

O stabilności układów regulacji z czasem opóźnienia

Robert Bieda

Politechnika Śląska, Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki, Katedra Automatyki i Robotyki, ul. Akademicka 2A, 44-100 Gliwice

Streszczenie: W artykule przedstawiono proces rozszerzenia kryterium Nyquista na wariant obliczeniowy umożliwiający badanie stabilności układów regulacji z czasem opóźnienia $T_o > 0$. Zdefiniowano warunki konieczne stabilności takich układów oraz zaprezentowano schemat działania umożliwiający wyznaczenie przedziałów wartości czasów opóźnienia gwarantujących stabilne działanie struktury pętlowej układu regulacji. W ramach analizy proponowanego rozwiązania zaprezentowane zostały wyniki procesu badania stabilności układów regulacji dla przykładowych dynamik zastępczych struktury pętlowej. Na przykładzie prezentowanych układów pokazane zostały właściwości proponowanego mechanizmu badania stabilności układów z opóźnieniem oraz sposób interpretacji uzyskanych wyników.

Słowa kluczowe: układ regulacji, dynamika z czasem opóźnienia, kryterium stabilności Nyquista, trajektoria graniczna, quasi-wielomian charakterystyczny

1. Wprowadzenie

Wśród zagadnień związanych z syntezą oraz analizą układów regulacji (UR) automatycznej jednym z fundamentalnych jest zagadnienie stabilności takiego układu. W przypadku układów stacjonarnych, liniowych opisanych operatorowymi funkcjami przejścia, na przestrzeni lat, opracowano mnóstwo metod badania stabilności, a w ostatnich latach z pomocą przyszły jeszcze narzędzia symulacyjne wspomagające ten proces obliczeniami numerycznymi.

Pośród analizowanych układów dynamicznych szczególnie miejsce zajmują procesy dynamiczne z czasem opóźnienia. W sposób neutralny zjawisko opóźnienia reakcji w czasie pojawia się w modelach procesów biologicznych czy populacyjnych [1–3]. Podobnie w szeroko rozumianych zagadnieniach modelowania układów dynamicznych często wykorzystywane są klasy modeli operatorowych, w których występuje czas opóźnienia. Opóźnienie to jest efektem uproszczenia modelu dynamicznego w procesie identyfikacji jego parametrów (np. z wykorzystaniem skokowej odpowiedzi czasowej), redukcji wymiaru modelu operatorowego wysokiego rzędu lub wynika z natury opisu fizycznego danego procesu dynamicznego [4–6]. W rezultacie szerokiego spektrum zastosowań opisu procesów dynamicznych równaniami różniczkowymi z opóźnieniem pojawiła się konieczność definicji mechanizmów umożliwiających badanie ich właściwości oraz właściwości ich rozwiązań, a także wpływu czasu opóźnienia na te rozwiązania [7–9].

W artykule opisano mechanizm umożliwiający określenie warunków stabilności UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$. Bazując na mechanizmie wzorowanym na metodzie h -podziału (T_o -podziału) [7, 10], będącej swoistym uogólnieniem metody D-podziału, czy podobnym mechanizmem znanym pod nazwą metody Waltona-Marshalla [11–13], umożliwia on rozszerzenie idei kryterium stabilności UR wykorzystującej zasadę przyrostu argumentu funkcji zespolonej oraz charakterystyki Nyquista dynamiki badanego układu na UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$. Uzyskany mechanizm pozwala na wykorzystanie jedynie ujęcia algebraicznego w procesie analizy stabilności. Efekt ten został uzyskany dzięki rozdzieleniu modelu operatorowego dynamiki struktury pętlowej analizowanego UR na część transmitancyjną (opisaną funkcją wymierną) oraz część niewymierną. W rezultacie przedstawiony mechanizm umożliwia nie tylko sprawdzenie stabilności UR, ale także określenie wpływu czasu opóźnienia na ten układ.

2. Stabilność układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym

Dla dowolnego układu regulacji, zgodnie z regułą wzmocnień Masona [5, 14–16], zastępcza funkcja przejścia $G_{xy}(s)$ między dowolnym sygnałem wejściowym $x(t)$ (sygnałem zewnętrznym, niezależnym od UR), a dowolnym sygnałem wyjściowym $y(t)$ (sygnałem wewnętrznym, zależnym od UR) opisana jest zależnością:

$$G_{xy}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k(s) \Delta_k(s)}{\Delta(s)} = \frac{F(s)}{\Delta(s)}, \quad (1)$$

w której wyznacznik schematu blokowego UR $\Delta(s)$ opisuje funkcją:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i L_i(s) + \sum_{i,j} L_i(s) L_j(s) - \sum_{i,j,k} L_i(s) L_j(s) L_k(s) + \dots \quad (2)$$

Autor korespondujący:

Robert Bieda, robert.bieda@polsl.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 24.02.2025 r., przyjęty do druku 24.03.2025 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Int.

gdzie:

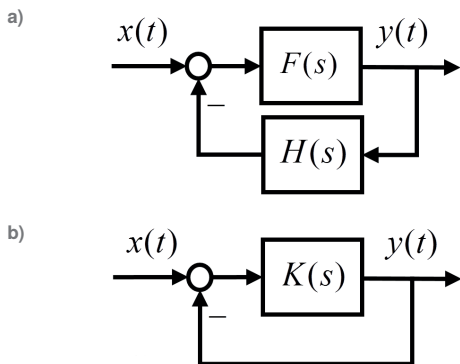
- $L_i(s)$ – zastępcza funkcja przejścia i -tej pętli analizowanego UR wyznaczona jako iloczyn funkcji przejścia bloków dynamicznych tworzących tę pętlę wraz ze znakami (± 1) sygnałów tej pętli w węzłach sumacyjnych;
- $L_i(s)L_j(s)$ – zastępcza funkcja przejścia iloczynu i -tej oraz j -tej rozłącznej pętli analizowanego UR (pary pętli niestykających się ze sobą) wyznaczona jako iloczyn funkcji przejścia bloków dynamicznych tworzących dane pętle wraz ze znakami (± 1) sygnałów tych pętli w węzłach sumacyjnych;
- $L_i(s)L_j(s)L_k(s)$ – zastępcza funkcja przejścia iloczynu i -tej, j -tej oraz k -tej rozłącznej pętli analizowanego UR (trójek pętli niestykających się ze sobą) wyznaczona jako iloczyn funkcji przejścia bloków dynamicznych tworzących te pętle wraz ze znakami (± 1) sygnałów tych pętli w węzłach sumacyjnych;
- N – liczba bezpośrednich (bez zawracania) dróg przejścia od wejścia $x(t)$ do wyjścia $y(t)$ analizowanego UR;
- $P_k(s)$ – zastępcza funkcja przejścia k -tej bezpośredniej drogi przejścia od wejścia $x(t)$ do wyjścia $y(t)$ analizowanego UR wyznaczona jako iloczyn funkcji przejścia bloków dynamicznych tworzących tę drogę wraz ze znakami (± 1) sygnałów tego przejścia w węzłach sumacyjnych;
- $\Delta_k(s)$ – wyznacznik schematu blokowego dla k -tej bezpośredniej drogi przejścia zdefiniowany jak wyznacznik $\Delta(s)$ (2) przy założeniu, że pętle $L_i(s)$ są niezależne (rozłączne) od k -tej bezpośredniej drogi przejścia $P_k(s)$.

Z perspektywy analizy stabilności UR badane są miejsca zerowe wyznacznika $\Delta(s)$ (2). Jeżeli zdefiniujemy transmitancję $K(s)$ jako odpowiednią sumę kombinacji dynamik pętli tworzących UR, wówczas równanie będące podstawą analizy stabilności badanego układu przyjmuje postać:

$$\Delta(s) = 1 + K(s) = 0. \quad (3)$$

W rezultacie, dla procesu analizy stabilności, dowolny UR zawierający struktury pętlowe można sprowadzić do jednopętlowego UR, jak na rys. 1a, gdzie $H(s)$ określa funkcja przejścia:

$$H(s) = \frac{\Delta(s) - 1}{\sum_{k=1}^N P_k(s)\Delta_k(s)}.$$



Rys. 1. Schemat blokowy UR: a) ogólna struktura jednopętlowa, b) struktura z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym
Fig. 1. Block diagram of the control system: (a) general single-loop structure, (b) structure with single negative feedback

W szczególnym przypadku, dla $F(s) = K(s)$, prezentowana struktura UR (rys. 1a) sprowadza się do klasycznej struktury UR z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym (rys. 1b).

W ogólności, definiując wypadkową transmitancję $K(s) = F(s)H(s)$ jako operatorową funkcję wymierną właściwą ($m \leq n$):

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (4)$$

stabilność struktur UR pokazanych na rys. 1 można badać przez analizę miejsc zerowych równania charakterystycznego powstałego bezpośrednio z przekształcenia równania (3):

$$\chi(s) = M(s) + L(s) = 0, \quad (5)$$

gdzie $\chi(s)$ jest wielomianem charakterystycznym stopnia n badanego UR.

W ogólnym przypadku jednak określenie zer równania (5) oraz ich analiza może być zadaniem bardzo trudnym na przykład ze względu na wysoki stopień wielomianu $\chi(s)$. Z tego też powodu opracowano mnóstwo różnych metod umożliwiających pośrednią analizę właściwości zer równania charakterystycznego bez ich znajomości. Wśród tych metod najczęściej spotykane są dwie grupy: metody algebraiczne (kryt. Hurwitza, kryt. Rutha) [5, 14–20] oraz graficzne (met. linii pierwiastkowych, kryt. Nyquista) [5, 14–21]. Z perspektywy prezentowanej w artykule metody, umożliwiającej analizę stabilności UR z czasem opóźnienia, bliżej przedstawione zostanie kryterium Nyquista.

2.1. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista, bazujące na zasadzie przyrostu argumentu funkcji zespolonej, pozwala określić warunki stabilności UR z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (rys. 1). W tym celu wymagane jest zdefiniowanie transmitancji widmowej $K(j\omega)$ dynamiki zastępczej struktury pętlowej analizowanego UR, która łączy się z transmitancją operatorową $K(s)$ zależnością [14, 16, 18, 19, 21]:

$$K(j\omega) = K(s) \big|_{s=j\omega}. \quad (6)$$

Zgodnie z zasadą argumentu [5, 14–17, 19–21] funkcji zespolonej przyrost/zmiana argumentu funkcji $\Delta(s)$ w kierunku ujemnym matematycznie wzdłuż konturu krzywej zamkniętej D obejmującej całą prawą otwartą półpłaszczyznę (POP) zmiennej „ s ”, na której nie leżą żadne zera ani bieguny funkcji, równy jest krotności wartości -2π równej różnicy Z i P :

$$\Delta \arg_{s \sim D} \{\Delta(s)\} = \Delta \arg_{\omega \sim 0 \rightarrow \infty} \{1 + K(j\omega)\} = -2\pi(Z - P), \quad (7)$$

gdzie Z określa sumę krotności zer funkcji $\Delta(s)$ (zer wielomianu charakterystycznego $\chi(s)$) w POP oraz P określa sumę krotności biegunów funkcji $\Delta(s)$ (niestabilnych biegunów transmitancji $K(s)$) w POP.

W rezultacie analizy powyższej zależności można stwierdzić, że warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności pętli UR (rys. 1) jest aby wszystkie zera wielomianu charakterystycznego leżały w lewej otwartej półpłaszczyźnie (LOP) zmiennej zespolonej „ s ” (liczba zer wielomianu charakterystycznego w POP była zerowa – $Z = 0$). Można zatem, wykorzystując przyrost argumentu funkcji $\Delta(s)$, zdefiniować poniższe kryterium stabilności UR o strukturze zamkniętej.

Twierdzenie 1 – kryterium stabilności Nyquista

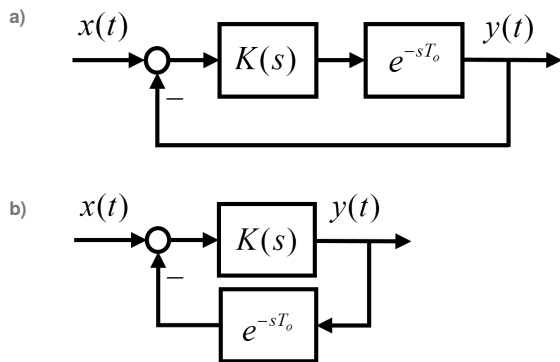
Układ regulacji z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym (rys. 1b) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka Nyquista funkcji przejścia „układu otwartego” $K(s)$ (powstałego przez „przerwanie” pętli sprzężenia zwrotnego) nie przechodzi przez punkt $(-1, 0)$, a liczba okrążeń punktu $(-1, 0)$ przez hodograf Nyquista w kierunku dodatnim matematycznie (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) jest równa liczbie P niestabilnych biegunów ($\Re\{s_j\} > 0$) funkcji

$K(s)$ (leżących w prawej otwartej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej „ s ”):

$$\Delta \arg \left\{ 1 + K(j\omega) \right\}_{\omega \rightarrow \pm\infty} = 2\pi P. \quad (8)$$

3. Układ regulacji z czasem opóźnienia T_o

W przypadku UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$ problem badania stabilności jest bardziej skomplikowany. Sam fakt uwzględnienia czasu opóźnienia w modelu dynamicznym UR może mieć różne przyczyny. Z jednej strony pojawienie się czasu opóźnienia T_o może być skutkiem uproszczenia procesu modelowania, w którym czas opóźnienia uwzględnia pominęte dynamiki procesu regulacji [4–6]. W takim przypadku człon opóźniający często pojawia się w torze głównym dynamiki pętli UR (rys. 2a). Czas opóźnienia może również być efektem natury technicznej toru pomiarowego lub w ten sposób uwzględniać czas opóźnienia wynikający z procesu próbkowania w dyskretnym UR, w którym pomiar wielkości wyjściowej $y(t)$ UR odbywa się z opóźnieniem [11, 15–17, 22]. W przypadku takim, w sposób naturalny, dynamika opóźnienia w czasie uwzględniana jest w sprzężeniu zwrotnym (rys. 2b).



Rys. 2. Schemat UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$: a) w torze głównym, b) w pętli sprzężenia zwrotnego

Fig. 2. Diagram of the control system with delay time $T_o > 0$: (a) in the main path, (b) in the feedback loop

Dla tak zdefiniowanych UR wyznacznik $\Delta(s)$, umożliwiający określenie warunków stabilności, przyjmuje postać:

$$\Delta(s) = 1 + K(s)e^{-sT_o} = 0. \quad (9)$$

Podobnie jak dla UR bez czasu opóźnienia o stabilności UR decyduje położenie zer równania (9), które pokrywają się z zerami quasi-wielomianu charakterystycznego:

$$\chi(s, T_o) = M(s) + L(s)e^{-sT_o} = 0. \quad (10)$$

Niestety w powyższym przypadku rozwiązanie równania (10) zawiera nieskończenie wiele miejsc zerowych [8]. W konsekwencji stosowanie metod algebraicznych typu kryterium Hurwitza czy metody linii pierwiastkowych Evansa jest praktycznie niemożliwe. W szczególnych przypadkach, dla których część funkcji przejścia dotyczącą czasu opóźnienia przedstawimy w postaci funkcji wymiernej [10, 15, 16, 23] lub bezpośrednio szeregu i -tego stopnia, można równanie charakterystyczne (10) przybliżyć równaniem algebraicznym [16, 24]:

$$M(s) + L(s) \left(1 + \frac{(-sT_o)}{1!} + \dots + \frac{(-sT_o)^i}{i!} \right) = 0. \quad (11)$$

Pamiętać jednak należy, że tego rodzaju postępowanie może doprowadzić do fałszywych wniosków dotyczących stabilności analizowanego UR.

Istnieją również metody umożliwiające analizę stabilności układów o równaniu charakterystycznym (10). Wśród nich można wyróżnić kryterium Michajłowa [8, 18, 21, 24] czy przytoczone wcześniej kryterium Nyquista. Są to jednak kryteria graficzne, które przez analizę odpowiednich krzywych umożliwiają wnioskowanie o stabilności UR. W dalszej części przedstawiona zostanie metoda bazująca na modyfikacji kryterium Nyquista, która umożliwia analityczne badanie warunków stabilności UR z opóźnieniem.

Na potrzeby prezentowanej modyfikacji wprowadzmy wielkość charakteryzującą transmitancję $K(s)$ dynamiki zastępczej pętli analizowanego UR (rys. 2), która może być interpretowana jako wzmocnienie wysokoczęstotliwościowe tej transmitancji:

$$k_\infty = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} K(s). \quad (12)$$

Dodatkowo przez $G(s)$ oznaczmy operatorową funkcję przejścia „układu otwartego” (UO) dynamiki analizowanej pętli UR, składającą się z szeregowego połączenia transmitancji $K(s)$ oraz członu opóźnienia czasowego:

$$G(s) = K(s)e^{-sT_o}. \quad (13)$$

Na podstawie analizy właściwości kryterium Nyquista (Twierdzenie 1) łatwo pokazać, że charakterystyka Nyquista funkcji przejścia układu otwartego $G(s)$ może co najwyżej P -krotnie okrążyć punkt $(-1, 0)$ i to w kierunku dodatnim matematycznie. Okazuje się, że analiza UR (rys. 2) pod kątem wartości wzmocnienia wysokoczęstotliwościowego k_∞ (12), transmitancji $K(s)$ operatorowej funkcji przejścia $G(s)$, umożliwia wstępną selekcję pozwalającą na odrzucenie wariantów strukturalnie niestabilnych w przypadku pojawienia się czasu opóźnienia $T_o > 0$.

3.1. UR z czasem opóźnienia strukturalnie niestabilne – wariant 1

Pierwszą grupą układów strukturalnie niestabilnych dla dowolnego czasu opóźnienia T_o są układy, których część transmitancyjna $K(s)$ charakteryzuje się wzmocnieniem wysokoczęstotliwościowym $|k_\infty| > 1$.

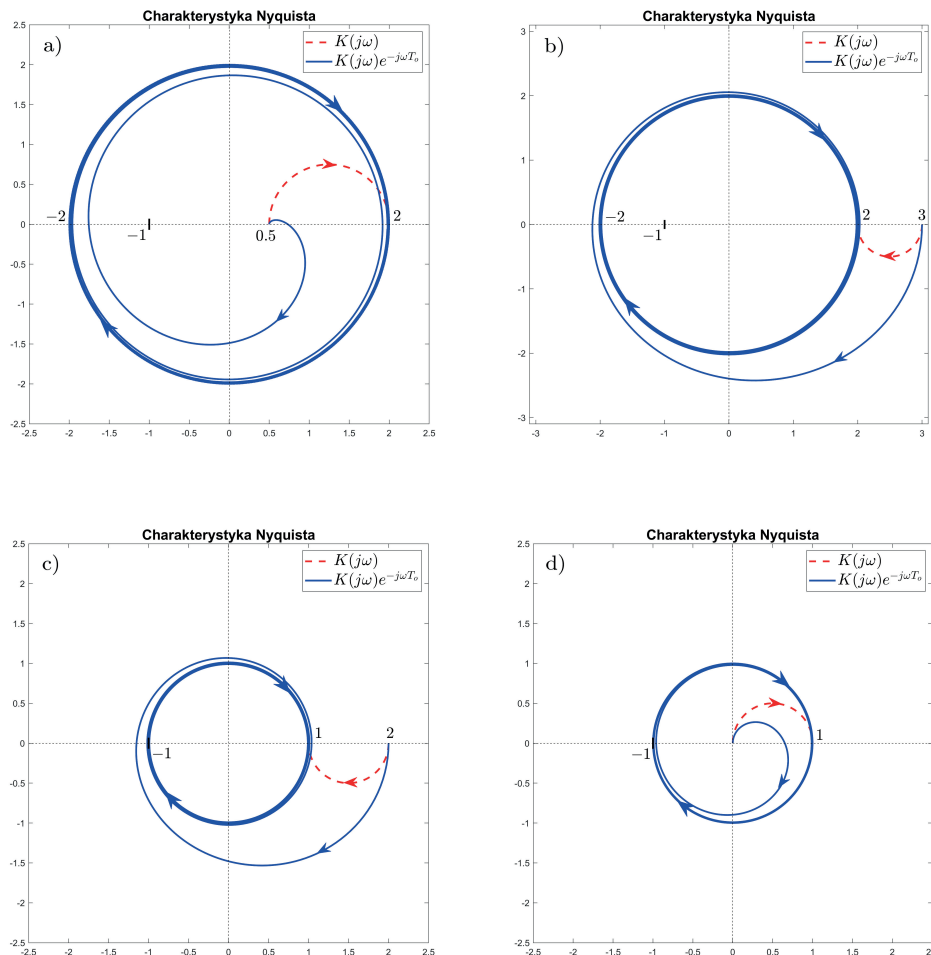
Rozważmy przypadek UR, dla którego dynamika UO określona jest funkcją przejścia $G(s)$:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s+2} e^{-sT_o}. \quad (14)$$

Analizując tylko część transmitancyjną łatwo pokazać, że dla $T_o = 0$ analizowany UR jest stabilny (przyrost argumentu funkcji $K(j\omega)$ wokół punktu $(-1, 0)$ wynosi zero). Natomiast analizując charakterystykę Nyquista tego układu (rys. 3a) łatwo zauważyć, że dla dużych pulsacji ω charakterystyka „nawija się od wewnątrz” na krzywą będącą okręgiem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $k_\infty = 2$. W rezultacie charakterystyka ta okrąży punkt $(-1, 0)$ nieskończenie wiele razy w kierunku ujemnym (przyrost argumentu funkcji $G(j\omega) = K(j\omega)e^{-j\omega T_o}$ wokół punktu $(-1, 0)$ wynosi minus nieskończoność). Z analizy równania (7) opisującego zasadę argumentu można wnioskować, że UR z funkcją przejścia $G(s)$ (14) ma nieskończenie wiele niestabilnych biegunów ($Z = \infty$) i w rezultacie jest niestabilny dla dowolnego $T_o > 0$.

W kolejnym wariantcie przeanalizujemy przypadek UR, dla którego UO określony jest funkcją przejścia $G(s)$:

$$G(s) = \frac{2s+3}{s+1} e^{-sT_o}. \quad (15)$$



Rys. 3. Charakterystyki Nyquista dynamik pętli analizowanych UR z opóźnieniem $T_o > 0$:
a) dla dynamiki (14) z $k_\infty > 1$,
b) dla dynamiki (15) z $k_\infty > 1$,
c) dla dynamiki (16) z $k_\infty = 1$,
d) dla dynamiki (17) z $k_\infty = 1$

Fig. 3. Nyquist characteristics of the loop dynamics of the analyzed control systems with delay time $T_o > 0$:
(a) for the dynamics (14) with $k_\infty > 1$,
(b) for the dynamics (15) with $k_\infty > 1$,
(c) for the dynamics (16) with $k_\infty = 1$,
(d) for the dynamics (17) with $k_\infty = 1$

Podobnie jak w przypadku układu wcześniejszego, dla $T_o = 0$ analizowany UR jest stabilny (przyrost argumentu funkcji $K(j\omega)$ wokół punktu $(-1, 0)$ wynosi zero). Analizując charakterystykę $G(j\omega)$ tego układu (rys. 3b) można zauważyć, że dla dużych pulsacji ω charakterystyka „nawija się od zewnątrz” na krzywą będącą okręgiem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $k_\infty = 2$. W rezultacie, podobnie jak w przypadku układu wcześniejszego, charakterystyka ta okrąży punkt $(-1, 0)$ nieskończenie wiele razy w kierunku ujemnym. Z analizy równania (7), opisującego zasadę argumentu, można wnioskować, że UR z funkcją przejścia $G(s)$ (15) ma także nieskończenie wiele niestabilnych biegunów ($Z = \infty$) i w rezultacie jest niestabilny dla dowolnego czasu opóźnienia $T_o > 0$.

3.2. UR z czasem opóźnienia strukturalnie niestabilne – wariant 2

Kolejną grupą układów, niestabilnych dla dowolnego czasu opóźnienia T_o , są układy, których część transmitancyjna $K(s)$ charakteryzuje się wzmocnieniem wysokoczęstotliwościowym $|k_\infty| = 1$.

W pierwszym wariancie rozpatrzmy UR o dynamice $G(s)$ określonej funkcją przejścia:

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1} e^{-sT_o}. \quad (16)$$

Analiza części transmitancyjnej (czerwona charakterystyka Nyquista na rysunku 3c) pozwala wnioskować, że UR (rys. 2) z dynamiką toru głównego $G(s)$ (16), przy braku opóźnienia ($T_o = 0$), stanowi strukturę stabilną asymptotycznie. Jednak dla dowolnego $T_o > 0$ charakterystyka Nyquista funkcji przejścia $G(s)$ (16), przy dużych wartościach pulsacji ω „nawija się od zewnątrz” w kierunku ujemnym matematycznie na

krzywą będącą okręgiem jednostkowym. Sytuacja ta, podobna do przypadków pokazanych wcześniej, pozwala wnioskować, że charakterystyka amplitudowo-fazowa $G(j\omega)$ nieskończenie wiele razy okrąży punkt $(-1, 0)$. W rezultacie, podobnie jak w przykładach wcześniejszych, także ten wariant UR jest niestabilny dla dowolnego czasu opóźnienia $T_o > 0$.

Drugim, rozpatrywanym wariantem tej grupy UR niech będzie układ o dynamice UO pętli zdefiniowanej przez operatorową funkcję przejścia:

$$G(s) = \frac{s}{s+1} e^{-sT_o}. \quad (17)$$

W tym przypadku również, jak w przykładach wcześniejszych, UR przy $T_o = 0$ stanowi strukturę asymptotycznie stabilną. Jednak uwzględniając dowolny czas opóźnienia $T_o > 0$, z analizy charakterystyki Nyquista (rys. 3d) wynika, że dla dużych wartości pulsacji ω funkcja $G(j\omega)$ „nawija się od wewnątrz” na okrąg jednostkowy. Co prawda nie można stwierdzić, jak wcześniej, że charakterystyka amplitudowo-fazowa funkcji przejścia $G(s)$ (17) obejmuje punkt $(-1, 0)$. Jednak zaistniałą sytuację należy interpretować jako przypadek, gdy funkcja $G(j\omega)$ nieskończenie wiele razy przechodzi przez punkt $(-1, 0)$. Przypadek ten z perspektywy analizy stabilności układu sterowania o strukturze zamkniętej (rys. 2) należy interpretować jako wariant układu niestabilnego (można pokazać, że w takim przypadku układ ten ma nieskończenie wiele biegunów o zerowej części rzeczywistej $\Re\{s_i\} = 0$).

3.3. UR z czasem opóźnienia warunkowo stabilne

Trzecią i ostatnią grupą UR z czasem opóźnienia T_o są układy, których część transmitancyjna $K(s)$ charakteryzuje się wzmocnieniem wysokoczęstotliwościowym $|k_\infty| < 1$.

W pierwszym przykładzie tej grupy układów rozważmy funkcję przejścia $G(s)$ składającą się z transmitancji $K(s)$ typu inercja pierwszego rzędu oraz członu z opóźnieniem T_o :

$$G(s) = \frac{2}{s+1} e^{-sT_o}. \quad (18)$$

W układzie tym część transmitancyjna funkcji $G(s)$ ma wzmocnienie wysokoczęstotliwościowe $k_\infty = 0$. Z analizy klasycznego kryterium stabilności Nyquista wynika, że UR (rys. 2) jest stabilny przy braku opóźnienia ($T_o = 0$). Potwierdza to również analiza charakterystyki Nyquista części transmitancyjnej $K(s)$ funkcji przejścia $G(s)$ (rys. 4a-b). Natomiast pojawienie się, w rozpatrywanym układzie, czasu opóźnienia $T_o > 0$ prowadzi do powstania dwóch rodzajów UR: stabilnego oraz niestabilnego. Dla przykładu, przy $T_o = 1$ UR jest stabilny (charakterystyka Nyquista $G(s)$ na rys. 4a nie obejmuje punktu $(-1, 0)$). Z drugiej jednak strony dla $T_o = 2$ (rys. 4b) charakterystyka ta obejmuje punkt $(-1, 0)$, co w konsekwencji analizy stabilności z wykorzystaniem kryterium Nyquista, pozwala wnioskować o niestabilności analizowanego UR. Można zatem uważać, że analizowany UR, dla pewnych wartości czasu opóźnienia $T_o > 0$ będzie stabilny, natomiast dla innych niestabilny. Definiując odpowiednie warunki dotyczące wartości czasu opóźnienia T_o można wnioskować, że struktura UR (rys. 2) z dynamiką $G(s)$ (18) jest warunkowo stabilna.

Kolejny przykład UR, analizowanej grupy transmitancji z opóźnieniem, składa się z niestabilnej transmitancji pierwszego rzędu $K(s)$ oraz członu z opóźnieniem T_o :

$$G(s) = \frac{2}{s-1} e^{-sT_o}. \quad (19)$$

Ogólna analiza stabilności UR z częścią transmitancyjną klasy jak w (19) pokazuje, że badany UR przy braku opóźnienia ($T_o = 0$) jest warunkowo stabilny (jest stabilny, jeżeli wzmocnienie transmitancji $k > 1$). W rozpatrywanym wariancie transmitancji $K(s)$ wartość tego wzmocnienia wynosi $k = 2$. W rezultacie analizowany UR (rys. 2), przy braku opóźnienia, jest układem stabilnym, co także potwierdza analiza charakterystyki Nyquista $K(s)$ pokazana na rys. 4c-d. Natomiast uwzględniając w analizowanym UR czas opóźnienia $T_o > 0$ można, podobnie jak w przykładzie wcześniejszym, zaobserwować wariant stabilny oraz niestabilny analizowanego układu. Przykładowo dla czasu opóźnienia $T_o = 0,5$ (rys. 4c) charakterystyka Nyquista funkcji $G(s)$ (19) obejmuje punkt $(-1, 0)$, a hodograf Nyquista okrąży ten punkt jednokrotnie w kierunku dodatnim matematycznie

$$\Delta \arg \left\{ 1 + K(j\omega) e^{-j\omega T_o} \right\} = 2\pi,$$

co pozwala wnioskować, że analizowany UR jest stabilny. Natomiast dla czasu opóźnienia $T_o = 1$ (rys. 4d) charakterystyka Nyquista funkcji $G(s)$ (19) także obejmuje punkt $(-1, 0)$, a hodograf Nyquista okrąży ten punkt jednokrotnie w kierunku ujemnym matematycznie

$$\Delta \arg \left\{ 1 + K(j\omega) e^{-j\omega T_o} \right\} = -2\pi.$$

W tym przypadku analizowany UR (rys. 2), zgodnie z kryterium Nyquista, jest niestabilny. W rezultacie, podobnie jak w przykładzie wcześniejszym, definiując odpowiednie warunki dotyczące wartości czasu opóźnienia T_o można wnioskować, że struktura UR (rys. 2) z dynamiką $G(s)$ (19) jest warunkowo stabilna.

Następny przykład UR, analizowanej grupy transmitancji z opóźnieniem, dla których $|k_\infty| < 1$, składa się z operatorowej funkcji przejścia $G(s)$:

$$G(s) = \frac{s+2}{2s+1} e^{-sT_o}. \quad (20)$$

Wartość wzmocnienia części transmitancyjnej funkcji $G(s)$, w analizowanym przykładzie, wynosi $k_\infty = 0,5$. Analiza $K(s)$ pokazuje, że UR (rys. 2), przy braku opóźnienia $T_o = 0$, jest układem stabilnym (rys. 4e-f). Uwzględnienie czasu opóźnienia $T_o > 0$, podobnie jak w przykładach wcześniejszych, prowadzi do powstania UR stabilnego lub niestabilnego w zależności od wartości czasu opóźnienia. Przykładowo dla $T_o = 1$ (rys. 4e), charakterystyka Nyquista funkcji $G(s)$ (20) nie obejmuje punktu $(-1, 0)$ i zgodnie z kryterium stabilności Nyquista powstały UR jest stabilny. Natomiast dla przykładowego czasu opóźnienia $T_o = 3$ (rys. 4f) charakterystyka Nyquista funkcji przejścia (20) obejmuje punkt $(-1, 0)$ co pozwala wnioskować, za kryterium Nyquista, o niestabilności takiego UR. W konsekwencji, podobnie jak w przykładach wcześniejszych, definiując dla analizowanego przypadku odpowiednie warunki dotyczące wartości czasu opóźnienia T_o można wnioskować, że struktura UR (rys. 2) z dynamiką $G(s)$ (20) jest warunkowo stabilna.

Analizując przedstawione przykłady UR z opóźnieniem można określić następujące wymagania dotyczące warunku koniecznego stabilności układu z opóźnieniem:

Warunek konieczny stabilności UR z czasem opóźnienia

Warunkiem koniecznym stabilności UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$, o strukturze jak na rys. 2, jest aby część transmitancyjna funkcji przejścia $G(s)$ (13) opisana funkcją $K(s)$ spełniała warunek:

$$\left| \lim_{s \rightarrow +\infty} K(s) \right| < 1. \quad (21)$$

Przedstawiona, w powyższych przykładach, analiza stabilności UR wykorzystująca kryterium Nyquista, wymaga analizy graficznej odpowiednich krzywych (charakterystyk Nyquista) funkcji przejścia ($K(s)$ lub $G(s)$) UO analizowanego UR. Poniżej przedstawiony zostanie wariant rozszerzenia i modyfikacji warunków stabilności graficznego kryterium Nyquista UR z czasem opóźnienia $T_o \geq 0$ na mechanizm algebraiczny w postaci analogu kryterium Nyquista.

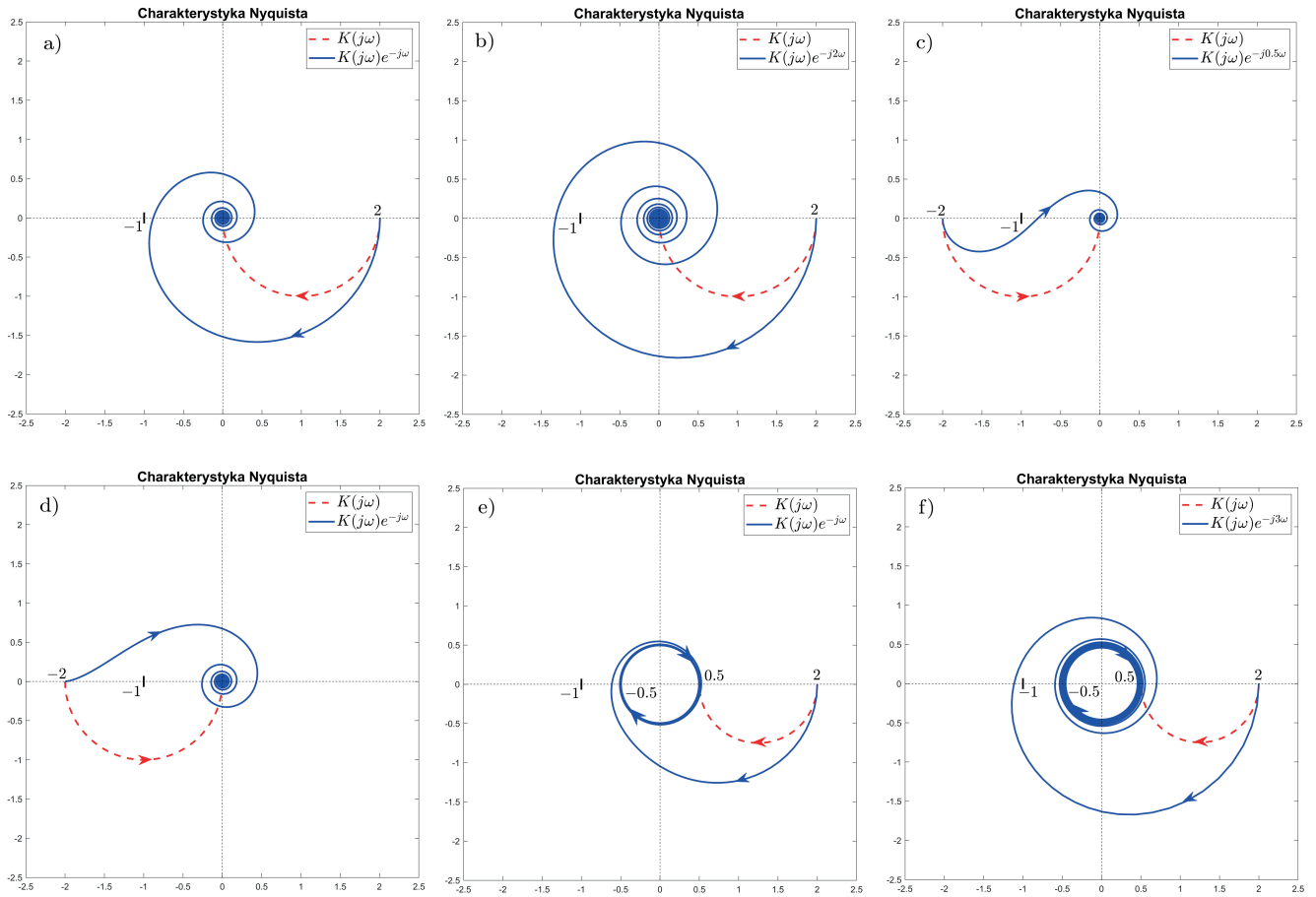
4. Analog kryterium Nyquista

Uwzględniając powyższy warunek konieczny stabilności UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$ oraz dodatkowe warunki dotyczące stabilnych oraz niestabilnych rozwiązań równań różniczkowych z opóźnieniem [9], można zdefiniować wymagania dotyczące części transmitancyjnej $K(s)$ określonej operatorową funkcją wymierną (4).

Warunkiem stosowania analogu kryterium Nyquista, do badania stabilności UR z czasem opóźnienia, są wymagania dotyczące właściwości transmitancji $K(s)$ UO:

- transmitancja $K(s)$ jest funkcją wymierną właściwą lub ściśle właściwą ($m \leq n$);
- jeżeli $m = n$, to $\left| \frac{b_m}{a_n} \right| = |k_\infty| < 1$;
- wielomiany $L(s)$ oraz $M(s)$ nie mają wspólnych czysto urojonych miejsc zerowych ($s_i = j\omega$);
- zachodzi $a_0 + b_0 = M(0) + L(0) \neq 0$ (lub równoważnie $K(0) \neq -1$) – wielomian charakterystyczny $\chi(s) = \chi(s, T_o)$ dla $T_o = 0$ nie ma pierwiastka zerowego ($s_i = 0$ – na granicy stabilności).

Pierwszym krokiem, w procesie analizy stabilności, jest określenie warunków wystąpienia przypadku granicznego, w którym analizowany UR będzie znajdował się na granicy stabilności. Podobnie jak analiza stabilności UR, tak i analiza przypadku granicy stabilności bazuje na wyznaczniku $\Delta(s)$ (9) badanego układu.



Rys. 4. Charakterystyki Nyquista dynamik pętli analizowanych UR z opóźnieniem $T_o > 0$ przy $k_\infty < 1$: a) dla dynamiki (18) przy $T_o = 1$, b) dla dynamiki (18) przy $T_o = 2$, c) dla dynamiki (19) przy $T_o = 0,5$, d) dla dynamiki (19) przy $T_o = 1$, e) dla dynamiki (20) przy $T_o = 1$, f) dla dynamiki (20) przy $T_o = 3$

Fig. 4. Nyquist characteristics of the loop dynamics of the analyzed control systems with delay time $T_o > 0$ at $k_\infty < 1$: (a) for the dynamics (18) at $T_o = 1$, (b) for the dynamics (18) at $T_o = 2$, (c) for the dynamics (19) at $T_o = 0,5$, (d) for the dynamics (19) at $T_o = 1$, (e) for the dynamics (20) at $T_o = 1$, (f) for the dynamics (20) at $T_o = 3$

Zakładając, że część transmitancyjna $K(s)$ analizowanego UR (rys. 2) spełnia powyższe wymagania, można równanie (9) związane z wyznacznikiem $\Delta(s)$ przekształcić do postaci:

$$K(s)e^{-sT_o} = -1. \quad (22)$$

Uwzględniając podstawienie $s = j\omega$, podobnie jak w (6), otrzymujemy postać powyższego równania wiążącą informację o transmitancji widmowej $K(j\omega)$:

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = e^{j(-\pi + \omega T_o)}, \quad (23)$$

gdzie $K(\omega) = |K(j\omega)|$ oraz $\varphi(\omega) = \arg\{K(j\omega)\}$ to odpowiednio moduł oraz argument transmitancji widmowej $K(j\omega)$ [18].

4.1. Granica stabilności UR bez czasu opóźnienia

Analiza granicy stabilności nawiązuje bezpośrednio do Twierdzenia 1 określającego warunki stabilności kryterium Nyquista. W przypadku UR, w których nie występuje czas opóźnienia ($T_o = 0$), równanie (23) przyjmuje postać:

$$K(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = e^{-j\pi}. \quad (24)$$

Uwzględniając zależność wiążącą funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej z funkcją wykładniczą zmiennej zespolonej (związek między postacią wykładniczą i trygonometryczną liczby zespolonej) dla prawej strony równania (24):

$$e^{-j\pi} = \cos(-\pi) + j\sin(-\pi) = -1 + j0, \quad (25)$$

można granicę stabilności UR zdefiniować jako przypadek, w którym charakterystyka Nyquista transmitancji $K(s)$ przechodzi przez punkt $(-1, 0)$. W rezultacie można zdefiniować pulsację graniczną ω^* , stanowiącą rozwiązanie równania (24), dla której zachodzi:

$$\forall_{\omega^* > 0} K(j\omega^*) = -1 + j0. \quad (26)$$

Wśród wszystkich pulsacji $\omega^* > 0$ jedynie pulsacje, dla których $\Im\{\omega^*\} = 0$ nazywamy pulsacjami granicznymi analizowanego UR.

Z analizy (26) można pokazać, że w przypadku granicznym stabilności UR, dla pulsacji granicznej ω^* , moduł oraz argument transmitancji widmowej $K(j\omega)$ spełniają zależności:

$$\omega^* : K(\omega^*) = 1, \quad \varphi(\omega^*) = -\pi. \quad (27)$$

Jednocześnie wielomian charakterystyczny $\chi(s)$ (5), ma parę pierwiastków zespolonych sprzężonych $s_{1,2} = \pm j\omega^*$ ulokowanych na osi urojonej płaszczyzny Gaussa (na granicy stabilności: $\Re\{s_{1,2}\} = 0$).

Uwzględniając powyższą analizę można kryterium stabilności Nyquista przedstawić następująco:

Układ regulacji z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym (rys. 2) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pulsacji ω_π (pulsacji odcięcia fazy/argumentu, fazowej częstotliwości przejścia (ang. *phase crossover frequency*) [4, 15, 17, 19, 21, 25]) zachodzi:

$$\omega_\pi : \varphi(\omega_\pi) = -\pi, \quad K(\omega_\pi) \neq 1$$

lub dla pulsacji ω_c (pulsacji odcięcia modułu/wzmocnienia, modułowej częstotliwości przejścia (ang. *gain crossover frequency*) [4, 15, 17, 19–21, 25]) zachodzi:

$$\omega_c : K(\omega_c) = 1, \quad \varphi(\omega_c) \neq -\pi,$$

oraz liczba okrążeń punktu $(-1, 0)$ przez hodograf Nyquista, w kierunku dodatnim matematycznie, jest równa liczbie P niestabilnych biegunów ($\Re\{s_i\} > 0$) transmitancji $K(s)$:

$$\Delta \arg \left\{ 1 + K(j\omega) \right\}_{\omega=0}^{\omega=\infty} = 2\pi P.$$

Warto także zauważyć, że w przypadku granicznym stabilności zachodzi: $\omega_\pi = \omega_c = \omega^*$.

4.2. Granica stabilności UR z czasem opóźnienia T_o

W przypadku analizy granicy stabilności UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$ proces rozszerzenia przedstawionej analizy, dla UR bez czasu opóźnienia, przebiega analogicznie. Uwzględniając zależność wiążącą postać wykładniczą i trygonometryczną prawej strony równania (23):

$$e^{j(-\pi + \omega T_o)} = -\cos(\omega T_o) - j \sin(\omega T_o) \quad (28)$$

zdefiniujemy trajektorię graniczną na płaszczyźnie zespolonej $K(j\omega)$. Trajektorja ta, opisana zależnością (28), przyjmuje postać okręgu jednostkowego powstałego przez wirowanie wektora zaczepionego w punkcie $(0, 0)$ w kierunku dodatnim matematycznie (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) począwszy od punktu $(-1, 0)$ dla $\omega = 0$.

Dla tak zdefiniowanej trajektorii granicznej na płaszczyźnie $K(j\omega)$, przez wariant graniczny stabilności UR z czasem opóźnienia, definiować będziemy przypadek, w którym dla pulsacji granicznych ω^* zachodzi równość:

$$\forall_{\omega^* > 0} K(j\omega^*) = -\cos(\omega^* T_o^*) - j \sin(\omega^* T_o^*), \quad (29)$$

gdzie T_o^* określa graniczną wartość czasu opóźnienia, dla którego quasi-wielomian $\chi(s, T_o)$ (10) ma parę pierwiastków zespolonych sprzężonych $s_{1,2} = \pm j\omega^*$ (na granicy stabilności: $\Re\{s_{1,2}\} = 0$). Podobnie jak wcześniej, jedynie pulsacje $\omega^* > 0$, dla których zachodzi $\Im\{\omega^*\} = 0$ nazywamy pulsacjami granicznymi analizowanego UR.

Jednocześnie moduł oraz argument transmitancji widmowej $K(j\omega)$ spełniają zależności:

$$\omega^* : K(\omega^*) = 1, \quad \varphi(\omega^*) = -\pi + \omega^* T_o^*. \quad (30)$$

Uwzględniając powyższą analizę, podobnie jak dla UR bez czasu opóźnienia, można analog kryterium stabilności Nyquista przedstawić następująco:

Układ regulacji z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym oraz czasem opóźnienia $T_o > 0$ (rys. 2) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pulsacji ω_π zachodzi:

$$\omega_\pi : \varphi(\omega_\pi) = \omega_\pi T_o - \pi, \quad K(\omega_\pi) \neq 1 \quad (31)$$

lub dla pulsacji ω_c zachodzi:

$$\omega_c : K(\omega_c) = 1, \quad \varphi(\omega_c) \neq \omega_c T_o - \pi, \quad (32)$$

oraz liczba okrążeń punktów $(-\cos(\omega^* T_o^*), -\sin(\omega^* T_o^*))$ przez hodograf Nyquista, w kierunku dodatnim matematycznie, jest równa liczbie P niestabilnych biegunów transmitancji $K(s)$ ($\Re\{s_i\} > 0$):

$$\sum_{\omega^*} \Delta \arg \left\{ e^{j\omega^* T_o} + K(j\omega) \right\}_{\omega=0}^{\omega=\infty} = 2\pi P, \quad (33)$$

pod warunkiem, że $T_o < \bar{T}_o^*$, gdzie $\bar{T}_o^*$ jest wartością krytyczną czasu opóźnienia, powyżej której UR jest zawsze bezwarunkowo niestabilny.

W prezentowanym mechanizmie analizy stabilności UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$ krytycznym jest określenie par wartości $\{\omega^*, T_o^*\}$ bezpośrednio związanych z granicą stabilności analizowanego UR.

4.2.1. Pulsacja graniczna ω^* i graniczny czas opóźnienia T_o^*
Z przypadkiem UR na granicy stabilności bezpośrednio związana jest wartość pulsacji granicznej (27)(30). W przypadku UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$ pulsacja graniczna ω^* jest wartością pulsacji ω miejsca geometrycznego przecięcia charakterystyki amplitudowo-fazowej (ch-ki Nyquista) transmitancji widmowej $K(j\omega)$ z trajektorią graniczną opisaną zależnością (28). Wartości pulsacji granicznych można wyliczyć rozwiązując poniższe równanie dotyczące warunku modułu wynikające bezpośrednio z (30):

$$\omega^* : K(\omega^*) = 1 \rightarrow |L(j\omega^*)| = |M(j\omega^*)|. \quad (34)$$

Graniczny czas opóźnienia T_o^* określa natomiast wartość czasu opóźnienia T_o dla danej pulsacji granicznej ω^* , dla którego UR znajduje się na granicy stabilności (29):

$$1 + K(j\omega^*)e^{-j\omega^* T_o^*} = 0, \quad (35)$$

oraz po przekroczeniu którego UR traci lub odzyskuje stabilność (dwa bieguny $s_{1,2} = \pm j\omega^*$ przechodzą na POP lub LOP zmiennej „s”).

Uwzględniając zależności:

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (36)$$

$$e^{-j\omega T_o} = \cos(\omega T_o) - j \sin(\omega T_o), \quad (37)$$

gdzie $P(\omega) = \Re\{K(j\omega)\}$ oraz $Q(\omega) = \Im\{K(j\omega)\}$ [18], warunek (35) można zapisać w postaci równoważnej:

$$\begin{cases} 1 + P(\omega^*) \cos(\omega^* T_o^*) + Q(\omega^*) \sin(\omega^* T_o^*) = 0 \\ -P(\omega^*) \sin(\omega^* T_o^*) + Q(\omega^*) \cos(\omega^* T_o^*) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań, względem T_o^* , prowadzi do zależności:

$$\begin{cases} \sin(\omega^* T_o^*) = \frac{-Q(\omega^*)}{P(\omega^*)^2 + Q(\omega^*)^2} = \frac{-Q(\omega^*)}{K(\omega^*)^2} \\ \cos(\omega^* T_o^*) = \frac{-P(\omega^*)}{P(\omega^*)^2 + Q(\omega^*)^2} = \frac{-P(\omega^*)}{K(\omega^*)^2} \end{cases} \quad (39)$$

Uwzględniając fakt okresowości funkcji $\sin(x)$ oraz $\cos(x)$ łatwo zauważyć, że dla danej pulsacji ω^* istnieje nieskończenie wiele wartości T_o^* spełniających układ równań (39), dla których istnieją czysto urojone pierwiastki równania (29) (lub w postaci równoważnej (35)).

Wartość granicznego czasu opóźnienia T_o^* , dla danej pulsacji granicznej ω^* , można wyznaczyć z warunku argumentu (30):

$$\varphi(\omega^*) = -\pi + \omega^* T_o^* \rightarrow T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega^*)}{\omega^*}. \quad (40)$$

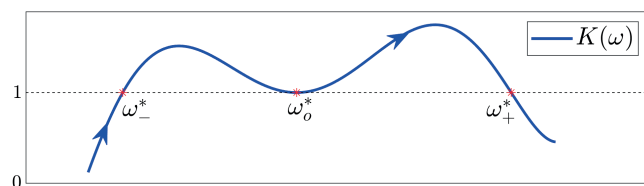
Z analizy trajektorii granicznej (28) oraz układu równań (39) łatwo pokazać, że jeżeli T_o^* (40) jest rozwiązaniem równania (29) dla pewnej ω^* to również

$$T_{o,k}^* = T_o^* + \frac{2\pi}{\omega^*} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (41)$$

jest rozwiązaniem tego równania dla tej pulsacji granicznej ω^* .

4.2.2. Rodzaj pulsacji granicznej

W ogólnym przypadku równanie (34) może mieć więcej niż jedno rozwiązanie rzeczywiste ($\omega^* > 0$). Różne wartości pulsacji granicznych ω^* , wraz z odpowiadającym im granicznym czasem opóźnienia $T_{o,k}^*$, określają punkty graniczne przejścia pary pierwiastków $s_{1,2} = \pm j\omega^*$ z obszaru LOP na POP zmiennej zespolonej „s” lub odwrotnie. Generalnie analiza kierunku przejścia/przecięcia charakterystyki Nyquista transmitancji $K(s)$ z trajektorią graniczną (28) pozwala określić rodzaj pulsacji granicznej. Przykładową zależność rodzaju pulsacji granicznych od charakteru przecięcia trajektorii granicznej pokazuje rys. 5.



Rys. 5. Charakter pulsacji granicznych ω^* w zależności od przejścia funkcji $K(\omega)$ przez trajektorię graniczną: ω_-^* – pulsacja „stabilizująca”, ω_o^* – pulsacja „neutralna” oraz ω_+^* – pulsacja „destabilizująca”

Fig. 5. The type of boundary frequencies ω^* depending on the direction of the transition of the function $K(\omega)$ through the boundary trajectory: ω_-^* – “stabilizing” frequency, ω_o^* – “neutral” frequency, and ω_+^* – “destabilizing” frequency

Jednokrotna pulsacja graniczna ω^*

Na potrzeby analizy kierunku zmian funkcji $K(\omega)$ względem trajektorii granicznej (28) zdefiniujemy następujący współczynnik przejścia:

$$\lambda(\omega^*) = -\operatorname{sgn} \left(\frac{d}{d\omega} K(\omega) \Big|_{\omega=\omega^*} \right), \quad (42)$$

gdzie $\operatorname{sgn}(x)$ jest funkcją signum.

W przypadku jednokrotnych pulsacji granicznych ω^* , będących rozwiązaniem równania (34) zachodzi:

- jeżeli $\lambda(\omega^*) = +1$, wówczas $\omega^* = \omega_+^*$ jest pulsacją „destabilizującą”, dla której przy przekroczeniu wartości granicznego czasu opóźnienia $T_{o,k}^*$ (wyznaczonego dla tej pulsacji granicznej) kolejna para zer $s = \pm j\omega_+^*$ quasi-wielomianu $\chi(s, T_o)$ przechodzi z lewej otwartej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej „s” na prawą otwartą półpłaszczyznę (ω_+^* : LOP-2-POP);
- jeżeli $\lambda(\omega^*) = -1$, wówczas $\omega^* = \omega_-^*$ jest pulsacją „stabilizującą”, dla której przy przekroczeniu wartości granicznego czasu opóźnienia $T_{o,k}^*$ (wyznaczonego dla tej pulsacji granicznej) kolejne zera urojone $s = \pm j\omega_-^*$ quasi-wielomianu $\chi(s, T_o)$ przechodzą z prawej otwartej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej „s” na lewą otwartą półpłaszczyznę (ω_-^* : POP-2-LOP);
- jeżeli $\lambda(\omega^*) = 0$, wówczas o właściwościach pulsacji granicznej ω^* rozstrzyga analiza wyższych pochodnych funkcji $K(\omega)$.

Wielokrotna pulsacja graniczna ω^*

W przypadku κ -krotnej pulsacji granicznej ω^* zachodzi:

$$\frac{d^i}{d\omega^i} K(\omega) \Big|_{\omega=\omega^*} = 0 : i = 1, 2, \dots, \kappa - 1, \quad (43)$$

$$\frac{d^i}{d\omega^i} K(\omega) \Big|_{\omega=\omega^*} \neq 0 : i = \kappa. \quad (44)$$

- jeżeli κ jest parzyste, wówczas $\omega^* = \omega_o^*$ jest pulsacją „neutralną”, dla której zera quasi-wielomianu $\chi(s, T_o)$ (10) nie przekraczają osi urojonej (gałęzie linii pierwiastkowych UR są styczne do tej osi w punkcie $s = \pm j\omega_o^*$ dla $T_{o,k}^*$);
- jeżeli κ jest nieparzyste, to o charakterze pulsacji granicznej ω^* rozstrzyga, podobnie jak w przypadku jednokrotnej pulsacji granicznej, współczynnik przejścia:

$$\lambda_\kappa(\omega^*) = -\operatorname{sgn} \left(\frac{d^\kappa}{d\omega^\kappa} K(\omega) \Big|_{\omega=\omega^*} \right), \quad (45)$$

gdzie dla wariantu $\kappa = 1$ zachodzi $\lambda_1(\omega^*) = \lambda(\omega^*)$ opisane zależnością (42).

Dla wyznaczonych pulsacji granicznych ω^* będących rozwiązaniem równania (34), z uwzględnieniem ich rodzaju, oraz wszystkich odpowiadających tym pulsacjom wartości granicznych czasów opóźnienia $T_{o,k}^*$ (41) należy, dla dalszej analizy stabilności UR, uszeregować wartości $T_{o,k}^*$ w następujący ciąg rosnący (z uwzględnieniem wartości 0 [7, 8]):

$$0 < T_{1\pm}^* < T_{2\pm}^* < T_{3\pm}^* < \dots < T_{i\pm}^* < \dots \quad (46)$$

gdzie

$$T_{i\pm}^* = \begin{cases} T_{i+}^* = T_{o,k}^* : \omega^* = \omega_+^* \\ T_{i-}^* = T_{o,k}^* : \omega^* = \omega_-^* \end{cases}. \quad (47)$$

4.2.3. Niestabilne pierwiastki quasi-wielomianu charakterystycznego $\chi(s, T_o)$

Analiza przedziałów czasowych uwzględniających granice zdefiniowane przez wartości graniczne czasów opóźnienia (46) umożliwia określenie zakresów wartości czasu opóźnienia T_o , dla których analizowany UR jest stabilny.

W tym celu zdefiniujemy funkcję $\Psi(T_o)$, która określa dla danego czasu opóźnienia T_o liczbę zer quasi-wielomianu $\chi(s, T_o)$ (10) o dodatniej części rzeczywistej (liczbę niestabilnych biegunów UR (rys. 2)). Funkcja $\Psi(T_o)$ przyjmuje jedynie wartości całkowite i może się zmieniać jedynie w punktach o wartościach granicznego czasu opóźnienia $T_{i\pm}^*$. Funkcja $\Psi(T_o)$ ma następujące związki z zerami quasi-wielomianu $\chi(s, T_o)$:

- dla dostatecznie małych T_o funkcja $\Psi(T_o)$ jest równa liczbie zer o dodatniej części rzeczywistej wielomianu $\chi(s, 0)$;
- jeżeli zera quasi-wielomianu $\chi(s, T_o)$ przechodzą przez punkty $s = \pm j\omega^*$ dla T_o^* (40), to przechodzą także przez ten sam punkt dla $T_{o,k}^*$ (41). Kierunek przejścia przez punkty $s = \pm j\omega^*$ jest jednakowy dla danego $T_{o,k}^*$, natomiast kierunek przejścia zer przez te punkty określa się za pomocą współczynnika przejścia $\lambda_\kappa(\omega^*)$ zdefiniowanego zależnością (45). Współczynnik ten wyznacza się dla pulsacji ω^* skojarzonej z czasem $T_{o,k}^*$;
- dla dostatecznie dużych T_o część zer quasi-wielomianu $\chi(s, T_o)$ (10), w obszarze niestabilnym ($\Re\{s\} > 0$), zmierza do zer wielomianu $\chi(s, \infty) = M(s)$, a pozostałe dążą do osi urojonej płaszczyzny zespolonej zmiennej „s”.

Dla danego czasu opóźnień $T_o > 0$ wartość $\Psi(T_o)$ [7, 8] można obliczyć na podstawie znajomości $\Psi(0) = Z$ oraz wyznaczając wartości współczynnika przejścia $\lambda_\kappa(\omega^*)$ dla pulsacji $\omega^* = \omega_\pm^*$ odpowiadającym granicznym czasom opóźnień $T_{i\pm}^*$, które mieszczą się w przedziale $0 < T_{i\pm}^* \leq T_o$:

$$\Psi(T_o) = \Psi(0) + \sum_{i=0}^{n_i} 2\lambda_\kappa(\omega_\pm^*), \quad (48)$$

gdzie n_i jest liczbą granicznych czasów opóźnień $T_{i\pm}^*$ szeregu (46) w przedziale $(0, T_o]$.

Z powyższego opisu wynika, że quasi-wielomian $\chi(s, T_o)$ ma wszystkie zera w LOP zmiennej „ s ” (jest asymptotycznie stabilny) wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\Psi(T_o) = 0$.

5. Przykłady

Dla zilustrowania przedstawionego mechanizmu analizy stabilności UR (rys. 2) z czasem opóźnień $T_o > 0$ rozważmy kilka przykładów UR, dla których dynamika $G(s)$ opisana jest zależnością (13). Charakterystyki części transmitancyjnych $K(s)$ analizowanych układów, wraz z trajektorią graniczną (28), pokazane zostały na rys. 6.

5.1. Przykład I

W przypadku pierwszego UR rozpatrzmy dynamikę $G(s)$, której część transmitancyjna $K(s)$ została zdefiniowana jako dynamika o charakterze inercyjnym pierwszego rzędu (podobnie jak w wariancie UR warunkowo stabilnych (18)):

$$G(s) = \frac{2}{s+1} e^{-sT_o}. \quad (49)$$

Dla tak zdefiniowanej funkcji przejścia $G(s)$ UR o strukturze jak na rysunku 2, przy braku opóźnień ($T_o = 0$) ma jeden stabilny biegun:

$$s_1 = -3 \rightarrow \Psi(0) = 0. \quad (50)$$

W konsekwencji analizowany UR jest stabilny, a wartość początkowa funkcji $\Psi(0) = 0$.

Wartość pulsacji granicznej ω^* została wyznaczona z warunku modułu (30):

$$K(\omega^*) = \frac{2}{\sqrt{\omega^{*2} + 1}} = 1 \rightarrow \omega^* = \sqrt{3}. \quad (51)$$

Natomiast rodzaj wyznaczonej pulsacji granicznej określa analiza współczynnika (42):

$$-\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega} K(\omega) \Big|_{\omega=\omega^*}\right) = +1 \rightarrow \omega^* = \omega_+^*, \quad (52)$$

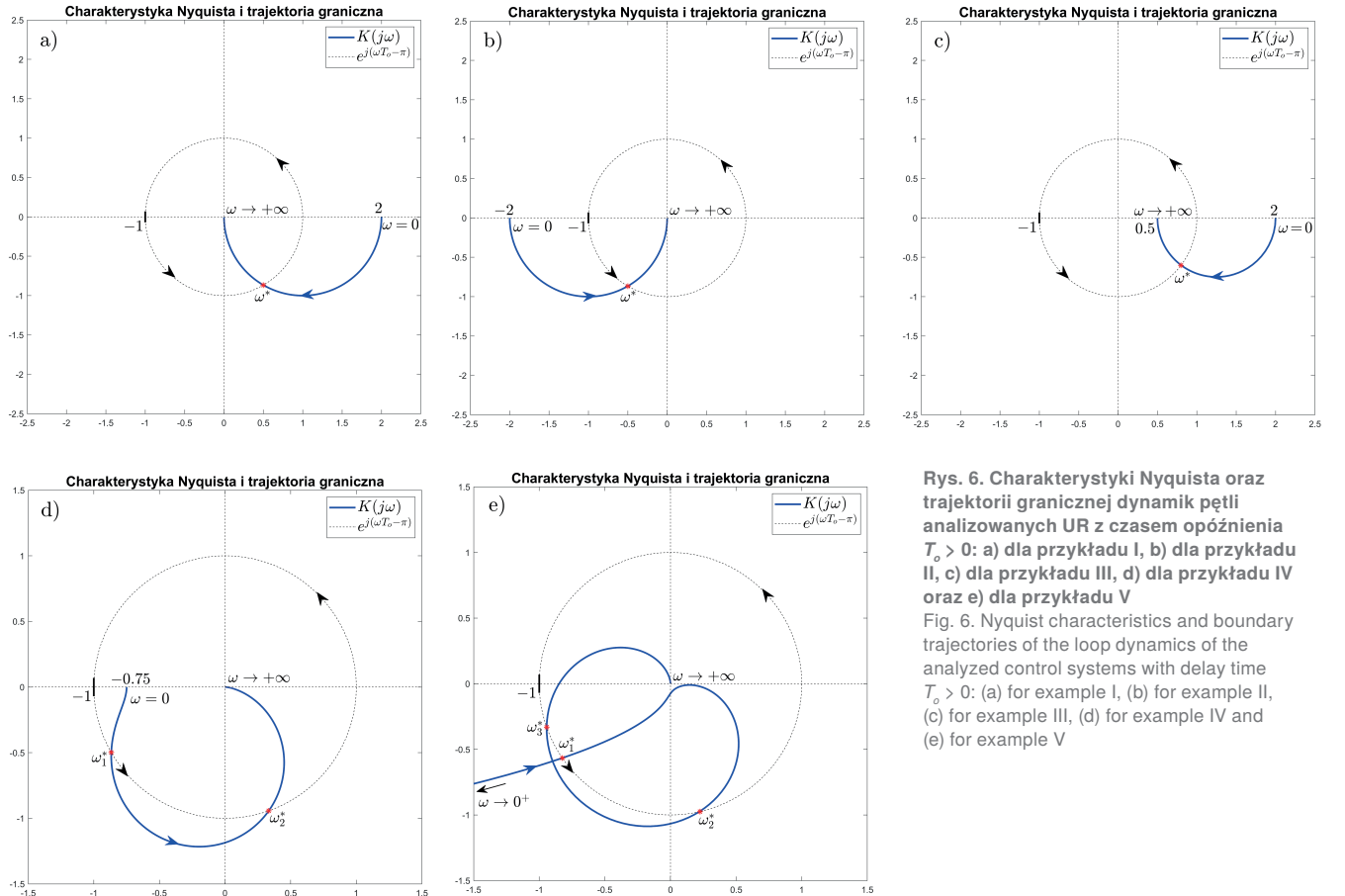
która pozwala wnioskować, że wyznaczona pulsacja ma charakter „destabilizujący” (ω_+^* : LOP-2-POP).

Wykorzystując definicję argumentu części transmitancyjnej (49):

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega) \quad (53)$$

wartość czasu granicznego T_o^* , dla pulsacji granicznej ω^* , obliczona została z definicji (40):

$$\omega_+^* = \omega^* = \sqrt{3} : T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega^*)}{\omega^*} \approx 1,2092. \quad (54)$$



Rys. 6. Charakterystyki Nyquista oraz trajektorii granicznej dynamik pętli analizowanych UR z czasem opóźnień $T_o > 0$: a) dla przykładu I, b) dla przykładu II, c) dla przykładu III, d) dla przykładu IV oraz e) dla przykładu V

Fig. 6. Nyquist characteristics and boundary trajectories of the loop dynamics of the analyzed control systems with delay time $T_o > 0$: (a) for example I, (b) for example II, (c) for example III, (d) for example IV and (e) for example V

Natomiast pozostałe wartości czasów granicznych $T_{o,k}^*$ dla tej pulsacji wyznaczono z zależności (41):

$$\omega_+^* : T_{o,k}^* \approx \{1,2092; 4,8368; 8,4644; 12,0920; 15,7196; \dots\}. \quad (55)$$

Dla wyznaczonych czasów granicznych $T_{o,k}^*$ uzyskane wartości zostały uszeregowane zgodnie z (46) przy jednoczesnym uwzględnieniu charakteru pulsacji granicznej ($\omega^* = \omega_+^*$):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & < T_{1+}^* & < T_{2+}^* & < T_{3+}^* & < T_{4+}^* & < T_{5+}^* & \dots \\ 0 & \mathbf{1,2092} & 4,8368 & 8,4644 & 12,0920 & 15,7196 & \dots \end{array} \quad (56)$$

Z analizy zmienności funkcji $\Psi(T_o)$ (48) dla czasów opóźnienia T_o , podzielonych na interwały zdefiniowane uszeregowanymi czasami granicznymi $T_{i\pm}^*$ jak w (56), wynika, że UR o strukturze jak na rys. 2 jest warunkowo stabilny dla czasów opóźnienia $T_o < 1,2092$. Z analizy graficznej przebiegu funkcji $\Psi(T_o)$ (rys. 7a) wynika bowiem, że dla dowolnego $T_o > 1,2092$ funkcja ta przyjmuje wartości większe od zera (czyli analizowany UR ma $\Psi(T_o > 1,2092)$ niestabilnych biegunów). Uzyskany wynik tłumaczy jednocześnie zachowanie analizowanego UR w przypadkach pokazanych na rys. 4a oraz rys. 4b.

Z analizy tej wynika również, że dla rozpatrywanego UR, w wariancie dynamiki $G(s)$ (49) graniczny czas opóźnienia $T_o^* = 1,2092$ jest jednocześnie czasem krytycznym opóźnienia $\bar{T}_o^*$ tego układu.

5.2. Przykład II

W przypadku drugiego UR rozpatrzmy dynamikę $G(s)$, której część transmitancyjna $K(s)$ została zdefiniowana jako dynamika o charakterze niestabilnym pierwszego rzędu (podobnie jak w wariancie UR warunkowo stabilnych (19)):

$$G(s) = \frac{2}{s-1} e^{-sT_o}. \quad (57)$$

Natomiast dla tak zdefiniowanej funkcji przejścia $G(s)$, UR o strukturze jak na rys. 2, podobnie jak w przykładzie I, przy braku opóźnienia ($T_o = 0$), ma jeden stabilny biegun:

$$s_1 = -1 \rightarrow \Psi(0) = 0. \quad (58)$$

W rezultacie analizowany UR jest stabilny, a wartość początkowa funkcji $\Psi(0) = 0$.

Wartość pulsacji granicznej ω^* została wyznaczona z warunku modułu (30):

$$K(\omega^*) = \frac{2}{\sqrt{\omega^{*2} + 1}} = 1 \rightarrow \omega^* = \sqrt{3}. \quad (59)$$

Rodzaj wyznaczonej pulsacji granicznej określony został z wykorzystaniem współczynnika (42):

$$-\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega^*}\right) = +1 \rightarrow \omega^* = \omega_+^*. \quad (60)$$

Wynik analizy rodzaju ω^* pozwala wnioskować, że wyznaczona pulsacja ma charakter „destabilizujący” (ω^* : LOP-2-POP).

Wykorzystując definicję argumentu części transmitancyjnej funkcji $G(s)$ (57):

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - \pi \quad (61)$$

wartość czasu granicznego T_o^* , dla pulsacji granicznej ω^* , obliczona została z definicji (40):

$$\omega_+^* = \omega^* = \sqrt{3} : T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega^*)}{\omega^*} \approx 0,6046. \quad (62)$$

Pozostałe wartości czasów granicznych $T_{o,k}^*$ dla pulsacji (59) wyznaczono z zależności (41):

$$\omega_+^* : T_{o,k}^* \approx \{0,6046; 4,2322; 7,8598; 11,4874; 15,1150; \dots\}. \quad (63)$$

Dla czasów granicznych $T_{o,k}^*$ uzyskane wartości zostały uszeregowane zgodnie z (46) przy uwzględnieniu charakteru pulsacji granicznej ($\omega^* = \omega_+^*$):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & < T_{1+}^* & < T_{2+}^* & < T_{3+}^* & < T_{4+}^* & < T_{5+}^* & \dots \\ 0 & \mathbf{0,6046} & 4,2322 & 7,8598 & 11,4874 & 15,1150 & \dots \end{array} \quad (64)$$

Analiza zmienności funkcji $\Psi(T_o)$ (48) dla czasów opóźnienia T_o , podzielonych na interwały zdefiniowane uszeregowanymi czasami granicznymi $T_{i\pm}^*$ jak w (64), wynika, że analizowany UR jest warunkowo stabilny dla czasów opóźnienia $T_o < 0,6046$. Z analizy przebiegu funkcji $\Psi(T_o)$ (rys. 7b) wynika bowiem, podobnie jak w przykładzie wcześniejszym, że dla dowolnego $T_o > 0,6046$ funkcja ta przyjmuje wartości większe od zera. Uzyskany wynik tłumaczy jednocześnie zachowanie analizowanego UR w przypadkach pokazanych na rys. 4c oraz rys. 4d.

Podobnie jak w przykładzie I, dla rozpatrywanego UR w wariancie dynamiki $G(s)$ (57), graniczny czas opóźnienia $T_o^* = 0,6046$ jest jednocześnie czasem krytycznym opóźnienia $\bar{T}_o^*$ tego układu.

5.3. Przykład III

Trzeci przykład UR ma dynamikę toru głównego $G(s)$, jak w przykładzie UR warunkowo stabilnych (20), której część transmitancyjna $K(s)$ została zdefiniowana jako dynamika pierwszego rzędu z zerem:

$$G(s) = \frac{s+2}{2s+1} e^{-sT_o}. \quad (65)$$

Podobnie jak w przykładzie I oraz II, dla tak zdefiniowanej funkcji przejścia $G(s)$, UR o strukturze jak na (rys. 2) przy braku opóźnienia ($T_o = 0$) ma jeden stabilny biegun:

$$s_1 = -1 \rightarrow \Psi(0) = 0. \quad (66)$$

Wartość pulsacji granicznej ω^* , analizowanego UR, została wyznaczona z warunku modułu (30):

$$K(\omega^*) = \frac{\sqrt{\omega^{*2} + 4}}{\sqrt{4\omega^{*2} + 1}} = 1 \rightarrow \omega^* = 1. \quad (67)$$

Natomiast rodzaj wyznaczonej pulsacji granicznej określony został z wykorzystaniem współczynnika (42):

$$-\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega^*}\right) = +1 \rightarrow \omega^* = \omega_+^*. \quad (68)$$

Wynik analizy rodzaju ω^* pozwala wnioskować, że wyznaczona pulsacja ma charakter „destabilizujący” (ω_+^* : LOP-2-POP), podobnie jak to miało miejsce w przykładach wcześniejszych.

Definiując argument części transmitancyjnej funkcji $G(s)$ (65):

$$\varphi(\omega) = \arctan(0,5\omega) - \arctan(2\omega) \quad (69)$$

wartość czasu granicznego T_o^* , dla pulsacji granicznej ω^* , wynosi (40):

$$\omega_+^* = \omega^* = 1 : \quad T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega^*)}{\omega^*} \simeq 2,4981. \quad (70)$$

Pozostałe wartości czasów granicznych $T_{o,k}^*$ dla pulsacji (67) wyznaczono z zależności (41):

$$\omega_+^*: T_{o,k}^* \simeq \{2,4981; 8,7813; 15,0645; 21,3477; 27,6308; \dots\}. \quad (71)$$

Dla tak wyznaczonych czasów granicznych $T_{o,k}^*$, z uwzględnieniem charakteru pulsacji granicznej ($\omega^* = \omega_+^*$), uzyskane wartości zostały uszeregowane zgodnie z (46):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & < T_{1+}^* & < T_{2+}^* & < T_{3+}^* & < T_{4+}^* & < T_{5+}^* & \dots & \\ 0 & \mathbf{2,4981} & 8,7813 & 15,0645 & 21,3477 & 27,6308 & \dots & \end{array} \quad (72)$$

Analiza zmienności funkcji $\Psi(T_0)$ (48) dla czasów opóźnień T_0 , podzielonych na interwały zdefiniowane uszeregowanymi czasami granicznymi T_{iz}^* jak w (72) wynika, że badany UR jest warunkowo stabilny dla czasów opóźnień $T_0 < 2,4981$. Z analizy przebiegu funkcji $\Psi(T_0)$ (rys. 7c) wynika bowiem, podobnie jak w przykładach wcześniejszych, że dla dowolnego $T_0 > 2,4981$ funkcja $\Psi(T_0)$ przyjmuje wartości większe od zera. Uzyskany wynik tłumaczy jednocześnie zachowanie analizowanego UR w przypadkach pokazanych na rys. 4e oraz rys. 4f.

Podobnie jak w przykładzie I oraz II, dla rozpatrywanego UR, graniczny czas opóźnienia $T_o^* = 2,4981$ jest jednocześnie czasem krytycznym opóźnienia $\bar{T}_o^*$ tego układu.

5.4. Przykład IV

W przypadku czwartego UR rozpatrzmy dynamikę $G(s)$, której część transmitancyjna $K(s)$ została zdefiniowana jako niestabilna dynamika rzędu drugiego o charakterze oscylacyjnym:

$$G(s) = \frac{-30}{s^2 - 4s + 40} e^{-sT_o} = \frac{-30}{(s - 2 + j3)(s - 2 - j3)} e^{-sT_o}. \quad (73)$$

Dla tak zdefiniowanej funkcji przejścia $G(s)$ UR o strukturze jak na (rys. 2), przy braku opóźnienia ($T_o = 0$) również ma dwa niestabilne bieguny:

$$s_{1,2} = +2 \pm j\sqrt{6} \quad \rightarrow \quad \Psi(0) = 2. \quad (74)$$

W rezultacie analizowany układ jest niestabilny, a wartość początkowa funkcji $\Psi(0) = 2$.

Wartość pulsacji granicznych ω^* została wyznaczona z warunku modułu (30):

$$K(\omega^*) = \frac{30}{\sqrt{(40 - \omega^{*2})^2 + 16\omega^{*2}}} = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_1^* &= \sqrt{14} \\ \omega_2^* &= \sqrt{50} \end{aligned} \quad (75)$$

Natomiast rodzaj wyznaczonych pulsacji granicznych określa analiza współczynnika (42):

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_1^*}\right) &= -1 \quad \rightarrow \quad \omega_1^* = \omega_-^* \\ -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_2^*}\right) &= +1 \quad \rightarrow \quad \omega_2^* = \omega_+^* \end{aligned} \quad , \quad (76)$$

która pozwala wnioskować, że wyznaczona pulsacja ω_1^* ma charakter „stabilizujący” (ω^* : POP-2-LOP), natomiast pulsacja ω_2^* ma charakter „destabilizujący” (ω_2^* : LOP-2-POP).

Wykorzystując definicję argumentu części transmitancyjnej dynamiki $G(s)$ (73):

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{4\omega}{40-\omega^2}\right) - \pi & : \omega^2 \leq 40 \\ \arctan\left(\frac{4\omega}{40-\omega^2}\right) & : \omega^2 > 40 \end{cases} \quad (77)$$

wartości czasów granicznych T_o^* , dla wyznaczonych pulsacji granicznych ω_-^* oraz ω_+^* obliczone zostały z definicji (40):

$$\omega_-^* = \omega_1^* = \sqrt{14} : \quad T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_1^*)}{\omega_1^*} \simeq 0,1396, \quad (78)$$

$$\omega_+^* = \omega_2^* = \sqrt{50} : \quad T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_2^*)}{\omega_2^*} \simeq 0,2702. \quad (79)$$

Natomiast pozostałe wartości czasów granicznych $T_{o,k}^*$ dla tych pulsacji wyznaczono z zależności (41):

$$\omega_-^* : T_{o,k}^* \simeq \{0, 1396; 1, 8188; 3, 4981; 5, 1775; 6, 8566; \dots\} \quad . \quad (80)$$

$$\omega_+^* : \quad T_{o,k}^* \simeq \{0,2702; 1,1588; 2,0474; 2,9359; 3,8245; \dots\}$$

Dla czasów granicznych $T_{o,k}^*$ uzyskane wartości zostały uszeregowane zgodnie z (46) przy jednoczesnym uwzględnieniu charakteru pulsacji granicznej ($\omega_1^* = \omega_-^*$ oraz $\omega_2^* = \omega_+^*$):

$$0 < T_{1-}^* < T_{2+}^* < T_{3+}^* < T_{4-}^* < T_{5+}^* \dots \quad (81)$$

0 0,1396 **0,2702** 1,1588 1,8188 2,0474 ...

Analiza zmienności funkcji $\Psi(T_o)$ (48) dla czasów opóźnienia T_o , podzielonych na interwały zdefiniowane uszeregowanymi czasami granicznymi $T_{i\pm}^*$ jak w (81), wynika, że rozpatrywany UR jest warunkowo stabilny dla czasów opóźnienia $0,1396 < T_o < 0,2702$. Z analizy przebiegu funkcji $\Psi(T_o)$ (rys. 7d) wynika bowiem, inaczej jak w przykładach I–III, że dla dowolnego $T_o < 0,1396$ oraz $T_o > 0,2702$ funkcja ta przyjmuje wartości większe od zera. Z analizy powyższej można wnioskować, że dla pewnych dynamik $G(s)$ czas opóźnienia może mieć właściwości stabilizujące. W analizowanym przykładzie UR, bez czasu opóźnienia $T_o = 0$, jest układem niestabilnym (74). Natomiast dla czasów opóźnienia $T_o \in (0,1396; 0,2702)$ UR jest stabilny.

Podobnie jak w przykładach I–III, dla rozpatrywanego UR w wariancie dynamiki $G(s)$ (73) graniczny czas opóźnienia $T_o^* = 0,2702$ jest czasem krytycznym opóźnienia $\bar{T}_o^*$ tego układu.

5.5. Przykład V

Piąty przykład UR określony został przez dynamikę UO $G(s)$ o wysokim rzędzie oraz charakterze całkującym części transmi-tancyjnej, podobnie jak w przykładzie prezentowanym w [20] jako układ o wielu pulsacjach odcięcia modułu:

$$G(s) = \frac{85(s+1)(s^2+2s+37)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)} e^{-sT_o}. \quad (82)$$

Dla analizowanego UR, z funkcją przejścia $G(s)$ (82), przy braku opóźnienia ($T_o = 0$) układ ma trzy pary stabilnych biegunów:

$$s_{1,2} \simeq -1,7122 \pm j8,6837$$

$$s_{3,4} \simeq -0,1906 \pm j0,5845 \quad \rightarrow \quad \Psi(0) = 0. \quad (83)$$

$$s_{5,6} \simeq -0,0973 \pm j10,3067$$

W rezultacie analizowany UR jest stabilny, a wartość początkowa funkcji $\Psi(0) = 0$.

Definiując moduł części transmitancyjnej $K(j\omega)$:

$$K(\omega) = \frac{85\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{(37 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}{\omega^2\sqrt{(82 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}\sqrt{(101 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}, \quad (84)$$

wartości pulsacji granicznych ω^* , analizowanego UR, zostały wyznaczone z warunku modułu (30). Wśród sześciu wartości pulsacji spełniających warunek modułu jedynie trzy dodatkowo spełniają wymagania $\omega^* > 0$ oraz $\Im\{\omega^*\} = 0$:

$$\omega_1^* = 0,6765$$

$$K(\omega^*) = 1 \rightarrow \omega_2^* = 9,1228 \quad (85)$$

$$\omega_3^* = 10,1022$$

Następnie rodzaj wyznaczonych pulsacji granicznych określony został z wykorzystaniem współczynnika (42):

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_1^*}\right) &= +1 \rightarrow \omega_1^* = \omega_+^* \\ -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_2^*}\right) &= -1 \rightarrow \omega_2^* = \omega_-^* \\ -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_3^*}\right) &= +1 \rightarrow \omega_3^* = \omega_+^* \end{aligned} \quad (86)$$

Wynik analizy rodzaju ω^* pozwala wnioskować, że wyznaczona pulsacja ω_1^* oraz ω_3^* mają charakter „destabilizujący” (ω_+^* : LOP-2-POP), natomiast pulsacja ω_2^* ma charakter „stabilizujący” (ω_-^* : POP-2-LOP).

Oznaczmy przez $\varphi_o(\omega)$ elementarną zależność definiującą argument części transmitancyjnej $K(j\omega)$:

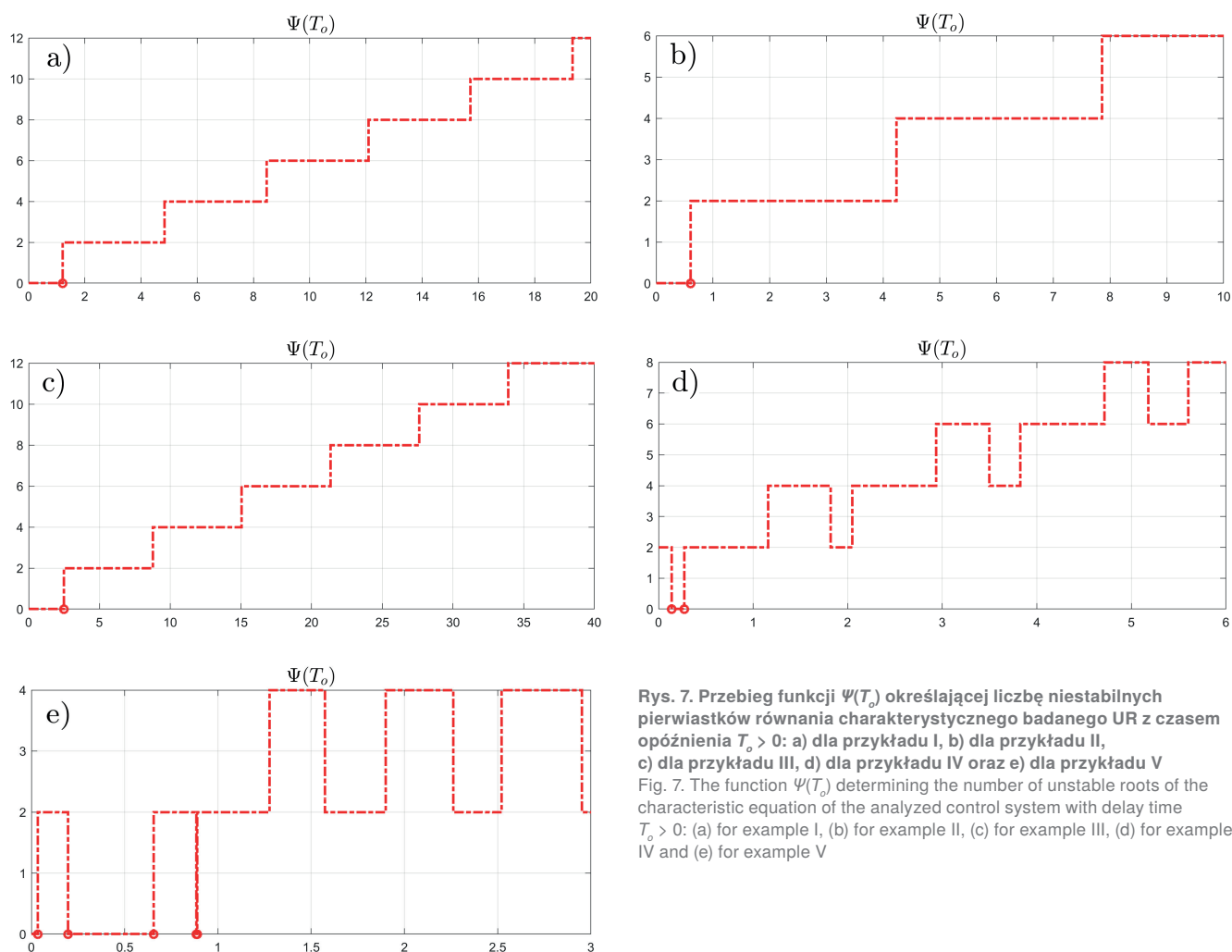
$$\begin{aligned} \varphi_o(\omega) &= -\pi + \arctan(\omega) + \arctan\left(\frac{2\omega}{37 - \omega^2}\right) \\ &\quad - \arctan\left(\frac{2\omega}{82 - \omega^2}\right) - \arctan\left(\frac{2\omega}{101 - \omega^2}\right), \end{aligned} \quad (87)$$

przy wykorzystaniu której, argument części transmitancyjnej funkcji $G(s)$ (82) przyjmuje postać:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \varphi_o(\omega) & : \omega^2 \leq 37 \\ \varphi_o(\omega) + \pi & : 37 < \omega^2 \leq 82 \\ \varphi_o(\omega) & : 82 < \omega^2 \leq 101 \\ \varphi_o(\omega) - \pi & : \omega^2 > 101 \end{cases} \quad (88)$$

Wykorzystując powyższą definicję argumentu $\varphi(\omega)$, wartości czasów granicznych T_o^* , dla wyznaczonych pulsacji granicznych ω_-^* oraz ω_+^* , obliczone zostały z definicji (40):

$$\omega_+^* = \omega_1^* \approx 0,6765 : \quad T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_1^*)}{\omega_1^*} \approx 0,8895, \quad (89)$$



Rys. 7. Przebieg funkcji $\Psi(T_o)$ określającej liczbę niestabilnych pierwiastków równania charakterystycznego badanego UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$: a) dla przykładu I, b) dla przykładu II, c) dla przykładu III, d) dla przykładu IV oraz e) dla przykładu V
Fig. 7. The function $\Psi(T_o)$ determining the number of unstable roots of the characteristic equation of the analyzed control system with delay time $T_o > 0$: (a) for example I, (b) for example II, (c) for example III, (d) for example IV and (e) for example V

$$\omega_-^* = \omega_2^* \approx 9,1228 : T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_2^*)}{\omega_2^*} \approx 0,1963, \quad (90)$$

$$\omega_+^* = \omega_3^* \approx 10,1022 : T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_3^*)}{\omega_3^*} \approx 0,0334. \quad (91)$$

Pozostałe wartości czasów granicznych $T_{o,k}^*$ dla pulsacji (85) wyznaczono z zależności (41):

$$\begin{aligned} \omega_+^* : T_{o,k}^* &\approx \{0,8895; 10,1773; 19,4651; 28,7528; \dots\} \\ \omega_-^* : T_{o,k}^* &\approx \{0,1963; 0,8850; 1,5738; 2,2625; 2,9512; \dots\} \\ \omega_+^* : T_{o,k}^* &\approx \{0,0334; 0,6554; 1,2773; 1,8993; 2,5212; \dots\} \end{aligned} \quad (92)$$

Obliczone czasy graniczne $T_{o,k}^*$ zostały uszeregowane zgodnie z (46) przy jednoczesnym uwzględnieniu charakteru pulsacji granicznej ($\omega_1^* = \omega_+^*$, $\omega_2^* = \omega_-^*$ oraz $\omega_3^* = \omega_+^*$):

$$\begin{aligned} 0 < T_{1+}^* < T_{2-}^* < T_{3+}^* < T_{4-}^* < T_{5+}^* \dots \\ 0 \quad 0,0334 \quad 0,1963 \quad 0,6554 \quad 0,8850 \quad \mathbf{0,8895} \dots \end{aligned} \quad (93)$$

Analiza zmienności funkcji $\Psi(T_o)$ (48) dla czasów opóźnienia T_o , z uwzględnieniem interwałów zdefiniowanych przez uszeregowane czasy graniczne $T_{i\pm}^*$ jak w (93) pokazuje, że badany UR jest warunkowo stabilny dla czasów opóźnienia $T_o \in [0; 0,0334) \cup (0,1963; 0,6554) \cup (0,8850; 0,8895)$. Z analizy przebiegu funkcji $\Psi(T_o)$ (rys. 7e) wynika bowiem, inaczej jak w przykładach I–IV, że UR z funkcją przejścia (82) jest stabilny dla trzech przedziałów wartości czasu opóźnienia T_o . Z analizy powyższej wynika, że dla pewnych UR z czasem opóźnienia, układ może okresowo tracić i odzyskiwać stabilność dla różnych T_o . Jednocześnie dla rozpatrywanego UR graniczny czas opóźnienia $T_o^* = 0,8895$ jest czasem krytycznym opóźnienia $\bar{T}_o^*$ tego układu.

5.6. Przykład VI

Ostatni przykład UR zdefiniowany został przez stabilną dynamikę $G(s)$ drugiego rzędu o niedookreślonej wartości wzmocnienia k :

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2s + 10} e^{-sT_o} = \frac{k}{(s+1+j3)(s+1-j3)} e^{-sT_o}. \quad (94)$$

Dla dodatnich wartości wzmocnienia ($k > 0$) moduł oraz argument transmitancji widmowej $K(j\omega)$ części transmitancyjnej dynamiki $G(s)$ opisane są zależnościami:

$$K(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(10-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}, \quad (95)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\omega}{10-\omega^2}\right) & : \omega^2 \leq 10 \\ -\arctan\left(\frac{2\omega}{10-\omega^2}\right) - \pi & : \omega^2 > 10 \end{cases}. \quad (96)$$

Wartości pulsacji granicznych ω^* , podobnie jak w przykładach wcześniejszych, można wyznaczyć z równania dotyczącego warunku modułu (30):

$$\omega^* : K(\omega^*) = 1 \rightarrow (10 - \omega^{*2})^2 + 4\omega^{*2} - k^2 = 0, \quad (97)$$

które w tym przykładzie zawiera dodatkowo nieznaną wartość wzmocnienia k dynamiki $G(s)$.

Dokonując podstawienia $x = \omega^{*2}$ można powyższe równanie sprowadzić do równania kwadratowego:

$$x^2 - 16x + 100 - k^2 = 0 \rightarrow \Delta_x = 4(k^2 - 36), \quad (98)$$

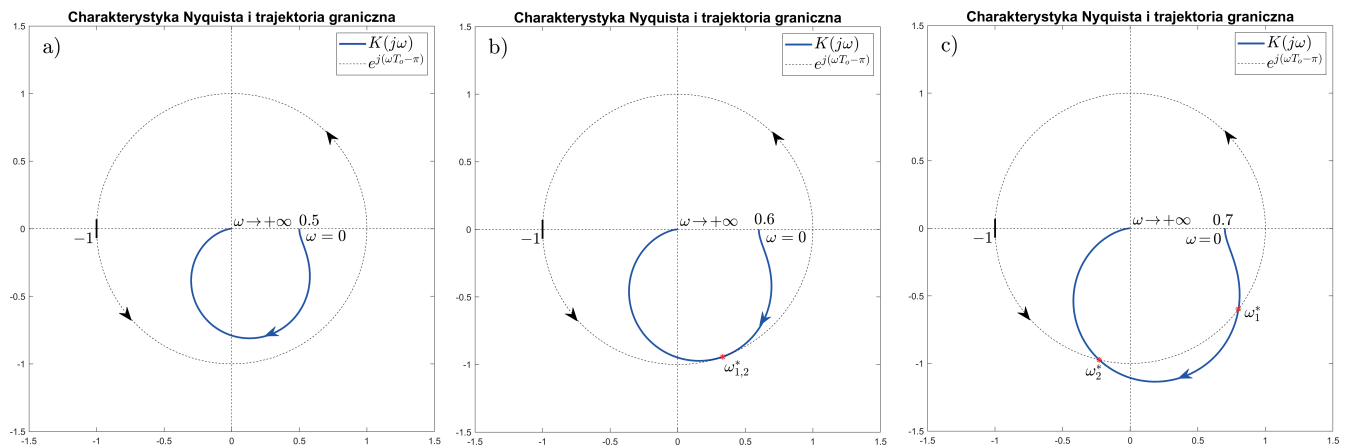
którego charakter rozwiązań (poszukiwanych pulsacji ω^*) zeterminowany jest przez wyznacznik tego równania Δ_x .

W dalszej części rozpatrzone zostały trzy przypadki (w zależności od charakteru wyznacznika Δ_x) określające zakres wartości wzmocnienia k i w konsekwencji charakter wyznaczonych pulsacji granicznych ω^* . Charakterystyki Nyquista części transmitancyjnych UR odpowiadających analizowanym przypadkom pokazane zostały na rys. 8.

przypadek 1 – brak rozwiązań rzeczywistych

Łatwo pokazać, że dla dowolnej wartości wzmocnienia k z zakresu $k \in (0, 6)$ wyznacznik równania (98) jest ujemny ($\Delta_x < 0$). W rezultacie równanie (98) ma jedynie rozwiązania zespolone ($\Im\{\omega^*\} \neq 0$).

Przykładowo dla $k = 5$ oraz przy braku czasu opóźnienia ($T_o = 0$) analizowany UR ma parę stabilnych biegunów:



Rys. 8. Charakterystyki Nyquista oraz trajektorii granicznej dynamik pętli analizowanych UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$ dla przykładu VI: a) w przypadku 1 ($\Delta_x < 0$), b) w przypadku 2 ($\Delta_x = 0$), c) w przypadku 3 ($\Delta_x > 0$)

Fig. 8. Nyquist characteristics and boundary trajectory of the loop dynamics of the analyzed control systems with delay time $T_o > 0$ for example VI: (a) in case 1 ($\Delta_x < 0$), (b) in case 2 ($\Delta_x = 0$), (c) in case 3 ($\Delta_x > 0$)

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{14} \rightarrow \Psi(0) = 0. \quad (99)$$

W rezultacie analizowany układ jest stabilny, a wartość początkowa funkcji $\Psi(0)$ wynosi zero. Ponieważ charakterystyka amplitudowo-fazowa części transmitancyjnej nie przecina trajektorii granicznej (rys. 8a) to analizowany UR pozostaje stabilny dla dowolnego czasu opóźnienia ($T_o \in [0, \infty)$). Potwierdza to analiza wartości funkcji $\Psi(T_o)$ (rys. 9a).

przypadek 2 – rozwiązanie podwójne

W szczególnym przypadku, dla $k = 6$, wyznacznik równania (98) przyjmuje wartość zerową ($\Delta_x = 0$). Ilustracja graficzna tego przypadku pokazana została na rys. 8b. Dla tej szczególnej wartości wzmocnienia k przy braku opóźnienia ($T_o = 0$), podobnie jak w przypadku 1, analizowany UR ma parę stabilnych biegunów:

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{15} \rightarrow \Psi(0) = 0. \quad (100)$$

co pozwala wnioskować, że analizowany UR jest stabilny, a wartość początkowa funkcji $\Psi(0) = 0$.

Ponieważ $\Delta_x = 0$, to równanie (98) ma podwójne rozwiązanie, które pozwala określić podwójną wartość pulsacji granicznej ω^* :

$$x_{1,2} = 8 \rightarrow \omega_{1,2}^* = \sqrt{8} \approx 2,83. \quad (101)$$

Rodzaj wyznaczonej pulsacji granicznej określony został z użyciem współczynnika (45):

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_{1,2}^*}\right) &= 0 \\ -\operatorname{sgn}\left(\frac{d^2}{d\omega^2}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_{1,2}^*}\right) &\neq 0 \rightarrow \omega_{1,2}^* = \omega_o^* \end{aligned} \quad (102)$$

który pozwala wnioskować, że wyznaczona podwójna pulsacja ω^* ma charakter „neutralny” ($\omega_{1,2}^* = \omega_o^*$). Przypadek ten ilustruje rys. 8b, na którym charakterystyka Nyquista części transmitancyjnej jest styczna do trajektorii granicznej dla $\omega = \omega_{1,2}^*$.

Wykorzystując definicję argumentu części transmitancyjnej $K(s)$ (96) można wyznaczyć wartość czasu granicznego T_o^* (40) dla pulsacji granicznej ω^* :

$$\omega_o^* = \sqrt{8} : T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_o^*)}{\omega_o^*} \approx 0,6755. \quad (103)$$

Pozostałe wartości czasów granicznych $T_{o,k}^*$ dla pulsacji (101) wyznaczono z zależności (41):

$$\omega_o^* : T_{o,k}^* \approx \{0,6755; 2,8970; 5,1184; 7,3398; 9,5613; \dots\}. \quad (104)$$

Analiza zmienności funkcji $\Psi(T_o)$ dla czasów opóźnienia T_o (rys. 9b), z uwzględnieniem interwałów zdefiniowanych przez czasy graniczne $T_{o,k}^*$, oraz „neutralnego” charakteru pulsacji granicznej pozwala wnioskować, że badany UR jest stabilny dla $T_o \in [0; \infty) \setminus \{0,6755; 2,8970; 5,1184; \dots\}$.

Oznacza to, że analizowany w tym przykładzie UR, jest stabilny dla dowolnego czasu opóźnienia $T_o \geq 0$ z wyjątkiem czasów granicznych $T_{o,k}^*$, dla których układ znajduje się na granicy stabilności.

przypadek 3 – dwa rozwiązania rzeczywiste

Trzeci przypadek obejmuje wartości wzmocnienia $k > 6$, dla których wyznacznik $\Delta_x > 0$ i w konsekwencji równanie (98) ma dwa różne rzeczywiste rozwiązania, przy czym dla $k > 10$ tylko jedno z tych rozwiązań spełnia warunek $x > 0$ (któremu odpowiada $\Im\{\omega^*\} = 0$ oraz $\omega^* > 0$).

Przykładowo dla $k = 7$ oraz przy braku czasu opóźnienia ($T_o = 0$) analizowany UR jest stabilny:

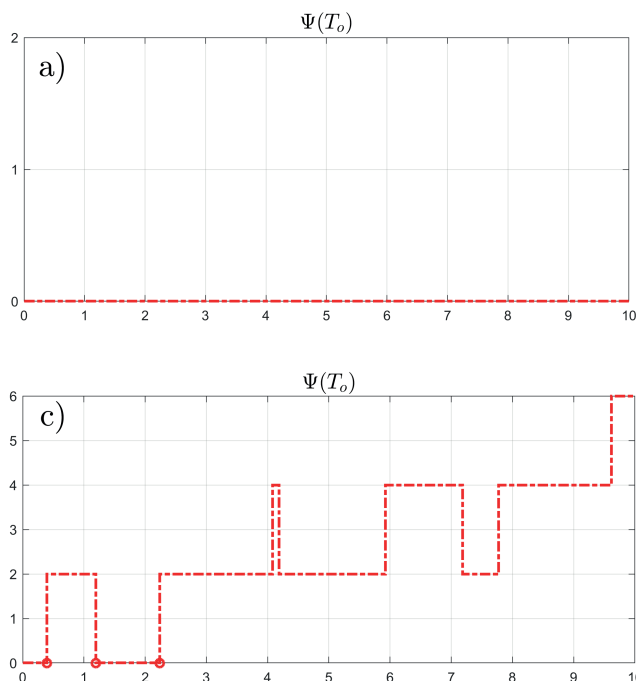
$$s_{1,2} = -1 \pm j4 \rightarrow \Psi(0) = 0. \quad (105)$$

Dwa różne rzeczywiste pierwiastki równania (98) umożliwiające określenie wartości pulsacji granicznych ω^* badanego UR:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 4,3924 \rightarrow \omega_1^* \approx 2,0963 \\ x_2 &\approx 11,6056 \rightarrow \omega_2^* \approx 3,4067 \end{aligned} \quad (106)$$

Wartość współczynnika (42) pozwala określić rodzaj wyznaczonych pulsacji granicznych:

$$\begin{aligned} -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_1^*}\right) &= -1 \rightarrow \omega_1^* = \omega_-^* \\ -\operatorname{sgn}\left(\frac{d}{d\omega}K(\omega)\Big|_{\omega=\omega_2^*}\right) &= +1 \rightarrow \omega_2^* = \omega_+^* \end{aligned} \quad (107)$$



Rys. 9. Przebieg funkcji $\Psi(T_o)$ określającej ilość niestabilnych pierwiastków równania charakterystycznego badanego UR z czasem opóźnienia $T_o > 0$ dla przykładu VI a) w przypadku 1 ($\Delta_x < 0$), b) w przypadku 2 ($\Delta_x = 0$), c) w przypadku 3 ($\Delta_x > 0$)

Fig. 9. The function $\Psi(T_o)$ determining the number of unstable roots of the characteristic equation of the analyzed control system with delay time $T_o > 0$ for example VI (a) in case 1 ($\Delta_x < 0$), (b) in case 2 ($\Delta_x = 0$), (c) in case 3 ($\Delta_x > 0$)

Dla pulsacji ω_1^* o charakterze „stabilizującym” (ω_-^* : POP-2-LOP) oraz pulsacji ω_2^* o charakterze „destabilizującym” (ω_+^* : LOP-2-POP), zgodnie z (40), wyznaczono wartości czasów granicznych T_o^* :

$$\omega_-^* = \omega_1^* \approx 2,0963 : T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_1^*)}{\omega_1^*} \approx 1,1927, \quad (108)$$

$$\omega_+^* = \omega_2^* \approx 3,4067 : T_o^* = \frac{\pi + \varphi(\omega_2^*)}{\omega_2^*} \approx 0,3932. \quad (109)$$

Pozostałe wartości czasów granicznych $T_{o,k}^*$ dla pulsacji (106) wyznaczono z zależności (41):

$$\omega_-^* : T_{o,k}^* = \{1,1927; 4,1907; 7,1887; 10,1867; 13,1846; \dots\} \quad (110)$$

$$\omega_+^* : T_{o,k}^* = \{0,3932; 2,2375; 4,0819; 5,9262; 7,7706; \dots\}$$

Wartości powyższych czasów granicznych $T_{o,k}^*$ zostały uszeregowane zgodnie z (46) przy jednoczesnym uwzględnieniu charakteru pulsacji granicznej ($\omega_1^* = \omega_-^*$ oraz $\omega_2^* = \omega_+^*$):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < T_{1+}^* & < T_{2-}^* & < T_{3+}^* & < T_{4+}^* & < T_{5-}^* & \dots \\ & & & & & & \cdot \end{array} \quad (111)$$

Analiza zmienności funkcji $\Psi(T_o)$ (rys. 9c), dla interwałów zdefiniowanych przez czasy graniczne $T_{i\pm}^*$ jak w (111), pokazuje, że badany UR jest warunkowo stabilny dla czasów opóźnienia $T_o \in [0; 0,3932) \cup (1,1927; 2,2375)$. Jednocześnie dla rozpatrywanego UR graniczny czas opóźnienia $T_o^* = 2,2375$ jest czasem krytycznym opóźnienia $\bar{T}_o^*$ tego układu.

6. Podsumowanie

Zaletą proponowanego mechanizmu analizy stabilności UR jest jego w pełni algebraiczna forma. Rozdzielenie, w procesie analizy, dynamiki operatorowej funkcji przejścia $G(s)$, na część transmitancyjną (funkcję wymierną) $K(s)$ oraz niewymierną funkcję modelu opóźnienia, umożliwiło znaczne uproszczenie prowadzonych obliczeń. Pozwoliło również na zdefiniowanie trajektorii granicznej będącej swoistą rozszerzoną postacią punktu granicznego $(-1, 0)$ klasycznego kryterium stabilności Nyquista. Zaproponowana została zwrata, inaczej niż można spotkać w literaturze, forma współczynnika przejścia $\lambda_k(\omega^*)$ bazująca na module transmitancji widmowej $K(j\omega)$. Współczynnik ten umożliwia określenie charakteru pulsacji granicznej ω^* oraz liczby niestabilnych zer $\Psi(T_o)$ quasi-wielomianu charakterystycznego $\chi(s, T_o)$ badanego UR w zależności od czasu opóźnienia.

Proponowana metoda pozwala określić nie tylko czy UR z czasem opóźnienia jest stabilny ale także wyznaczyć zakresy tego czasu, dla których UR jest stabilny. W rezultacie możliwe jest określenie przypadków UR, dla których pojawienie się czasu opóźnienia $T_o > 0$ może prowadzić do odzyskania stabilności. Interesującym wynikiem jest również możliwość określenia przedziałów, dla których UR z czasem opóźnienia okresowo traci i odzyskuje stabilność.

Wykorzystanie, wszystkich zaproponowanych elementów, w procesie badania stabilności zobrazowane zostało szczegółowo objaśnionymi przykładami analizy UR. Z analizy uzyskanych wyników można sformułować ogólne właściwości dotyczące proponowanego analogu kryterium Nyquista umożliwiające analizę warunków stabilności UR z czasem opóźnienia:

– warunkiem koniecznym rozważań zagadnień stabilności UR z opóźnieniem jest aby wzmocnienie wysokoczęstotliwościowe

ściowe k_∞ transmitancji $K(s)$ spełniało warunek: $|k_\infty| < 1$, czyli $\lim_{s \rightarrow +\infty} K(s) < 1$;

- jeżeli równanie $K(j\omega) = -e^{j\omega T_o}$ nie ma rzeczywistych rozwiązań (nie istnieją miejsca przecięcia ch-ki Nyquista $K(j\omega)$ z trajektorią graniczną) to stabilność UR z opóźnieniem $T_o > 0$ nie zależy od czasu opóźnienia, a jedynie od stabilności UR przy braku opóźnienia ($T_o = 0$);
- jeżeli równanie $K(j\omega) = -e^{j\omega T_o}$ ma co najmniej jedno rzeczywiste rozwiązanie (istnieje pulsacja graniczna $\omega^* > 0$) to UR z czasem opóźnienia T_o z zakresu $[0, +\infty)$, może okresowo tracić lub odzyskiwać stabilność;
- dla każdej wartości granicznej ω^* istnieje nieskończenie wiele wartości granicznych czasów opóźnienia $T_{o,k}^*$, dla których pary pierwiastków $s = \pm j\omega^*$ quasi-wielomianu charakterystycznego $\chi(s, T_{o,k}^*)$ leżą na osi urojonej;
- jeżeli równanie $K(j\omega) = -e^{j\omega T_o}$ ma więcej niż jedno rozwiązanie rzeczywiste (istnieje kilka pulsacji granicznych ω^*), to część pulsacji granicznych ma charakter „destabilizujący” ($\omega^* = \omega_+^*$), a część ma charakter „stabilizujący” ($\omega^* = \omega_-^*$);
- pulsacja „stabilizująca” ω_-^* oraz „destabilizująca” ω_+^* występują naprzemiennie (nie wliczając pulsacji „neutralnych” ω_o^*);
- największa co do wartości pulsacja graniczna ω^* zawsze jest pulsacją „destabilizującą” ω_+^* ;
- jeżeli równanie $K(j\omega) = -e^{j\omega T_o}$ ma pierwiastki $s = \pm j\omega^*$, to zawsze istnieje takie opóźnienie krytyczne $\bar{T}_o^*$, że dla wszystkich $T_o > \bar{T}_o^*$ UR jest zawsze niestabilny;
- dla UR stabilnych przy $T_o = 0$ iloczyn największej (ostatniej) pulsacji granicznej ω_+^* oraz odpowiadającego mu podstawowego (najmniejszego) granicznego czasu opóźnienia T_o^* jest równoważny zapasowi fazy $\Delta\varphi = \omega_+^* T_o^*$ analizowanego UR.

Bibliografia

1. Rudnicki R., *Modele i metody biologii matematycznej*. Część I: Modele deterministyczne, IM PAN, Warszawa 2014.
2. Chen-Charpentier B., *Delays and Exposed Populations in Infection Models*, “Mathematics”, Vol. 11, No. 8, 2023, DOI: 10.3390/math11081919.
3. Venkatesh A., Prakash Raj M., Baranidharan B., *Analyzing dynamics and stability of single delay differential equations for the dengue epidemic model*, “Results in Control and Optimization”, Vol. 15, 2024, DOI: 10.1016/j.rico.2024.100415.
4. Åström K.J., Hägglund T., *PID controllers: theory, design and tuning*, 2nd Ed., Instrument Society of America, 1995.
5. Houpis C.H., Sheldon S.N., D’Azzo J.J., *Linear Control System Analysis and Design with MATLAB*, 5th Ed., CRC Press, 2003.
6. Kurek J., *Aproksymacja modelem inercyjnym I rzędu z opóźnieniem układu inercyjnego n-tego rzędu*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 14, Nr 11, 2010, 49–51.
7. Busłowicz M., *Asymptotyczna stabilność dynamicznych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniem*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Nauki Techniczne nr 84, Elektryka nr 7, Białystok 1987.
8. Busłowicz M., *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Komitet Automatyki i Robotyki PAN, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok, 2000.
9. Bodnar M., Piotrowska M.J., *O równaniach różniczkowych z opóźnieniem – teoria i zastosowania*, Matematyka Stosowana: matematyka dla społeczeństwa, Warszawa 2010, T. 11/52, 17–56.
10. Olgac N., Sipahi R., *An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems*,

- “IEEE Transactions on Automatic Control”, Vol. 47, No. 5, 2002, 793–797, DOI: 10.1109/TAC.2002.1000275.
11. Marshall J.E., Walton K., *A Review of Analytical Methods for Control of Time-Delay Systems*, “IFAC Proceedings Volumes”, Vol. 20, No. 1, 1987, 485–490, DOI: 10.1016/S1474-6670(17)59348-9.
 12. Maddi A., Guessoum A., Berkani D., *Graphical Stabilization Approach for Unstable First Order Linear Systems with Time Delay*, “International Journal of Applied Mathematics, Electronics and Computers”, 2017, DOI: 10.18100/ijamec.2017SpecialIssue30464.
 13. Molnar C.A., Balogh T., Boussaada I., Insperger T., *Calculation of the critical delay for the double inverted pendulum*, “Journal of Vibration and Control”, Vol. 27, No. 3-4, 2020, DOI: 10.1177/1077546320926909.
 14. Nise N.S., *Control Systems Engineering*, 6th Ed., John Wiley & Sons, 2010.
 15. Kuo B.C., Golnaraghi F., *Automatic Control Systems*, 9th Ed., John Wiley & Sons, 2010.
 16. Dorf R.C., Bishop R.H., *Modern Control Systems*, 12th Ed. Prentice Hall, 2011.
 17. Åström K.J., Murray R.M., *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Second Edition, Princeton University Press, 2021.
 18. Greblicki W., *Podstawy Automatyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2006.
 19. Emirsajłow Z., *Teoria układów sterowania. Cz. 1, Układy liniowe z czasem ciągłym*, WEPS. Wydaw. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, 2000.
 20. Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A., *Feedback Control of Dynamic Systems*, 7th Ed., Pearson, 2015.
 21. Rosołowski E., *Automatyczne sterowanie i regulacja, Procesy ciągłe i dyskretne*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2020.
 22. Bieda R., Grygiel R., *O strojeniu regulatorów cyfrowych z wykorzystaniem mechanizmów quasi-ciągłych*, „Przegląd Elektrotechniczny”, Vol. 100, Nr 1, 2024, 9–15, DOI: 10.15199/48.2024.01.02.
 23. Dostál P., Bobál V., Babík Z., *Control of unstable and integrating time delay systems using time delay approximations*, “WSEAS Transactions on Systems”, Vol. 11, No. 10, 2012, 586–595.
 24. Nowacki P., Szklarski L., Górecki H., *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*, Tom II, Zagadnienia specjalne układów liniowych, Układy nieliniowe, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1962.
 25. Qing-Chang Z., *Robust Control of Time-delay Systems*, Springer London, January 2006.

On the Stability of Control Systems with Time Delay

Abstract: The article presents the process of extending the Nyquist criterion to a computational variant that allows the study of the stability of control systems with delay time $T_0 > 0$. Necessary conditions for the stability of such systems are defined, and an operation scheme is presented that allows for determining the ranges of delay times that guarantee stable operation of the loop structure of the control system. As part of the analysis of the proposed solution, the results of the stability study process for control systems with example substitute dynamics of the loop structure are presented. The properties of the proposed stability testing mechanism for systems with delay and the interpretation of the obtained results are demonstrated using the example of the presented systems.

Keywords: control system, dynamics with delay time, Nyquist stability criterion, boundary trajectory, quasi-characteristic polynomial

dr inż. Robert Bieda

robert.bieda@polsl.pl

ORCID: 0000-0001-7485-0073

Absolwent Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Uzyskał tytuł magistra inżyniera w 2002 r. oraz stopień doktora nauk technicznych w 2006 r., w dziedzinie automatyka i robotyka. Obecnie na stanowisku adiunkta w Katedrze Automatyki i Robotyki na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej. Jego zainteresowania badawcze obejmują zagadnienia związane z analizą i fuzją sygnałów, systemami sterowania, systemami klasyfikacji i podejmowania decyzji oraz sterowaniem opartym na informacji wizyjnej z zastosowaniem w bezzałogowych statkach powietrznych i interakcji człowiek-komputer.

