} &= 0,312 \ \Omega, \quad R_{o,0} = 7,445 \times 10^6 \ \Omega, \quad C_{o,0} = 5,000 \times 10^{-9} \ \text{F}, \\
 R_{1,0} &= 1,038 \times 10^6 \ \Omega, \quad C_{1,0} = 2,897 \times 10^{-9} \ \text{F}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

7. Jednokrotna identyfikacja metodą MC

Jednokrotna (bez iteracji) identyfikacja metodą MC polega na M -krotnym losowaniu pseudolosowych wartości liczbowych poszukiwanych parametrów i wyborze wartości z tego losowania, które spełnia kryterium (10). Losowano z generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym. Przedziały losowania dla poszczególnych parametrów dobrano arbitralnie w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
 &[aR_{d,0}, bR_{d,0}], [aR_{o,0}, bR_{o,0}], [aC_{o,0}, bC_{o,0}], \\
 &[aR_{1,0}, bR_{1,0}], [aC_{1,0}, bC_{1,0}] \quad (14)
 \end{aligned}$$

gdzie: $a = 1 - 1/\sqrt{2}$; $b = 1 + 1/\sqrt{2}$.

Wylosowano M -elementowe wektory ($M = 10\ 241$) wartości poszczególnych parametrów. Wartości te tworzą kolumny macierzy \mathbf{P} o M wierszach o numerach m ($m = 1, \dots, M$) i pięciu kolumnach (liczba 5 parametrów schematu – rys. 1) – patrz tabela 2.

Na podstawie m -tego wiersza macierzy \mathbf{P} ze wzoru (11) obliczono elementy m -tego wiersza macierzy Δ (tabela 3), która ma $N = 5$ kolumn o numerach n (takich jak numery częstotliwości

w tabelcy 1). Największe elementy wierszy macierzy Δ tworzą M -elementowy wektor \mathbf{Q} (patrz tabela 3).

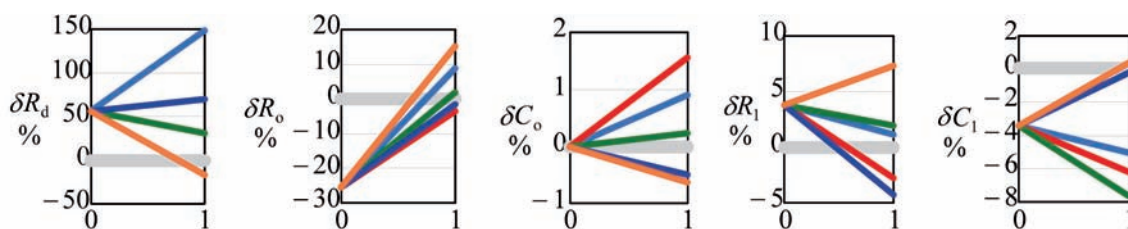
Najlepszym rozwiązaniem identyfikacji metodą MC wg kryterium (10) jest zestaw parametrów R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 z wiersza macierzy \mathbf{P} (tabela 2) o numerze $m = m_{\text{opt}}$, przy czym m_{opt} jest numerem minimalnego elementu wektora \mathbf{Q} (tabela 3), czyli spełniającego warunek $q_{m_{\text{opt}}} = Q$.

Tabela 2. Macierz \mathbf{P} pseudolosowych wartości parametrów $R_{d,m}, R_{o,m}, C_{o,m}, R_{1,m}, C_{1,m}$
 Table 2. The matrix \mathbf{P} of pseudo-random values of $R_{d,m}, R_{o,m}, C_{o,m}, R_{1,m}, C_{1,m}$ parameters

Nr losowania	Wylosowana wartość parametru macierzy \mathbf{P}				
1	$R_{d,1}$	$R_{o,1}$	$C_{o,1}$	$R_{1,1}$	$C_{1,1}$
...
m	$R_{d,m}$	$R_{o,m}$	$C_{o,m}$	$R_{1,m}$	$C_{1,m}$
...
M	$R_{d,M}$	$R_{o,M}$	$C_{o,M}$	$R_{1,M}$	$C_{1,M}$

Wyniki identyfikacji metodą MC są pseudolosowe, ponieważ zależą od punktu startu generatora liczb pseudolosowych. W programie Mathcad można ustawiać punkt startu pierwszego losowania. Jeśli nie uczyni się tego – punkt startu będzie domyślny i zawsze taki sam w chwili rozpoczęcia sesji obliczeniowej po uruchomieniu aplikacji Mathcad. Jeśli sesja obliczeniowa nie zostanie przerwana przez ponowne uruchomienie aplikacji, ale uruchomi się powtórzenie obliczeń, to nowe obliczenia rozpoczną się od punktu startowego zależnego od liczności zbioru liczb wygenerowanego w poprzednich obliczeniach.

Na rysunku 4 pokazano wykresy ilustrujące wyniki pięciu wybranych realizacji jednokrotnej procedury identyfikacji parametrów R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 . Każda z realizacji miała inny punkt startowy generatora liczb pseudolosowych. Wykresy mają postać pięciu różnokolorowych prostych, przy czym na wszystkich wykresach dany kolor odpowiada tej samej realizacji procedury identyfikującej. Proste te łączą wspólny dla wszystkich realizacji punkt o wartości odciętej 0 (zero) i rzędnej o wartości względnego błędu odpowiedniej wartości początkowej wg (13) z innym dla każdej realizacji punktem o odciętej 1 (jeden) i rzędnej o wartości względnego błędu wartości otrzymanej w wyniku realizacji danej jednokrotnej procedury identyfikującej. Omawiane proste mają jedynie mnemotechniczne znaczenie. Ważne są tylko ich punkty początkowe i końcowe odcięta 0 i 1 (stan przed i po identyfikacji).



Rys. 4. Błędy względne identyfikacji parametrów R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 prostą metodą MC przy różnych początkowych stanach generatora liczb pseudolosowych (różne kolory wykresów); odcięte 0 i 1 – błąd przed i po identyfikacji

Fig. 4. Relative errors of 5 parameters R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 identified by simple MC method with 5 different initial states of random number generator (various colors). Abscissa 0 and 1 – error before and after identification

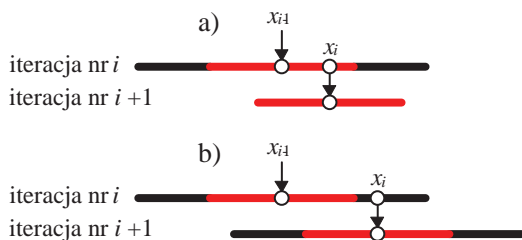
Tabela 3. Macierz Δ modułów $|\delta Z_n|_m$ względnych różnic (11) między impedancją ze wzoru (2) i impedancją Z_n zmierzoną przy częstotliwości f_n
 Table 3. Matrix Δ of relative differences (11) of modules $|\delta Z_n|_m$ between the impedance Z of formula (2) and impedance Z_n measured at a frequency f_n .

Nr losowania	Częstotliwość f_n					Wektor \mathbf{Q} liczb największych w wierszach macierzy Δ
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	
	Moduł różnicy względnej δZ_n – macierz Δ					
1	$ \delta Z_{11} $	$ \delta Z_{21} $	$ \delta Z_{31} $	$ \delta Z_{41} $	$ \delta Z_{51} $	$q_1 = \max_n \delta Z_n _1$
...
m	$ \delta Z_{1m} $	$ \delta Z_{2m} $	$ \delta Z_{3m} $	$ \delta Z_{4m} $	$ \delta Z_{5m} $	$q_m = \max_n \delta Z_n _m$
...
M	$ \delta Z_{1M} $	$ \delta Z_{2M} $	$ \delta Z_{3M} $	$ \delta Z_{4M} $	$ \delta Z_{5M} $	$q_M = \max_n \delta Z_n _M$
Najmniejszy z elementów wektora \mathbf{Q}						$Q = \min_m q_m$

Określenie wartości powyższych błędów względnych jest tu możliwe tylko dlatego, że prezentowane rozważania opierają się o symulację, dla której założono prawdziwe wartości parametrów (3), nieznanne w warunkach pomiarów rzeczywistych.

Z wykresów pokazanych na rysunku 4 można wysnuć, mniej lub bardziej widoczne następujące wnioski:

- 1) Gdy wartość początkowa (13) parametru znacznie odbiega od wartości prawdziwej (3) i **parametr jest dobrze obserwowalny**, identyfikacja daje znaczące zmniejszenie błędu. Ilustruje to rysunek 4b, według którego błąd parametru R_o zmienił się od wartości początkowej – około -26% do wartości \pm kilkanaście procent.
- 2) Gdy wartość początkowa parametru jest dostatecznie bliska wartości prawdziwej i **parametr jest dobrze obserwowalny**, gdyż błąd po identyfikacji osiąga wartość \pm kilka procent. Ilustruje to rysunek 4c.
- 3) Przy gorszej obserwowalności parametru, błędy po identyfikacji mogą osiągać wartości \pm dziesiątek i setek procent. Szczególnie dobitnie ilustruje to rysunek 4a, gdyż parametr R_d jest szczególnie źle obserwowalny z końcówek AB kondensatora (rys. 1).



Rys. 5. Wartości początkowe i przedziały losowania dla iteracji i oraz iteracji $i + 1$: a) gdy wynik x_i iteracji nr i mieści się w połowie długości jej przedziału losowania, b) gdy jest przeciwnie

Fig. 5. The initial values and draw intervals of the iteration number i and number $i + 1$: a) when the result x_i of iteration i is inside half of its interval sampling, b) if it is the opposite

W rozważaniach tych, by zbytnio nie komplikować zagadnienia, pominięto formalne definicje i miary obserwowalności. Dla

specjalisty elektryka jest oczywiste, że dla układu z rysunku 1 przy wartościach parametrów wg (5) najlepiej obserwowalne są parametry C_o i R_o , a najgorzej – parametr R_d .

Przedstawione tu wyniki jednokrotnej identyfikacji MC mogą nie zachęcać do stosowania tej metody identyfikacji. Trzeba zwiększyć jej dokładność. Można to uzyskać przez zwiększenie liczby losowań M , ale jest to droga nieefektywna, ponieważ k -krotne zwiększenie liczby M wydłuża około k -krotnie czas obliczeń i zmniejsza błąd identyfikacji tylko k -krotnie.

Zaprezentowane wyniki identyfikacji otrzymano dla $M \approx 10^4$ (dokładnie dla $M = 10\,241$), a czas obliczeń był rzędu 1 s. Zwiększenie 100-krotne dokładności wymagałoby $M \approx 10^8$ i wydłużyłoby czas obliczeń identyfikacji jednokrotnej do rzędu 10^4 s \approx 3 h. Ponadto wymagałoby komputera o większej mocy obliczeniowej niż PC.

Znaczne zwiększenie dokładności bez wydłużania czasu obliczeń (a nawet ze skróceniem tego czasu) otrzymuje się przy stosowaniu wielokrotnej iteracyjnej identyfikacji przy liczbie M rzędu kilkuset i liczbie iteracji rzędu kilkudziesięciu.

8. Iteracyjna identyfikacja MC

Identyfikacja iteracyjną wielokrotną metodą MC przebiega następująco:

- 1) Dla pierwszej iteracji (iteracja nr 1) wartości początkowe parametrów i przedziały losowania są takie, jak w opisanej identyfikacji jednokrotnej.
- 2) Dla każdej następnej iteracji (ogólnie nr i) wartością początkową danego parametru jest wartość x_{i-1} uzyskana w poprzedniej iteracji nr $i - 1$.
- 3) Długość przedziału losowania dla iteracji nr $i + 1$ jest dwukrotnie mniejsza, niż w iteracji nr i , jeżeli wynik x_i iteracji nr i mieści się w przedziale o długości równej połowie długości przedziału losowania w tej iteracji (rys. 5a) lub jest równa długości przedziału losowania w iteracji nr i , jeżeli opisany wcześniej warunek nie jest spełniony (rys. 5b).

Na rysunku 6 pokazano wykresy ilustrujące zbieżność iteracyjnej procedury identyfikującej. Wykresy te przedstawiają moduły względnych błędów identyfikacji w funkcji numeru iteracji dla pięciu losowych realizacji procedury identyfikującej złożonej z 32 iteracji. W każdej iteracji każdy z pięciu parametrów był losowany $M = 321$ razy. Oznacza to, że w całej procedurze każdy parametr był losowany $32 \times 321 = 10\,272$ razy, a więc w przybliżeniu tylokrotnie, jak w procedurze jednokrotnej.

Warto zauważyć, że moduł błędu względnego najlepiej obserwowalnego parametru C_o osiąga wartość rzędu $10^{-3}\%$, a nawet $10^{-4}\%$, podczas gdy dla najgorzej obserwowalnego parametru R_d może przekraczać 100%. Natomiast na rys. 7 pokazano histogramy rozkładu błędów względnych identyfikacji parametrów R_d , R_o , C_o , R_1 , C_1 otrzymanych za pomocą procedury identyfikującej o 32 iteracjach. Histogramy uzyskano

z $N_R = 16\ 384$ kolejnych realizacji n_R tej procedury. Zauważa się, że histogramy te można (lepiej lub gorzej) aproksymować krzywymi wykreślonymi linią ciemnoniebieską. Krzywe te określone są jako funkcja gęstości prawdopodobieństwa. Jej unormowana i standaryzowana forma ma postać:

$$d(z) = \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot e^{-\sqrt{2 \cdot \sqrt{30}} |z|} \quad (15)$$

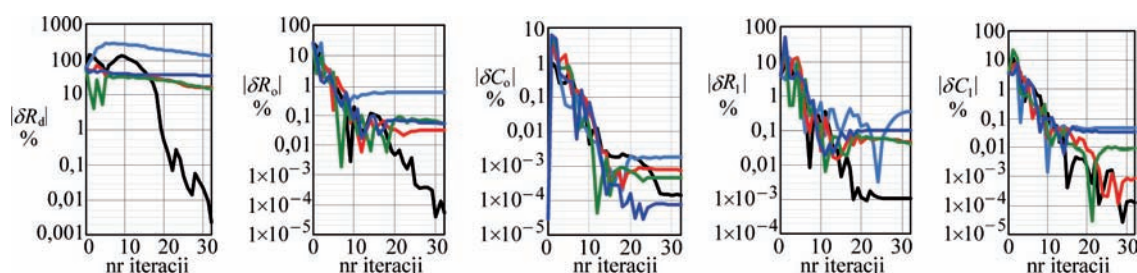
przy czym z jest zmienną losową standaryzowaną.

Rozkład wg wzoru (15) znaleziono metodą heurystyczną. Można go nazwać rozkładem Laplace-podobnym, gdyż ma kształt zbliżony do dwustronnego rozkładu Laplace'a. Rozkład (15) jest od tego rozkładu bardziej smukły.

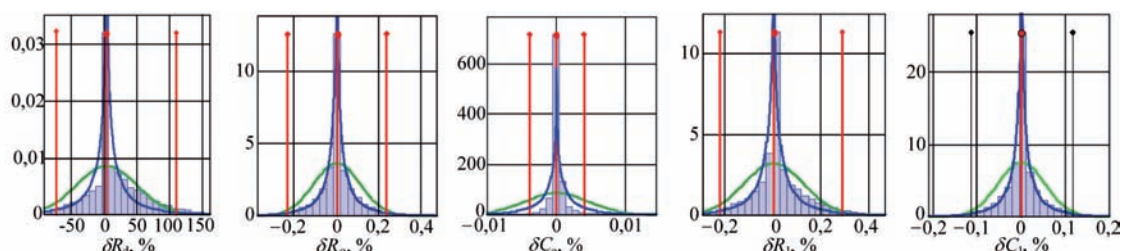
Tabela 4. Przedziały ufności rozkładów względnych odchyłeń od mediany parametrów zidentyfikowanych metodą MC

Table 4. Cover intervals of relative deflections of pdfs of parameters identified by MC method in %

Parametr	Poziom ufności	Identyfikacja jednokrotna		32 iteracje	
		Dolna granica %	Górna granica %	Dolna granica %	Górna granica %
R_d	95%	-53	157	-75	110
	99%	-53	165	-94	163
R_o	95%	-13	18	-0,23	0,24
	99%	-15	23	-0,38	0,48
C_o	95%	-2,6	2,9	-0,0039	0,0041
	99%	-3,1	3,4	-0,010	0,015
R_1	95%	-15	18	-0,22	0,29
	99%	-17	23	-0,30	0,47
C_1	95%	-8,7	9,8	-0,11	0,12
	99%	-12	12	-0,21	0,20



Rys. 6. Wykresy względnych odchyłeń od mody (maksimum) rozkładów pdf identyfikowanych parametrów R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 ilustrujące zbieżność identyfikacji iteracyjną metodą MC o 32 iteracjach przy pięciu różnych stanach początkowych generatora liczb pseudolosowych (różne kolory)
 Fig. 6. The relative deflections from mode of the pdf of identified parameters R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 illustrate the convergence of identification of multi-iterative MC method (32 iterations) at 5 different initial states of the random numbers generator (various colours)



Rys. 7. Histogramy względnych odchyłeń od mediany rozkładu gęstości prawdopodobieństwa parametrów R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 zbioru $N_R = 16\ 384$ kolejnych realizacji metody identyfikacji MC o 32 iteracjach. Histogramy wykonano w najkrótszych 99-procentowych przedziałach rozszerzenia. Czerwonymi pionowymi liniami zakończonymi znakiem ♦ oznaczono najkrótsze 95-procentowe przedziały rozszerzenia, a za pomocą czerwonych linii pionowych zakończonych znakiem • oznaczono wartości oczekiwane
 Fig. 7. Histograms of relative deflections from median of pdf of R_d, R_o, C_o, R_1, C_1 parameters for a set of $N_R = 16384$ implementations of the MC method of identification with 32 iterations. (Histograms made for the shortest 99% extension ranges. Red vertical lines with mark ♦ indicate the shortest 95-percent extension intervals, and by red vertical lines completed with mark • indicate expected values)

W ogólniejszym przypadku niestandardyzowanej zmiennej losowej δx o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ rozkład (15) przyjmuje postać:

$$D(\delta x) = \frac{\sqrt{30}}{2\sigma} e^{-\sqrt{2\sqrt{30}} \frac{|\delta x - \mu|}{\sigma}} \quad (16)$$

Dla każdego z poszukiwanych parametrów R_d , R_o , C_o , R_1 , C_1 określano wartość oczekiwaną μ względnych odchyłeń δx jako medianę w zbiorze $N_R = 16\,384$ realizacji tego błędu, ich odchylenie standardowe σ – jako empiryczne odchylenie pojedynczej realizacji (względem mediany) w tym zbiorze.

Na rysunku 7 kolorem zielonym pokazano też krzywe rozkładu normalnego o parametrach μ oraz σ , których nie można jednak uznać za aproksymaty histogramów.

9. Przedziały o poziomach ufności 0,99 i 0,99 rozkładów parametrów

Rysunek 4 daje jakościową ocenę wyników prostej (jednokrotnej) identyfikacji MC, a rysunki 6 i 7 podobną ocenę dla identyfikacji MC o 32 iteracjach. Porównanie obu ocen umożliwiające dane liczbowe zestawione w tabeli 4.

Na podstawie danych z tabeli 4 można zauważyć, że:

1. Parametr R_d schematu zastępczego kondensatora jest źle obserwowalny z jego końcówek. Identyfikacja R_d metodą MC jest mało efektywna, zarówno w wersji jednokrotnej, jak i o 32 iteracjach.
2. Dla dosyć dobrze obserwowalnych parametrów R_o , R_1 i C_1 identyfikacja z 32 iteracjami dała kilkudziesięciokrotnie mniejszy przedział rozszerzenia niż identyfikacja jednokrotna.
3. Dla najlepiej obserwowalnego parametru C_o , identyfikacją z 32 iteracjami otrzymano nawet kilkusetkrotnie mniejsze przedziały pokrycia niż dla identyfikacji jednokrotnej.
4. Warto też odnotować, że przy prawie identycznej liczbie losowań wartości każdego parametru, tj. 10 241 razy dla identyfikacji jednokrotnej i 10 272 dla identyfikacji z 32 iteracjami – ta druga jest wyraźnie szybsza. Na komputerze klasy PC stosowanym w tej pracy trwała ona poniżej 1 s.

10. Wnioski ogólne

Na rozpatrywanym symulowanym przykładzie identyfikacji metodą Monte Carlo wartości pięciu elementów schematu zastępczego kondensatora rzeczywistego, wykonaną na podstawie pomiarów składowych impedancji na jego końcówkach, wykazano, że identyfikacja taka jest szybka i skuteczna. Jej stosowanie w praktyce należy poprzeć też taką, jak podana powyżej, analizą rozkładu prawdopodobieństwa pdf wartości każdego z parametrów. Przedziały tego rozkładu o poziomie ufności 0,95 i 0,99 świadczą o stopniu obserwowalności parametru z końcówek układu. Jeśli parametry w trakcie użytkowania będą podlegać zmianom, to należy dokonać wektorowej analizy niepewności wg Suplementu 2 do GUM [7], która wykaże też ich skorelowanie. Propagację niepewności układu o parametrach zespolonych omówił ogólnie B. Hall [8].

Zastosowaną w pracy Identyfikacja parametrów wewnętrznych układu z jego zacisków metodą Monte Carlo o wielokrotnej iteracji można zastosować zarówno w tomografii impedancyjnej, jak i do identyfikacji zmian rezystancji wewnętrznych wieloelementowego czujnika rozkładu temperatury powierzchni [9].

Bibliografia

1. Golio M., Golio J., RF and Microwave Circuits, Measurements, and Modeling. CRC Press, (Taylor & Francis Group) Boca Raton, London, New York, 2008, Chapter 31.
2. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I., *Handbook of Monte Carlo Methods*. 2011 John Wiley & Sons, New York, ISBN 0-470-17793-4.
3. Gajda J., Sidor T., *Using Monte Carlo Analysis for Practical Investigation of Sensitivity of Electronic Converters in Respect to Component Tolerances*, "Electrical and Electronic Engineering", Vol. 2, No. 5, 2012, 297–302, DOI: 10.5923/j.eee.20120205.09.
4. Zennaro E., Mazzetti C., Amicucci G.L., Fiamingo F., *Sensitivity Analysis of the Circuit Model of a Medical Equipment for the Evaluation of Leakage Currents*. European Modelling Symposium, 21–23 Oct. 2014, 87–92, DOI: 10.1109/EMS.2014.30.
5. Sita Kondamadugula, Srinath R Naidu: *Parameter-importance based Monte-Carlo Technique for Variation-aware Analog Yield Optimization*. International Institute of Information Technology, Bangalore India, Proceedings of the 26th edition on Great Lakes Symposium on VLSI, 51–56, DOI: 10.1145/2902961.2903018.
6. Pieńkowski D., Wpływ pasożytniczych reaktancji na parametry aplikacyjne rezystorów i kondensatorów, <http://elektronikab2b.pl/technika/1236>.
7. Evaluation of measurement data. Supplement 2 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities. https://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_102_2011_E.pdf.
8. Hall B. D., *On the propagation of uncertainty in complex-valued quantities*. „Metrologia” 41 (2004), 173–177, DOI: 10.1088/0026-1394/41/3/010
9. Dorozhovets M., Burdega M., Warszawa Z.L., *Accuracy of reconstruction of the spatial temperature distribution based on surface temperature measurements by resistance sensors*. SCIT 2016 Recent Advances in Systems, Control and Information Technology. (editors: R. Szewczyk, M. Kaliczyńska), vol. 543 serii „Advances in Intelligent Systems and Computing” Springer International Publishing 2017, 567–575, DOI 10.1007/978-3-319-48923-0_60.

Identification of the Capacitor Model Parameters by two Monte Carlo Methods

Abstract: The accuracy of identification of internal parameters of the model of capacitor as the physical device carried out by two Monte Carlo methods of simulation is considered. As an simply numerical example are identified parameters of the five RC elements of the equivalent circuit of capacitor based on results of simulated measurements of its equivalent impedance components at several frequencies. The measured and identified parameters are linked by a system of nonlinear relationships and their analytical solution is either very inconvenient, or even non-existing. Identification has been carried by single and by multiple iterative procedure Monte Carlo. From the pdf distributions of identified parameters their achieved coverage rangers of 0,95 and 0,99 probability are estimated. The results demonstrate the efficiency and utility of identifying internal model parameters by both Monte Carlo methods.

Keywords: model of capacitor, parameter identification, Monte Carlo method, distribution of parameters

prof. dr hab. inż. Stefan Kubisa

dskubisa@hotmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Szczecińskiej (1962 r.), gdzie spędził całe swoje zawodowe życie. Doktorat uzyskał w 1971 r. na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej, a habilitację na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach w 1979 r. Tytuł naukowy profesora uzyskał w 1998r. Zainteresowania naukowe: pomiary mocy i energii elektrycznej, pomiary impedancji, pomiary wielkości nieelektrycznych, a w ostatnich latach – analiza niepewności pomiaru. Członek Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej Polskiej Akademii Nauk od 1991 r. Organizator kilku konferencji naukowych, w tym Międzyuczelnianych Konferencji Metrologów. Pomysłodawca i współorganizator sympozjów Niepewność Pomiaru (2002–2011).



doc. dr inż. Zygmunt Lech Warsza

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–70, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatykacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor około 300 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.

