

# Badania w kierunku zwiększania odporności sterowania z modelem odwrotnym z wykorzystaniem inwersji uogólnionych: dyskretna przestrzeń stanów Grünwalda-Letnikova

Emilia Helińska, Wojciech P. Hunek

Politechnika Opolska, Katedra Automatyki, ul. Prószkowska 76 (bud. nr 3), 45-758 Opole

**Streszczenie:** W artykule poruszono problematykę analizy i syntezy wielowymiarowego sterowania perfekcyjnego obiektami opisanymi w dyskretniej przestrzeni stanów Grünwalda-Letnikova. W tym celu zastosowano autorską procedurę angażującą T- oraz  $\sigma$ -inwersję uogólnioną. Przykłady numeryczne środowiska MATLAB wykazały słuszość prowadzonych badań, skoncentrowanych na uodpornianiu dyskutowanej strategii sterowania podczas zastosowania niejednoznacznej inwersji  $\sigma$ . Zestawione problemy otwarte, obejmujące obiekty z czasem opóźnienia  $d > 1$ , to dobry prognostyk na podanie ujednoliconego podejścia w kierunku projektowania odpornych struktur sterowania IMC.

**Słowa kluczowe:** sterowanie z modelem odwrotnym, inwersje uogólnione, odporność sterowania, dziedzina Grünwalda-Letnikova, obiekty wielowymiarowe

## Symbole i skróty

- $A, A_d, B, C$  – macierze parametryczne  
 $d$  – czas opóźnienia  
 $I_n$  – macierz jednostkowa o wymiarze  $n$   
 $k$  – czas dyskretny  
 $n$  – liczba zmiennych stanu  
 $n_u$  – liczba zmiennych wejściowych  
 $n_y$  – liczba zmiennych wyjściowych  
 $q^{-1}$  – operator przesunięcia wstecz  
 $u(k)$  – wektor zmiennych sterujących  
 $x(k)$  – wektor zmiennych stanu  
 $y(k)$  – wektor zmiennych wyjściowych  
 $y_{ref}$  – wartość zadana  
 $z$  – operator zespolony  
 $\alpha$  – rząd obiektu frakcyjnego  
 $\beta$  – macierz implementująca stopnie swobody  
 $\Delta^{\alpha}$  – operator różnicowy Grünwalda-Letnikova  
 $(\cdot)^R$  – każda prawostronna inwersja  
G-L – Grünwald-Letnikov  
IMC – sterowanie z modelem odwrotnym

## 1. Wprowadzenie

Problematyka sterowania obiektami frakcyjnymi spotyka się z coraz większym zainteresowaniem ze względu na jej duże spektrum oddziaływania zarówno w teorii, jak i w praktyce. Rzeczywiście w literaturze przedmiotu znaleźć można liczne opracowania teoretyczne, angażujące obiekty sterowania opisane operatorami ułamkowego rzędu [1–4]. Z drugiej strony, implementacje praktyczne potwierdzają celowość prowadzenia badań, obejmujących regulację obiektów z rzędem ułamkowym [5–8]. Stąd potrzeba syntezy złożonych układów sterowania, gwarantujących możliwie wysoką wydajność w kontekście predefiniowanej szybkości oraz dokładności działania. Jednym z rozwiązań wydaje się być regulacja oparta na modelu odwrotnym, pociągająca użycie inwersji niejednoznacznych, także jednoznacznej inwersji Moore’a-Penrose’a. Ten interesujący sposób sterowania gwarantuje maksymalną szybkość i dokładność obserwowanych sygnałów, co zostało już potwierdzone dla obiektów z rzędem całkowitym [9]. Dlatego wielowymiarowe sterowanie perfekcyjne stanowi korzystną alternatywę dla klasycznych rozwiązań, głównie zorientowanych na wykorzystaniu regulatorów PID [10, 11]. W ramach niniejszej pracy przedstawiono oryginalną procedurę sterowania perfekcyjnego, wykonaną w środowisku MATLAB. Prace nad algorytmem oparto na szeroko przeprowadzonej w artykule syntezy dyskutowanego prawa sterowania, obejmującej również zagadnienie stabilności. Uodpornianie sterowania perfekcyjnego, dedykowanego obiektom niecałkowitego rzędu opisanym w dyskretniej dziedzinie Grünwalda-Letnikova, wykonano z użyciem niejednoznacznej inwersji  $\sigma$ .

### Autor korespondujący:

Emilia Helińska, emilia.helinska@student.po.edu.pl

### Artykuł recenzowany

nadesłany 29.09.2024 r., przyjęty do druku 17.03.2025 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Int.

Artykuł zorganizowany jest w następujący sposób. W Sekcji 2 opisano reprezentację Grünwalda-Letnikova i powiązano ją z opisem dedykowanym obiektom całkowitego rzędu, zdefiniowanym w dyskretnej przestrzeni stanów. Sekcja 3 wprowadza w problematykę sterowania IMC omawianymi obiektami z czasem opóźnienia  $d = 1$ . Natomiast w Sekcjach 4 i 5 zaproponowano innowacyjne zastosowanie inwersji uogólnionych w kierunku poprawy odporności sterowania z modelem odwrotnym. Przykłady symulacyjne kolejnej sekcji przemawiają za celowością podjęcia w artykule wysiłku badawczego. Wreszcie, w Sekcji 7 zawarto wnioski i interesujące problemy otwarte.

## 2. Reprezentacja systemu

Rozważmy obiekt wielowymiarowy  $S(\mathbf{A}_d, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  z jednostkowym opóźnieniem  $d = 1$  o  $n_u$  wejściach,  $n_y$  wyjściach oraz  $n$  zmiennych stanu, opisany w dyskretnej przestrzeni stanów Grünwalda-Letnikova (G-L), jak poniżej

$$\begin{cases} \Delta^\alpha \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{cases}, \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$  oraz  $0 < \alpha < 2$  jest rzędem obiektu, a operator dyskretny G-L jest zdefiniowany następująco [12]

$$\Delta^\alpha \mathbf{x}(k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j), \quad (2)$$

gdzie

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & j > 0 \end{cases}. \quad (3)$$

**Uwaga 1.** Dla  $\alpha = 1$ , obiekt opisany równaniami (1–3) sprowadza się do klasycznej formy układu z rzędem całkowitym

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie symbol  $\mathbf{x}_0$  oznacza wartość początkową wektora zmiennych stanu oraz  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_d + \mathbf{I}_n$ , gdzie  $\mathbf{I}_n$  jest macierzą jednostkową o wymiarze  $n \times n$ . Mając opis obiektu niecałkowitego rzędu, przejdźmy do zdefiniowania sterowania z modelem odwrotnym IMC (ang. *inverse model control*), tj. sterowania perfekcyjnego (ang. *perfect control*) w następnej sekcji.

## 3. Sterowanie z modelem odwrotnym (IMC)

Rozpatrzmy obiekt opisany formułami (1–3). Poniżej zsyntetyzowano sterowanie perfekcyjne układu wielowymiarowego, w szczególności prawostronnie-odwracalnego ( $n_u \geq n_y$ ), w formie nowego twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** Rozważmy obiekt wielowymiarowy (1–3) z liczbą wejść  $n_u$  większą lub równą liczbie wyjść  $n_y$ . Minimalizacja wskaźnika jakości

$$J(\mathbf{u}(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) \right]^T \left[ \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) \right], \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1)$  jest wartością referencyjną, a  $\mathbf{y}(k+1)$  oznacza jednokrokowy deterministyczny predyktor wyjścia w postaci

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C} \left[ \Delta^\alpha \mathbf{x}(k+1) - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1) \right], \quad (6)$$

angażujący

$$\mathbf{x}(k+1) = \Delta^\alpha \mathbf{x}(k+1) - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1), \quad (7)$$

definiuje sterowanie IMC

$$\mathbf{u}(k) = (\mathbf{C}\mathbf{B})^R \left[ \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{C} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1) \right], \quad (8)$$

z każdą inwersją prawostronną  $(\mathbf{C}\mathbf{B})^R$  wielomianu macierzowego  $\mathbf{C}\mathbf{B}$ .

**Dowód.** Podstawiając formułę (8) do równania stanu (1) otrzymujemy, przy uwzględnieniu jednokrokowego predyktora wyjścia (6), następujące wyrażenie

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) = & \mathbf{C} \left\{ \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) \right. \\ & + \mathbf{B} \left\{ (\mathbf{C}\mathbf{B})^R \left[ \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{C} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1) \right] \right\} \\ & \left. - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Stąd

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1), \quad (10)$$

co kończy dowód.

**Wniosek 1.** Zauważmy, że sterowanie z modelem odwrotnym (8), dedykowane obiektom niecałkowitego rzędu (1–3), redukuje się dla  $\alpha = 1$  do sterowania perfekcyjnego dla obiektów z rzędem całkowitym (4), ostatecznie przyjmując postać

$$\mathbf{u}(k) = (\mathbf{C}\mathbf{B})^R \left[ \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) - \mathbf{C}\mathbf{A} \mathbf{x}(k) \right]. \quad (11)$$

**Wniosek 2.** Zauważmy także, że dla obiektów frakcyjnych (1–3) z równą liczbą wejść i wyjść, tj. przy założeniu  $n_u = n_y$ , równanie (8) podlega użyciu inwersji regularnej wielomianu macierzowego  $\mathbf{C}\mathbf{B}$ , finalnie prowadząc do  $(\mathbf{C}\mathbf{B})^{-1}$ .

Znamiennym jest, że podczas projektowania sterowania z modelem odwrotnym efektywnie używana jest prawostronna inwersja wielomianu macierzowego  $\mathbf{C}\mathbf{B}$  (formuła 8). Jednak w przeciwieństwie do obiektów prawostronnie-odwracalnych, tj. w przypadku systemów lewostronnie-odwracalnych, nie ma konieczności użycia inwersji lewostronnych, gdyż sterowanie IMC dla takich obiektów nie istnieje. Charakterystykę dwóch klasycznych inwersji, często używanych podczas zwiększania odporności wielowymiarowego sterowania perfekcyjnego, pokazano w kolejnej sekcji.

## 4. T- oraz $\sigma$ -inwersja uogólniona

Inwersja Moore'a-Penrose'a, zredefiniowana później jako T-inwersja w dziedzinie czasu ciągłego i dyskretnego, jest szeroko znana i stosowana, głównie w kontekście projektowania złożonych struktur sterowania opartych na modelu odwrotnym [13–17]. Z drugiej strony, dyskutowana inwersja, wskutek spełnienia czterech unikatowych warunków, generuje wyłącznie jednoznaczne rozwiązania, często uniemożliwiające użycie inwersji w różnych zagadnieniach teoretycznych i praktycznych [18, 19]. Rzeczywiście, zastosowanie inwersji Moore'a-Penrose'a może prowadzić do niestabilności, głównie obserwowanej podczas projektowania sterowania inwersyjnego w postaci regulacji perfekcyjnej [9]. Antidotum na tak zauważalne ograniczenia wydaje się być użycie niejednoznacznych inwersji, które w prosty sposób mogą stabilizować zamknięty układ regulacji [20, 21]. Do coraz częściej stosowanych narzędzi należy zaliczyć między innymi  $\sigma$ -inwersję, angażującą tzw. stopnie swobody. Jej pierwotną prawostronną postać, dedykowaną arbitralnie dobranej macierzy wielomianowej  $\underline{W}_{n_y \times n_u}(q^{-1})$ , zdefiniowano w następujący sposób [20]

$$\underline{W}_{\sigma_1}^R(q^{-1}) = \left\{ \underline{I}_{n_u} + \left[ \underline{\beta}_s(q^{-1}) \right]_0^R \left[ \underline{W}(q^{-1}) - \underline{\beta}(q^{-1}) \right] \right\}^{-1} \left[ \underline{\beta}_s(q^{-1}) \right]_0^R, \quad (12)$$

gdzie wielomiany macierzowe  $\underline{\beta}_s(q^{-1})$  i  $\underline{\beta}(q^{-1})$  stowarzyszone są wyłącznie z macierzą  $\underline{W}(q^{-1})$ , a symbol  $q^{-1}$  oznacza operator przesunięcia wstecz. Znamiennym jest, że niejednoznaczna  $\sigma$ -inwersja (12) została później zredefiniowana do prostszej formy, jak poniżej [18]

$$\underline{W}_{\sigma_2}^R(q^{-1}) = \underline{\beta}^T(q^{-1}) \left[ \underline{W}(q^{-1}) \underline{\beta}^T(q^{-1}) \right]^{-1}, \quad (13)$$

implementującej arbitralnie dobrane stopnie swobody  $\underline{\beta}(q^{-1})$ .

Zauważmy, że  $\sigma$ -inwersja wielomianowa (13) sprowadza się do klasycznej inwersji Moore'a-Penrose'a dla  $\underline{\beta}(q^{-1}) = \underline{W}(q^{-1})$ . Stąd mamy

$$\underline{W}_0^R = \underline{W}^T(q^{-1}) \left[ \underline{W}(q^{-1}) \underline{W}^T(q^{-1}) \right]^{-1}. \quad (14)$$

Znając fundamentalne informacje dotyczące dwóch inwersji, przejdźmy w następnych sekcjach do ich użycia podczas projektowania odpornych struktur sterowania z modelem odwrotnym. Motywujące przykłady symulacyjne pokażą, że sterowanie perfekcyjne dedykowane obiektom niecałkowitego rzędu (1–3) można znacząco uodpornić, głównie dzięki zastosowaniu  $\sigma$ -inwersji (13) w odnośnie do iloczynu macierzy parametrycznych  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{B}$ .

## 5. Algorytm IMC z użyciem $\sigma$ -inwersji parametrycznej

Zauważmy, że formuła sterowania perfekcyjnego (8), dedykowana obiektom niecałkowitego rzędu (1–3), może przyjąć następujące formy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) = & (\mathbf{CB})_{\sigma_2}^R \left[ \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) \right. \\ & \left. - \mathbf{CA}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{C} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) = & (\mathbf{CB})_{\sigma_2}^R \left[ \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) \right. \\ & \left. - \mathbf{CA}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{C} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

implementujące odpowiednio parametryczne T- oraz  $\sigma$ -inwersję, zdefiniowane w Sekcji IV.

**Uwaga 2.** Dla  $\alpha = 1$ , algorytmy sterowania bazujące na modelu odwrotnym (15) i (16) sprowadzają się do formuły sterowania przeznaczonej dla obiektów całkowitego rzędu, jak poniżej

$$\mathbf{u}(k) = (\mathbf{CB})_{0, \sigma_2}^R \left[ \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) - \mathbf{CA} \mathbf{x}(k) \right]. \quad (17)$$

W kolejnej sekcji omówiono wątek stabilności dyskutowanego sterowania perfekcyjnego.

### 5.1. Stabilność procedury IMC dedykowanej obiektom ułamkowego rzędu [22]

Istotnym jest, że stabilność sterowania opartego na modelu odwrotnym można wyznaczyć tutaj w podobny sposób, jak w przypadku obiektów z rzędem całkowitym. Poniższa para twierdzenie-dowód zwięźle porusza to zagadnienie.

**Twierdzenie 2.** Rozważmy wielowymiarowy obiekt ułamkowego rzędu  $(1-\beta)$  z liczbą wejść  $n_u$  większą lub równą liczbie wyjść  $n_y$ . Załóżmy, bez straty ogólności, że  $\mathbf{y}_{\text{ref}}(k) = \mathbf{0}$  w formule sterowania perfekcyjnego (8). Wtedy

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{CB})^R \mathbf{C} \left[ \mathbf{A}_d - \underline{I}_n \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} q^{-j+1} \right] \mathbf{x}(k), \quad (18)$$

i ostatecznie otrzymujemy regulację ze sprzężeniem od wektora zmiennych stanu w postaci

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_{F-O} \mathbf{x}(k), \quad (19)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{F-O} = (\mathbf{CB})^R \mathbf{C} \left[ \mathbf{A}_d - \underline{I}_n \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} q^{-j+1} \right]. \quad (20)$$

Stąd obszar stabilności sterowania opisanego wyrażeniem (19), także regulacji (8), koresponduje z poniższą formułą

$$\det \left( z \underline{I}_n - \left[ \underline{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^R \mathbf{C} \right] \left[ \mathbf{A}_d - \underline{I}_n \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^{-j+1} \right] \right), \quad (21)$$

gdzie  $z$  jest operatorem zespolonym.

*Dowód.* Natychmiast po przekształceniu równania (2) do postaci

$$\mathbf{x}(k+1) = \Delta^\alpha \mathbf{x}(k+1) - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \mathbf{x}(k-j+1), \quad (22)$$

i jego powiązaniu z równaniem stanu (1) oraz formułą (18), otrzymujemy wyrażenie w zwartej postaci

$$\mathbf{x}(k+1) = (\underline{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^R \mathbf{C}) \left[ \mathbf{A}_d - \underline{I}_n \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} q^{-j+1} \right] \mathbf{x}(k), \quad (23)$$

z jego reprezentacją w dziedzinie zmiennej zespolonej  $z$ , jak poniżej

$$\mathbf{X}(z)z = (\mathbf{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{CB})^R \mathbf{C}) \left( \left[ \mathbf{A}_d - \mathbf{I}_n \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^{-j+1} \right] \right) \mathbf{X}(z). \quad (24)$$

Ostatecznie stabilność formuły (24) determinuje równanie (21), co kończy dowód.

**Uwaga 3.** Dla obiektów z rzędem całkowitym (4) sterowanie (19) przyjmuje następującą formę

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}_{I-O} \mathbf{x}(k), \quad (25)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{I-O} = (\mathbf{CB})^R \mathbf{CA}. \quad (26)$$

Stąd formułę (21) należy zredukować do postaci

$$\det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{CB})^R \mathbf{CA}). \quad (27)$$

Po syntezy sterowania z modelem odwrotnym dla obiektów z ułamkowym rzędem przejdźmy do przykładów numerycznych w następnej sekcji. Dwie instancje regulacji – niestabilna i stabilna, potwierdzą zasadność prowadzenia badań w kierunku zwiększania odporności procedury IMC.

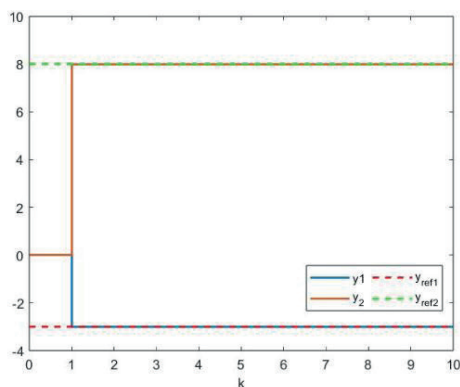
## 6. Przykłady symulacyjne

Na wstępie należy zaznaczyć, że badania symulacyjne zostały wykonane w środowisku MATLAB z wykorzystaniem autor-

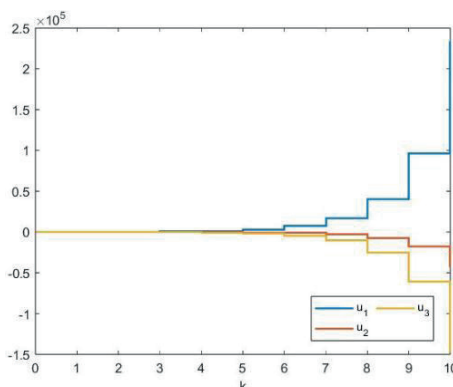
skiej procedury (Załącznik A). W celu pokazania wpływu inwersji uogólnionych na proces zwiększania odporności dyskutowanego prawa sterowania, przeanalizowano dwa przypadki.

**Przykład 1.** Rozważmy obiekt niekwadratowy ułamkowego rzędu z jednostkowym opóźnieniem  $d = 1$ , mający trzy zmienne sterujące, dwie zmienne obserwowane oraz cztery zmienne stanu, opisany za pomocą równań (1–3) z

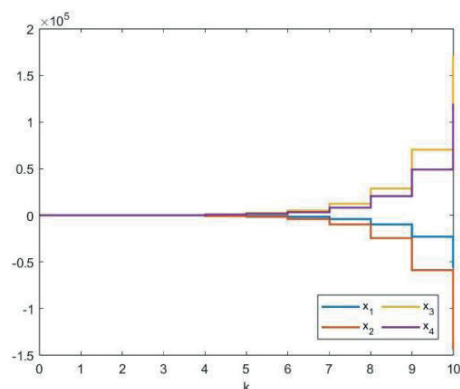
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= \begin{bmatrix} 0,8705 & 0,0581 & 0,4012 & 0,0694 \\ 0,6030 & 0,4578 & 0,5270 & 0,2788 \\ 0,2653 & 0,7222 & 0,8942 & 0,3794 \\ 0,8648 & 0,3390 & 0,7784 & 0,8647 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0,4120 & 0,8985 & 0,7432 \\ 0,2399 & 0,9347 & 0,8997 \\ 0,5977 & 0,8179 & 0,0652 \\ 0,4794 & 0,7089 & 0,3359 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0,0043 & 0,5074 & 0,2266 & 0,2895 \\ 0,8281 & 0,3662 & 0,5348 & 0,0684 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_0^T &= [0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+1) &= \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \alpha = 0,3. \end{aligned} \quad (28)$$



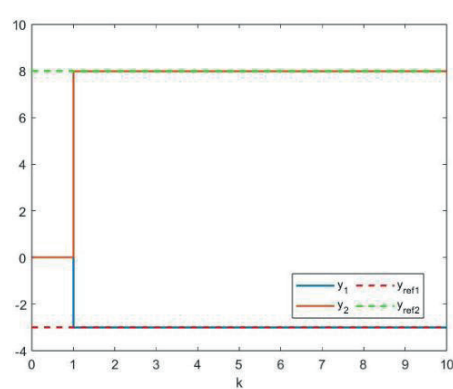
Rys. 1. Sterowanie perfekcyjne: zmienne wyjściowe, przypadek — T-inwersja  
Fig. 1. Perfect control output runs — T-inverse case



Rys. 2. Sterowanie perfekcyjne: zmienne sterujące, przypadek — T-inwersja  
Fig. 2. Perfect control input runs — T-inverse case



Rys. 3. Sterowanie perfekcyjne: zmienne wektora stanu, przypadek — T-inwersja  
Fig. 3. Perfect control state-space runs — T-inverse case



Rys. 4. Sterowanie perfekcyjne: zmienne wyjściowe, przypadek —  $\sigma$ -inwersja  
Fig. 4. Perfect control output runs —  $\sigma$ -inverse case

Stosując formułę sterowania (15), która implementuje  $T$ -inwersję Moore'a-Penrose'a, otrzymujemy sygnały (rys. 1–3) obserwowane podczas strategii sterowania z modelem odwrotnym.

Zauważmy, że mimo osiągnięcia przez układ regulacji wartości referencyjnych, pozostałe sygnały są niestabilne. Jednocześnie ogranicza to zastosowanie wspomnianej inwersji w problematyce sterowania IMC. Jak okaże się w kolejnym przykładzie numerycznym, użycie  $\sigma$ -inwersji uogólnionej będzie istotnym remedium na obserwowane tu niekorzystne właściwości inwersji  $T$ .

**Przykład 2.** Weźmy ponownie pod uwagę obiekt (28). Stosując prawo sterowania (16) z  $\sigma$ -inwersją angażującą arbitralnie dobrane stopnie swobody

$$\underline{\beta}(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 1,4145 & -0,5941 & 1,4076 \\ -0,9242 & 1,4213 & -1,0290 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy przebiegi pokazane na Rysunkach 4–6. Znamienne jest, że zsyntetyzowane stopnie swobody stabilizują tu cały układ regulacji IMC, implementujący obiekt niecałkowitego rzędu.

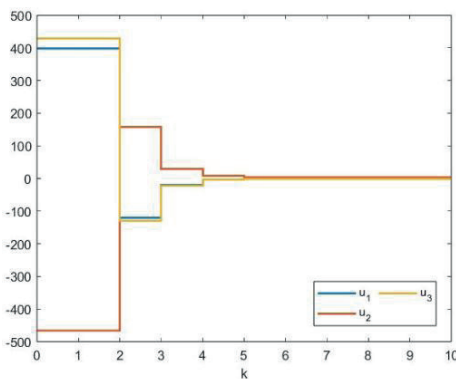
**Uwaga 4.** Należy zaznaczyć, że wyznaczone w oparciu o treści Sekcji 5.1 obszary stabilności, odpowiednio dla Przykładu 1 (Rys. 7) i Przykładu 2 (Rys. 8), ściśle korespondują z przebiegami czasowymi niestabilnej i stabilnej instancji zsyntetyzowanego prawa sterowania. Naturalnie liczba biegunów zamkniętego układu regulacji związana jest z:

1. liczbą zmiennych stanu obiektu opisanego formułami (1–3) oraz
2. przyjętym czasem symulacji, determinującym złożoność rozpatrywanego systemu.

Jak wcześniej wspomniano, badania numeryczne wykonano na podstawie autorskiej procedury pokazanej w Załączniku A.

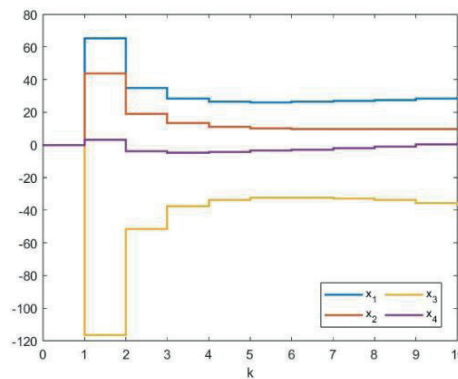
## 7. Wnioski i problemy otwarte

Przeprowadzona w ramach artykułu synteza sterowania z modelem odwrotnym obiektami frakcyjnymi Grünwalda-Letnikova wykazała, że użycie niejednoznacznej  $\alpha$ -inwersji znacząco poprawia odporność wielowymiarowego sterowania perfekcyjnego. W przeciwieństwie do  $T$ -inwersji, wspomniana inwersja stabilizuje cały układ regulacji zamkniętej, co jest oczekiwane z punktu widzenia implementacji w praktyce. Co więcej, autorska procedura frakcyjnego sterowania perfekcyjnego potwierdziła otrzymane rezultaty w kontekście prowadzonej w artykule analizy stabilności. Po zestawieniu uzyskanych wyników, dotyczących wyłącznie obiektów z jednostkowym czasem opóźnienia, sformułowano następujące problemy otwarte. Ciekawym zagadnieniem, wartym podjęcia wysiłku badawczego w przyszłości, byłoby uogólnienie prowadzonych prac na obiekty z czasem opóźnienia większym niż  $d = 1$ . Nowy algorytm IMC oraz cechy minimalno/nieminimalnofazowości dyskutowanych systemów, determinowane przez nowo wprowadzone tzw. zera sterownicze różnych typów, stanowią ciekawe wyzwania poznawcze. Zestawione problemy otwarte będą realizowane w ramach przewodu doktorskiego.



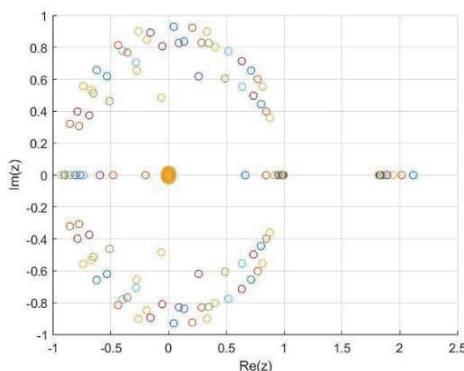
Rys. 5. Sterowanie perfekcyjne: zmienne sterujące, przypadek —  $\sigma$ -inwersja

Fig. 5. Perfect control input runs —  $\sigma$ -inverse case

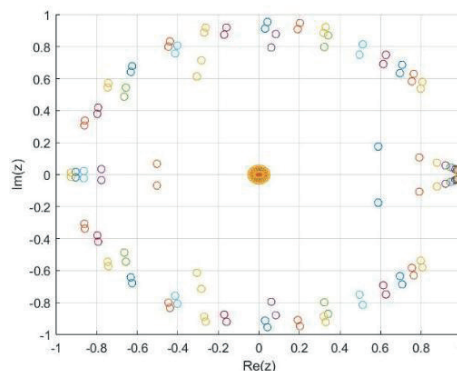


Rys. 6. Sterowanie perfekcyjne: zmienne wektora stanu, przypadek —  $\sigma$ -inwersja

Fig. 6. Perfect control state-space runs —  $\sigma$ -inverse case



Rys. 7. Obszar stabilności — Przykład 1,  $k = 10$   
Fig. 7. A stability region — Example 1,  $k = 10$



Rys. 8. Obszar stabilności — Przykład 2,  $k = 10$   
Fig. 8. A stability region — Example 2,  $k = 10$

## Załącznik A

### Procedura sterowania IMC dla obiektów frakcyjnych

```

k = input('k= ');
k=k+1; %10
Ad = input('Ad = ');
B = input('B = ');
C = input('C = ');
x0 = input('x0 = ');
yref = input('yref = ');
eq_3 = fun_1(0.3,100);

%IMC - T-inwersja
for i = 1:k
    if i == 1
        urow = pinv(C*B) * [yref - C*Ad*x0 + C
                             *sum(eq_3(:, (1:i))) * x0];
        xrow = x0;
        x(:,i) = xrow;
        u(:,i) = urow;
        y(:,i) = C*x0;
    else
        urow = pinv(C*B) * [yref - C*Ad*xrow +
                             C*sum(eq_3(:, (1:i-1))) * xrow];
        u(:,i) = urow;
        xrow = Ad*xrow + B*urow - sum([eq_3(1:i-1)
                                         -1]) * xrow;
        x(:,i) = xrow;
        y(:,i) = C*xrow;
    end
end

%IMC - sigma-inwersja
for i = 1:k
    if i == 1
        urow = [Beta' * inv([C*B]) * Beta'] * [
            yref - C*Ad*x0 + C*sum(eq_3(:, (1:
            i))) * x0];
        xrow = x0;
        x(:,i) = xrow;
        u(:,i) = urow;
        y(:,i) = C*x0;
    else
        urow = [Beta' * inv([C*B] * Beta')] * [yref
            - C*Ad*xrow + C*sum(eq_3(:, (1:i-1)
            -1))) * xrow];
        u(:,i) = urow;
        xrow = Ad*xrow + B*urow - sum([eq_3(1:i-1)
                                         -1]) * xrow;
        x(:,i) = xrow;
        y(:,i) = C*xrow;
    end
end

% sygnały sterujące -> u
% sygnały wektora zmiennych stanu -> x
% sygnały wyjściowe -> y

```

### Funkcja G-L

```

function eq_3 = fun_1(alfa,j)
res = 1;
if j == 0
    eq_3 = res;
end

if j>0
    for i = 0:j-1
        res = res*(alfa-i);
        alfa_j = res/factorial(i+1);
        results(i+1) = alfa_j
        eq_3(i+1) = [(-1)^(i+1)]
                    * results(1,i+1);
    end
end
end

```

## Bibliografia

1. Tzounas G., Dassios I., Murad M.A.A., Milano F., *Theory and Implementation of Fractional Order Controllers for Power System Applications*, "IEEE Transactions on Power Systems", Vol. 35, No. 6, 2020, 4622–4631, DOI: 10.1109/TPWRS.2020.2999415.
2. Busłowicz M., *Stability of fractional discrete-time linear scalar systems with one delay*, "Pomiary Automatyka Robotyka", Vol. 17, No. 2, 2013, 327–332.
3. Zhenbin W., Zhenlei W., Guangyi C., Xinjian Z., *Digital implementation of fractional order PID controller and its application*, "Journal of Systems Engineering and Electronics", Vol. 16, No. 1, 2005, 116–122.
4. Sadalla T., Horla D., Giernacki W., Koziński P., *Dynamic anti-windup compensator for fractional-order system with time-delay*, "Asian Journal of Control", Vol. 22, No. 5, 2020, 1767–1781, DOI: 10.1002/asjc.2200.
5. Kociszewski R., *Observer synthesis for linear discrete-time systems with different fractional orders*, "Pomiary Automatyka Robotyka", Vol. 17, No. 2, 2013, 376–381.
6. Kothari K., Mehta U., Prasad R., *Fractional-Order System Modeling and its Applications*, "Journal of Engineering Science & Technology Review", Vol. 12, No. 6, 2019, DOI: 10.25103/jestr.126.01.
7. Tolba M.F., AbdelAty A.M., Soliman N.S., Said L.A., Madian A.H., Azar A.T., Radwan A.G., *FPGA implementation of two fractional order chaotic systems*, "AEU – International Journal of Electronics and Communications", Vol. 78, 2017, 162–172, DOI: 10.1016/j.aue.2017.04.028.
8. Huneek W.P., *Perfect control for right-invertible Grünwald-Letnikov plants—an innovative approach to practical implementation*, "Fractional Calculus and Applied Analysis", Vol. 22, No. 2, 2019, 424–443, DOI: 10.1515/fca-2019-0026.
9. Feliks T., Huneek W.P., Stanimirović P.S., *Application of Generalized Inverses in the Minimum-Energy Perfect Control Theory*, "IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems", Vol. 53, No. 7, 2023, 4560–4575, DOI: 10.1109/TSMC.2023.3253778.
10. Sadalla T., Horla D., Giernacki W., Koziński P., *Stability analysis and tracking performance of fractional-order PI controller for a second-order oscillatory system with time-delay*, [In:] 2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2016, 322–326, DOI: 10.1109/MMAR.2016.7575155.
11. Tan W., *Unified tuning of PID load frequency controller for power systems via IMC*, "IEEE Transactions on Power Systems", Vol. 25, No. 1, 2009, 341–350, DOI: 10.1109/TPWRS.2009.2036463.
12. Sierociuk D., *Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu*, Ph.D. dissertation, The Institute of Control and Industrial Electronics, 2008.
13. Ullah M.Z., Soleymani F., Al-Fhaid A., *An efficient matrix iteration for computing weighted Moore–Penrose inverse*, "Applied Mathematics and Computation", Vol. 226, 2014, 441–454, DOI: 10.1016/j.amc.2013.10.046.
14. Fill J.A., Fishkind D.E., *The Moore–Penrose generalized inverse for sums of matrices*, "SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications", Vol. 21, No. 2, 2000, 629–635, DOI: 10.1137/S0895479897329692.
15. Li Z., Xu Q., Wei Y., *A note on stable perturbations of Moore–Penrose inverses*, "Numerical Linear Algebra with Applications", Vol. 20, No. 1, 2013, 18–26, DOI: 10.1002/nla.838.

16. Chen X., Zhao H., Sun H., Zhen S., *Adaptive robust control based on Moore-Penrose generalized inverse for underactuated mechanical systems*, "IEEE Access", Vol. 7, 2019, 157 136–157 144, DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2950211.

17. Kome C., Yazlik Y., *Inverse and Moore-Penrose inverse of conditional matrices via convolution*, "Journal of Applied Mathematics and Computing", Vol. 70, No. 1, 2024, 417–433, DOI: 10.1007/s12190-023-01974-5.

18. Hunek W.P., *A New Generalized  $\theta$ -Inverse vs. Moore-Penrose Structure: A Comparative Control-Oriented Practical Investigation*, "IEEE Access", Vol. 9, 2021, 110 746–110 752, DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3103479.

19. Zhang B., Li S., Chen X., Mao Y., *A Novel Zeroing Neural Model for Solving Dynamic Matrix Moore-Penrose Inverse and Its Application to Visual Servoing Control of Manipulator*, "IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement", Vol. 73, 2024, DOI: 10.1109/TIM.2024.3363782.

20. Hunek W.P., Latawiec K.J., *A study on new right/left inverses of nonsquare polynomial matrices*, "International Journal of Applied Mathematics and Computer Science", Vol. 21, No. 2, 2011, 331–348, DOI: 10.2478/v10006-011-0025-y.

21. Ben-Israel A., Greville T.N., *Generalized inverses: theory and applications*, Springer Science & Business Media, 2003, DOI: 10.1007/b97366.

22. Hunek W.P., Wach Ł., *A new stability theory for Grünwald-Letnikov inverse model control in the multivariable LTI fractional-order framework*, "Symmetry", Vol. 11, No. 10, 2019, DOI: 10.3390/sym11101322.

# Toward an Improvement of the Inverse Model Control-Originated Robustness Through the Application of Generalized Inverses: The Discrete-Time State-Space Framework of Grünwald-Letnikov

**Abstract:** In the paper, both analysis and synthesis of the multivariable perfect control devoted to systems defined in the discrete-time state-space framework occupied by the Grünwald-Letnikov paradigm are investigated. For this purpose, the original procedure has been applied encompassing the generalized T- and  $\sigma$ -inverse. Numerical instances performed in the MATLAB environment have confirmed the  $\sigma$ -inverse-related contribution to the robustness of the inverse model control scheme. A set of open problems, associated with the discussed fractional-order systems respecting time delays  $d > 1$ , constitutes a serious research challenge in the nearest future toward a unified inverse model control-oriented framework.

**Keywords:** inverse model control, generalized inverses, control robustness, Grünwald-Letnikov domain, multivariable systems

**mgr inż. Emilia Helińska**

emilia.helinska@student.po.edu.pl  
ORCID: 0009-0000-6796-7003

Doktorantka w Szkole Doktorskiej Politechniki Opolskiej – dyscyplina naukowa: Automatyka, Elektronika, Elektrotechnika i Technologie Kosmiczne. W latach 2018–2023 studia na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej – kierunku Automatyka i Robotyka. Badania naukowe skoncentrowane na szeroko rozumianej teorii i praktyce sterowania, głównie obiektami frakcyjnymi.



**dr hab. inż. Wojciech P. Hunek, prof. PO**

w.hunek@po.edu.pl  
ORCID: 0000-0002-8210-9776

Profesor uczelni w Politechnice Opolskiej – Katedra Automatyki, dyscyplina naukowa: Automatyka, Elektronika, Elektrotechnika i Technologie Kosmiczne. Badania naukowe skupione na analizie i syntezie wielowymiarowych struktur sterowania predykcyjnego, adaptacyjnego i odpornego. Około 130 publikacji, dwie książki autorskie oraz sześciu wypromowanych doktorów.

